# MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

**A. CLEBSCH** UND **C. NEUMANN,**
PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

VIERTER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1871.

# Inhalt des vierten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung, abgesehen von einer an das Ende dieses Verzeichnisses gesetzten Preisaufgabe.)


Seite

**Affolter,** in Solothurn Lehrsätze und Aufgaben über die Kugel . . . . . 185

**Andréiewsky,** à Varsovie. Propriétés de quelques quadratures déduites de l'intégration des expressions différentielles à deux variables . . . . . . . 391

——— Formules relatives à la théorie des intégrales définies . . . . . . 550

**Du Bois-Reymond,** in Freiburg i. B. Notiz über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend . . . . 135

——— Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln . . . . . 362

**Brill,** in Darmstadt. Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven 510

——— Ueber zwei Berührungsprobleme . . . . . . . . . . . . . . . 527

**Brioschi,** à Milan. Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95

**Cantor,** in Halle a. d. S. Ueber trigonometrische Reihen . . . . . . . . . 139

**Cayley,** in Cambridge. An example of the higher transformation of a binary form . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 359

——— On a surface of the eighth order . . . . . . . . . . . . . . 558

**Clausius,** in Bonn. Ueber die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum und zweier materieller Punkte um einander 231

**Clebsch,** in Göttingen. Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284

——— Ueber das ebene Fünfeck . . . . . . . . . . . . . . . . . 476

——— Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen . . . . . . . 490

**Cremona,** à Milan. Observations géométriques à propos de la Note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4e ordre avec un point double". . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

——— Ueber die Abbildung algebraischer Flächen . . . . . . . . . . 213

**Diekmann,** in Göttingen. Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3ter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält (mit einer lithographirten Tafel) . . . . . . . . . . . . . . . 442

**Godt,** in Leipzig. Notiz über die Vertheilung der Elektricität auf einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper . . . . . . . . . . . . . 245

**Gordan,** in Giessen. Resultanten von Covarianten . . . . . . . . . . . 169

**Gundelfinger,** in Tübingen. Zur Theorie der ternären cubischen Formen . 144

——— Ueber einige allgemeine Theoreme aus der neueren Algebra . . . 164

——— Ueber die Ausartungen einer Curve dritter Ordnung . . . . . . . 561

**Heine,** in Halle a. d. S. Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 626

Inhalt des vierten Bandes.


Seite

**Hierholzer,** in Carlsruhe. Ueber eine Fläche der vierten Ordnung . . . . 172

**Hoppe,** in Berlin. Ueber independente Darstellung der höheren Differentialquotienten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85

**Hossenfelder,** in Graudenz. Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195

**Klein,** in Göttingen. Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. (Zus. mit S. Lie) . . . . . . . . 50

——— Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 346

——— Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 403

——— Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie . . . . . 573

**Korndörfer,** in Neumünster. Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht . . . . . . . . . . . . . . . . 117

**Lie,** in Christiania. Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. (Zus. mit F. Klein) . . . . . . . 50

**Lommel,** in Erlangen. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. . . . . 103

**Lüroth,** in Carlsruhe. Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181

**Mayer,** in Leipzig. Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function. . 88

**Minnigerode,** in Göttingen. Bemerkung über irrationale Zahlen . . . . . 497

**Most,** in Stettin. Ueber die höheren Differentialquotienten . . . . . . . . 499

**Somoff,** in St. Petersburg. Ueber die annähernde Rectification beliebiger Curven . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 505

**Stolz,** in Wien. Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 416

**Sturm,** in Bromberg. Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (ein fachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung . . 249

**Weyr,** in Prag. Ueber rationale Curven vierter Ordnung . . . . . . . . . 243

**Zeuthen,** à Copenhague. Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

——— Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un . . . . . . . . . . . . 21

——— Note sur la théorie de surfaces réciproques . . . . . . . . . . 633

**Preisaufgabe** der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1874 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138

# Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

En étudiant géométriquement quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un, j'ai eu besoin de connaître les singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface. Je rendrai compte, dans cet article particulier, de ces singularités, dont la connaissance pourra être utile aussi pour d'autres recherches, et je pourrai ainsi y renvoyer dans l'article suivant, où je consignerai mes études sur les surfaces correspondantes.

Dans les cas où je ne dirai pas expressément le contraire, je supposerai dans les deux articles que les surfaces dont j'aurai à m'occuper puissent être douées des singularités dont je vais donner ici l'énumeration. Lorsque j'aurai à leur attribuer une singularité d'un ordre plus élevé je le dirai aussi. La plupart des notations dont je fais usage sont celles que M. Salmon a données aux nombres des singularités ordinaires*), et celles que M. Cayley a données aux nombres des singularités extraordinaires dont il rend compte dans son mémoire sur les surfaces-réciproques.**)

$n$, ordre de la surface;
$a$, ordre d'un cône circonscrit;
$\delta$, nombre Plückerien***) des génératrices doubles de ce cône;

$n'$, classe de la surface;
$a'$, classe d'une section plane;
$\delta'$, nombre Plückerien***) des tangentes doubles de la section;

*) Geometry of three dimensions, 2me édition p. 450 et suivantes.

**) Philosophical Transactions 1869, p. 201. — Les lecteurs qui ne connaissent pas le mémoire de Mr. Cayley trouveront l'explication des mots nouveaux qui sont introduits par cet auteur (tels que point-pince etc.) et que je lui emprunte, aux endroits respectifs où j'aurai à parler des singularités qu'ils représentent.

***) C'est à dire celui qui entre dans les formules Plückeriennes. Dans le nombre Plückerien des points doubles d'une courbe plane un point $s$-tuple compte pour $\frac{s(s-1)}{2}$ etc. Mr. Cayley a, dans un mémoire „On the Higher Singularities of a Plane Curve", Quart. Journal of Math. vol. VII, p. 212, donné le moyen de déterminer les nombres qui représentent un point singulier ou une droite singulière d'une espèce quelconque dans les différents nombres (ou caractéristiques) Plückeriens.

$\varkappa$, nombre Plückerien de ses génératrices stationnaires;

$b$, ordre de la courbe double;

$f$, nombre des points doubles de cette courbe qui n'ont aucune singularité ultérieure;

$t$, nombre de ses points triples;

$k$, nombre Plückerien des génératrices doubles d'un cône projetant la courbe double;

$\gamma$, nombre des points stationnaires de la courbe double;

$q$, sa classe;

$\varrho$, classe de la développable tangente à la surface le long de sa courbe double;

$j$, nombre des points-pinces;

$c$, ordre de la courbe cuspidale;

$h$, nombre des génératrices doubles d'un cône projetant cette courbe;

$\beta$, nombre des points stationnaires de la même courbe;

$r$, sa classe;

$\sigma$, classe de la développable tangente à la surface le long de sa courbe cuspidale;

$\chi$, nombre des points-clos;

$i$, nombre des points d'intersection de la courbe double et de la courbe cuspidale qui n'ont aucune singularité ultérieure.

$\varkappa'$, nombre Plückerien de ses tangentes stationnaires;

$b'$, classe de la développable bitangente (enveloppe des plans bitangents);

$f'$, nombre des plans tangents doubles de cette développable qui n'ont aucune singularité ultérieure;

$t'$, nombre de ses plans tangents triples;

$k'$, nombre Plückerien des tangentes doubles d'une section plane de la développable bitangente;

$\gamma'$, nombre des plans tangents stationnaires de la développable bitangente;

$q'$, son ordre;

$\varrho'$, ordre de la courbe lieu des points de contact des plans bitangents;

$j'$, nombre des plans-pinces;

$c'$, classe de la développable enveloppe des plans tangents stationnaires;

$h'$, nombre des tangentes doubles d'une section plane de cette développable;

$\beta'$, nombre des plans tangents stationnaires de la même développable;

$r'$, son ordre;

$\sigma'$, ordre de la courbe lieu des points de contact des plans tangents stationnaires;

$\chi'$, nombre des plans-clos;

$i'$, nombre des plans tangents communs à la développable bitangente et à la développable enveloppe des plans tangents stationnaires qui n'ont aucune singularité ultérieure.

Nous attribuons encore à la surface:

un nombre de points coniques, c'est-à-dire de points où les tangentes forment un cône de l'ordre $\mu$, de la classe $\nu$, doué de $y + \eta$ génératrices doubles dont les $y$ sont tangentes à des branches de la courbe double qui passent par le point, de $z + \zeta$ génératrices stationnaires dont les $z$ sont tangentes à des branches de la courbe cuspidale, de $u$ plans tangents doubles et de $v$ plans tangents stationnaires. — Nous supposerons que ces points aient du

un nombre de plans qui y sont tangents le long d'une courbe de la classe $\mu'$, de l'ordre $\nu'$, douée de $y' + \eta'$ tangentes doubles dont les $y'$ sont génératrices de la développable bitangente, de $z' + \zeta'$ tangentes stationnaires dont les $z'$ sont génératrices de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, de $u'$ points doubles et de $v'$ points stationnaires. — Nous supposerons que ces plans aient les propriétés qui sont les plus générales au cas où la surface est

reste les propriétés qui sont les plus générales au cas où la surface est regardée comme lieu de points. — Nous désignerons par $\Sigma$ une somme étendue à tous ces points.*)

regardée comme enveloppe de plans. — Nous désignerons par $\Sigma'$ une somme étendue à tous ces plans.*)

Les notations $a'$, $f'$ et $i'$ deviennent superflues; car $a$ et $a'$ indiquent le nombre des tangentes à la surface qui passent par un même point et se trouvent dans un même plan, $f$ et $f'$ indiquent le nombre de contacts de deux nappes différentes, et nous verrons dans cet article que les singularités dont les nombres sont désignés par $i$ et $i'$ se suivent aussi. On a donc

$$\text{(I)} \qquad a' = a, \qquad f' = f, \qquad i' = i.$$

Le raisonnement qui donne la formule $f' = f$ ne s'applique ni aux $\Sigma'(u')$ points doubles des courbes planes le long desquelles la surface a les mêmes plans tangents, ni aux $\Sigma(u)$ plans tangents doubles des cônes tangents aux points coniques. Voilà pourquoi nous avons donné à $f$ une définition qui ne s'étend pas aux $\Sigma'(u')$ points, qui sont pourtant des points doubles de la courbe double, et à $f'$ une définition qui ne s'étend pas aux $\Sigma(u)$ plans, qui sont des plans tangents doubles de la développable bitangente. De même, les $\Sigma'(v')$ points stationnaires des courbes de contact des plans singuliers, qui sont des points d'intersection de la courbe double avec la courbe cuspidale, ne sont pas compris dans le nombre $i$, et les $\Sigma(v)$ plans tangents stationnaires des cônes tangents aux points coniques, qui sont des plans tangents communs à la développable bitangente et à l'enveloppe des plans tangents stationnaires, ne sont pas compris dans le nombre $i'$.

Les relations Plückeriennes nous donnent encore les équations suivantes, où nous avons remplacé $a'$ par $a$:

---

*) À ces points appartiennent ceux que Mr. Cayley a appellés „cnicnodes" (pour $\mu = \nu = 2$, $y = \eta = z = \zeta = u = v = 0$), et „binodes" (pour $\mu = 2$, $\eta = 1$, $\nu = y =$ etc. $= 0$). Si l'équation de la surface a la forme $FP^2 + GQ^3 = 0$, les points d'intersection des surfaces $F = 0$, $P = 0$, $Q = 0$ y appartiendront (pour $\mu = \nu = 3$, $z = 1$, $v = 1$, $y = \eta =$ etc. $= 0$). Ces points ne sont donc pas en général, comme le dit M. Cayley dans le no. 30 du mémoire sur les *surfaces réciproques*, des «*off-points*»; car, selon les formules de Mr. Cayley, la courbe de contact d'un cône circonscrit quelconque ne passe pas par un «off-point» (mais trois fois par un des points dont nous parlons). Les «off-points» ne sont pas au nombre des points singuliers que nous attribuons à notre surface. On aurait pu comprendre au nombre des points coniques un point ordinaire de la surface (pour $\mu = 1$, $\nu = y =$ etc. $= 0$), un point ordinaire de la courbe double (pour $\mu = 2$, $y = 1$, $\nu =$ etc. $= 0$), et un des $t$ points triples de la courbe double (pour $\mu = 3$, $y = 3$, $\nu =$ etc. $= 0$). — Les remarques analogues sont à faire par rapport aux singularités réciproques.

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} n(n-1) = a + 2b + 3c\,, \\ a(a-1) = n + 2\delta' + 3\varkappa'\,, \\ \quad c - \varkappa' = 3(n-a)\,; \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad b(b-1) = q + 2k + 3\gamma\,;$$

$$\text{(IV)}\quad c(c-1) = r + 2h + 3\beta\,.$$

On trouve de même pour chacun des points coniques

$$\text{(V)}\quad \mu(\mu-1) = x + 2y + 3z$$

où

$$\text{(VI)}\quad x = \nu + 2\eta + 3\zeta\,,$$

et, *si le cône tangent n'est pas composé de parties au nombre desquelles il se trouve des plans,*

$$\text{(VII)}\quad \begin{cases} 2u = 2(y+\eta) + (\nu-\mu)(\nu+\mu-9)\,, \\ \quad v = z + \zeta + 3(\nu-\mu)\,. \end{cases}$$

Je place encore ici, sans démonstration, six équations, dont je ne ferai usage que dans les applications ajoutées à mon second article; les équations sont celles de M. Salmon, modifiées seulement à cause des singularités extraordinaires*):

$$\text{(VIII)}\quad \begin{cases} a(n-2) = \varkappa + \varrho + 2\sigma + \Sigma\big(x(\mu-2) - \eta - 2\zeta\big), \\ b(n-2) = \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t + \Sigma\big(y(\mu-2)\big), \\ c(n-2) = 2\sigma + 4\beta + \gamma + \Sigma\big(z(\mu-2)\big), \end{cases}$$

$$\text{(IX)}\quad \begin{cases} \quad a(n-2)(n-3) = 2\delta + 3(ac - 3\sigma - \chi) \\ + 2(ab - 2\varrho - j) + \Sigma\big(x(-4\mu+7) + 2\eta + 4\zeta\big), \\ \quad b(n-2)(n-3) = 4(k - f - 3t) + (ab - 2\varrho - j) \\ + 3(bc - 3\beta - 2\gamma - i) + \Sigma\big(y(-4\mu+8)\big) - \Sigma'(4u' + 3v'), \\ \quad c(n-2)(n-3) = 6h + (ac - 3\sigma - \chi) \\ + 2(bc - 3\beta - 2\gamma - i) + \Sigma\big(z(-4\mu+9)\big) - \Sigma'(2v'). \end{cases}$$

Les nombres que nous avons énumérés doivent encore satisfaire aux équations réciproques aux relations (II) — (X), qu'on forme par la substitution des lettres accentuées aux lettres non-accentuées, et encore à deux équations**) que je n'écris pas ici parce que je n'en connais pas tous les coefficients.

---

*) Une partie de ces modifications des formules de M. Salmon sont données par M. Cayley à l'endroit déjà cité (Phil. Trans.). Pour en trouver les autres on doit compter combien un cône circonscrit et les deux cônes qui projettent du même sommet la courbe double et la courbe cuspidale, ont de génératrices doubles et cuspidales et de génératrices d'intersection réunies dans la droite qui joint leur sommet commun à un point conique de la surface.

**) Voir aux pages 218—224 du mémoire cité de M. Cayley (Phil. Trans.).

**1.** Nous supposons maintenant que la surface soit douée d'une droite multiple $(M)$.*) Nous désignerons par $\bar{n}+\bar{d}$ *l'ordre de multiplicité de la droite* ou le nombre de plans tangents à la surface à un point quelconque de cette droite: $\bar{n}$ désigne le nombre des plans tangents qui tournent autour de $(M)$ en même temps que le point de contact se meut sur $(M)$, $\bar{d}$ est le nombre des nappes par $(M)$ qui ont le même plan tangent le long de $(M)$ [nappes développables le long de $(M)$]. Nos résultats seront aussi applicables au cas d'une droite simple $(\bar{n}=1,\ \bar{d}=0)$.

La section faite à la surface par un plan passant par la droite $(M)$ est composée de la droite prise $\bar{n}+\bar{d}$ fois et d'une courbe, que nous appellerons *la section résidue*, qui est de l'ordre $n-\bar{n}-\bar{d}$ et qui a par conséquent $n-\bar{n}-\bar{d}$ intersections avec $(M)$. Au nombre de ces points d'intersection appartiennent les points de contact du plan avec la surface qui se meuvent sur $(M)$ en même temps que le plan tourne autour d'elle. Nous désignerons par $\bar{n}'$ le nombre de ces points de contact mobiles, et par $\bar{d}'$ le nombre des points de $(M)$ qui sont des points de contact de tout plan passant par $(M)$.**)

On voit qu'il existe une dualité parfaite dans les propriétés des points de la droite et des plans qui passent par elle. À celle que nous venons de nommer correspond la suivante: un cône circonscrit mené d'un point de la droite $(M)$ à la surface, est composé de la droite prise $\bar{n}'+\bar{d}'$ fois et d'un cône, que nous appellerons le *cône circonscrit résidu*, qui est de l'ordre $n'-\bar{n}'-\bar{d}'$ et à laquelle on peut par conséquent mener par la droite $(M)$ $n'-\bar{n}'-\bar{d}'$ plans tangents. Au nombre de ceux-ci se trouvent les $\bar{n}$ plans qui sont tangents à la surface au sommet du cône circonscrit et qui sont mobiles avec le point de contact. Comme la droite $(M)$ n'est pas ordinairement tangente à une section résidue, ainsi elle n'est pas ordinairement génératrice d'un cône circonscrit résidu.

**2.** Les points singuliers de la droite dont nous aurons à nous occuper sont ceux où coïncident deux des $\bar{n}$ plans tangents (mobiles), et les plans singuliers ceux dont deux des $\bar{n}'$ points de contact (mobiles) coïncident, ce qui peut arriver de plusieurs manières différentes. Pour nous en rendre compte nous représenterons les singularités de la

---

*) Je désignerai, ici et dans l'article suivant, par les lettres majuscules des points, des lignes ou des surfaces, suivant qu'elles sont sans parenthèse, en parenthèse ronde ou en parenthèse carrée.

**) Ces $\bar{d}'$ points ne sont pas ordinairement au nombre des $n-\bar{n}-\bar{d}$ points d'intersection; dans les cas que nous aurons à regarder ils ne le sont pas.

manière suivante. Deux faisceaux de plans dont l'un a pour axe la droite multiple $(M)$, l'autre une droite quelconque $(M')$, et où un plan du premier faisceau a pour correspondants les $\overline{n}'$ plans du second qui passent par ses points de contact mobiles, engendrent par l'intersection des plans correspondants une surface gauche: c'est d'une section plane de cette surface gauche que nous aurons à faire usage, et nous l'appellerons la *courbe représentative.**) Cette courbe est engendrée par deux faisceaux de droites correspondants dont les centres sont aux points $M$ et $M'$ où les deux droites $(M)$ et $(M')$ rencontrent son plan. Comme chaque rayon du premier faisceau a $\overline{n}'$ rayons homologues dans le second et chaque rayon du second faisceau a $\overline{n}$ rayons homologues dans le premier, la courbe sera de l'ordre $\overline{n} + \overline{n}'$ et elle aura un point $\overline{n}$-tuple à $M$ et un point $\overline{n}'$-tuple à $M'$.

Deux plans qui, à un même point de la droite multiple $(M)$, sont tangentes à la surface dont nous nous occupons, coïncident lorsque la droite par $M'$ qui correspond à ce point rencontre la courbe représentative à deux points coïncidents, et deux points de contact d'un même plan par la droite multiple coïncident, lorsque la droite par le point $M$ qui correspond à ce plan rencontre la courbe en deux points coïncidents. Les tangentes par $M$ et $M'$ à la courbe représentative et les droites de $M$ et $M'$ à ses points doubles ou cuspidaux correspondront donc aux plans et aux points singuliers que nous cherchons. Si nous cherchons les cas où les singularités ont lieu de la manière

---

*) Il ne sera pas difficile de déduire l'équation de la courbe représentative de celle qui appartient à la surface dans un système de coordonnées-point où la droite $(M)$ est à l'arête $x = 0$, $y = 0$ du tétraèdre de référence. Alors l'équation de la surface, qui ne contient aucun terme d'un degré inférieur à $\overline{n}$ par rapport à $x$ et $y$, deviendra divisible par $x^{\overline{n}}$ par la substitution de $y = \frac{\eta}{\xi} x$. Si l'on pose, après avoir éloigné le facteur $x^{\overline{n}}$, $x = 0$, on obtient une équation qui est homogène par rapport à $z$ et $u$ et qui le devient par rapport à $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ au moyen de la substitution de $z = \frac{\zeta}{\xi} u$. On doit délivrer l'équation ainsi trouvée des facteurs indépendants de $\eta$, qui sont dûs aux intersections de la droite multiple par des nappes de la surface qui ne passent pas par elle, et des facteurs indépendants de $\zeta$, qui sont dûs aux nappes développables le long de $M$.

L'équation qu'on trouve ainsi appartient à la courbe représentative dont nous avons indiqué ci-dessus la détermination géométrique, à condition que la droite $(M')$ sera à l'arête $z = 0$, $u = 0$, que le plan de la section de la surface gauche passera par l'arête $x = 0$, $u = 0$ (toutefois sans être un de plans $x = 0$ ou $u = 0$), et enfin que $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ désigneront des quantités proportionelles aux distances d'un point du plan à ses droites d'intersection avec les plans coordonnés $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. On voit que l'équation trouvée est de l'ordre $\overline{n}$ par rapport à $\eta$ et de l'ordre $\overline{n}'$ par rapport à $\zeta$.

la plus générale, c'est-à-dire où aucune autre singularité ne s'y ajoute, nous rencontrerons deux différentes espèces de singularités correspondant à une même singularité de la courbe représentative. Car les cas qui sont les plus généraux lorsqu'on regarde la surface comme *lieu de ses points*, ne le seront plus lorsqu'on la regarde comme *enveloppe de ses plans tangents*.

3. À une tangente menée à la courbe représentative par $M'$ correspond toujours un *point* de la droite multiple où deux plans tangents coïncident pour devenir ensuite, par un mouvement ultérieur du point sur la droite $(M)$, imaginaires. Lorsqu'on regarde la surface comme lieu de ses points, cette singularité a dans le cas le plus général lieu aux points de la droite que M. Cayley a appelé „pinch-points" ou *points-pinces* et dont nous désignerons *) le nombre par $\bar{j}$. À un point-pince deux des nappes de la surface qui se rencontrent à la droite multiple sont liées l'une à l'autre, ou, proprement dit, c'est une même nappe qui y retourne sur son pas. Par conséquent une droite quelconque passant par un point-pince rencontre la surface en deux points *consécutifs* (et non seulement *coïncidents*), et elle y sera donc tangente.**) Les plans tangents qui contiennent ces droites passent par une même droite fixe: celle qui est tangente au point-pince à la courbe d'intersection de la surface avec le plan dans lequel coïncident deux des $\bar{n}$ plans tangents de la surface à ce point-pince. — La section faite à la surface par un plan *quelconque* qui passe par un point-pince, y aura un point cuspidal.

En appliquant le principe de dualité à ces propriétés on trouve celles d'une espèce de plans singuliers appelés par M. Cayley „pinch-planes" ou *plans-pinces*; nous désignerons par $\bar{j}'$ le nombre des plans-pinces passant par la droite multiple. On voit que deux des $\bar{n}'$ points de contact d'un plan-pince coïncident pour devenir ensuite, par une rotation ultérieure du plan autour de la droite $(M)$, imaginaires; que toute droite qui est dans le plan-pince est tangente à la surface; et enfin, que les points de contact sont sur une même droite. Un plan-pince par la droite $(M)$ est donc tangent à la surface le long de toute l'étendue d'une droite qui rencontre la droite multiple et qui se trouve sur une nappe qui passe par elle — Le cône circonscrit à la

---

*) $j$ sans barre est, comme nous l'avons dit, le nombre *total* des points-pinces sur la courbe double de la surface, y compris les $\bar{j}$ qui sont sur $(M)$.

**) Les points-pinces sont *les points d'intersection de la courbe double avec la courbe de contact d'un cône circonscrit quelconque*, et, par conséquent, toute droite par elle est une tangente, ou plutôt une position-limite d'une série de tangentes.

surface mené d'un point quelconque d'un plan-pince aura ce plan pour plan stationnaire.

**4.** Comme un point de la droite multiple $(M)$ où deux des $\overline{n}$ plans tangents coïncident ou qui correspond à une tangente menée du point $M'$ à la courbe représentative est, en général lorsque la surface est regardée comme lieu de ses points, un point-pince, aussi un plan par $(M)$ qui correspond à une tangente menée du point $M$ à la courbe représentative, c'est-à-dire un plan dont deux des $\overline{n'}$ points de contact coïncident, sera, *en général lorsque la surface est regardée comme enveloppe de ses plans tangents, un plan-pince.* Mais on voit bien qu'il n'en sera plus ainsi lorsque la surface est regardée comme *lieu de ses points.* Alors, dans le cas le plus général, un plan passant par la droite multiple $(M)$ dont deux des $\overline{n'}$ points de contact coïncident, a *pour section résidue une courbe tangente à la droite* $(M)$. Un plan de cette espèce est *tangent,* le long de la droite $(M)$, *à tout cône circonscrit résidu dont le sommet se trouve sur* $(M)$, et, *lorsque le sommet est au point de contact du plan singulier, le contact du plan avec le cône devient stationnaire.**) Nous voyons de plus que le plan singulier est *un des* $\beta'$ *plans tangents stationnaires de la développable enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface***), *et que le contact avec cette développable a lieu le long de la droite* $(M)$ *elle-même.* Le même plan sera encore, à cause de ses $\overline{n'} + \overline{d'} - 2$ autres contacts avec la surface, $\overline{n'} + \overline{d'} - 2$ *fois tangente à l'enveloppe résidue des plans tangents doubles* de la surface, c'est-à-dire à la développable qui, avec la droite $(M)$ prise $\frac{(\overline{n'} + \overline{d'})(\overline{n'} + \overline{d'} - 1)}{2}$ fois***), est l'enveloppe totale des plans tangents doubles. Les contacts avec cette développable ont aussi *lieu le long de la droite* $(M)$ *elle-même.* A cause de l'une de ces singularités que nous venons de nommer, nous appelons les plans singuliers les *plans stationnaires de la droite* $(M)$, et nous désignons leur nombre par $\overline{\beta'}$.

---

*) On aura, sans difficulté, des vérifications analytiques de ces assertions en regardant une surface du troisième ordre dont une des vingt-sept droites est à l'axe $x = 0$, $y = 0$, ou une surface du quatrième ordre qui a ce même axe pour droite double.

**) En effet, les plans tangents stationnaires de la développable enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface sont ceux dont la courbe d'intersection avec une même nappe de la surface est douée d'un point de contact de deux branches différentes. Comparer Salmon: Geometry of three Dimensions le n° 520. — Les recherches que nous allons entreprendre dans cet article donneront aussi une vérification des différentes propriétés que nous attribuons ici à ces plans singuliers.

***) Ce nombre subira des altérations si plusieurs des $\overline{d'}$ points de contact fixes coïncident. Voir au n° suivant.

On voit, au moyen du principe de dualité, que, dans le cas où la surface est regardée comme enveloppe de ses plans tangents, un point où deux plans tangents coïncident ne sera pas en général un point-pince mais un point doué des singularités suivantes: 1° *le cône circonscrit à la surface dont le sommet est à ce point passe par la droite multiple* ($M$); 2° *la section résidue d'un plan quelconque qui passe par* ($M$) *aura un contact avec* ($M$) *au point singulier;* 3° *celle du plan dans lequel les deux plans tangents coïncident y aura un point cuspidal, dont* ($M$) *sera la tangente de rebroussement;* 4° *le point sera un point cuspidal de la courbe cuspidale, et la droite* ($M$) *y sera tangente à cette courbe;* 5° $\bar{n}+\bar{d}-2$ *branches de la courbe double résidue*, c'est-à-dire de la courbe qui, avec la droite ($M$) prise $\frac{(\bar{n}+\bar{d})(\bar{n}+\bar{d}-1)}{2}$ fois*) fait la courbe double totale, *seront tangentes à* ($M$) *à ce point singulier*. Nous appellerons les points de cette espèce les *points stationnaires* de la droite multiple, et nous désignerons leur nombre par $\bar{\beta}$.

**5.** À un point *double* ou *cuspidal* de la courbe représentative correspond un point de la droite multiple et un plan par elle qui sont dans le rapport suivant l'un à l'autre: deux des plans tangents au point coïncident dans le plan, et, réciproquement, deux des points de contact du plan coïncident dans le point. Mais il y a la différence que ni le point ni le plan qui correspondent à un point *double* ne mettent la limite aux parties réelles et imaginaires, mais qu'ils le font l'un et l'autre lorsqu'ils correspondent à un point *cuspidal*.

Si la surface est regardée comme lieu de ses points, le point $P$ et le plan [$P$] qui ont les unes ou les autres de ces propriétés seront, en général, un point-pince et un plan stationnaire. Comme chacune des droites qui joignent un des points $M'$ et $M$ à un *point double de la courbe représentative* compte pour deux tangentes menées du point, le point-pince et le plan stationnaire qui y correspondent sont *doubles*: deux points-pinces coïncident dans le point $P$, deux plans stationnaires dans le plan [$P$]. On peut démontrer la première de ces deux coïncidences d'une manière plus directe. En effet, comme le point $P$ est un point-pince, le plan tangent [$P$] qui y correspond a pour section-résidue une courbe dont la tangente au point $P$ est l'axe d'un faisceau de plans qui sont tous tangents à la surface au point $P$. Or, comme le plan [$P$] est stationnaire, sa section résidue est tangente à ($M$) au point $P$. On voit ainsi que les courbes de contact de tous les cônes circonscrits à la surface sont tangentes à ($M$) au point $P$, de façon

---

*) Ce nombre subira des altérations si plusieurs des $\bar{d}$ plans qui sont tangents le long de ($M$) coïncident. Voir au n° suivant.

que deux points-pinces coïncident à ce point. On voit en même temps *que le point $P$ est un des $\overline{d'}$ points où tout plan passant par $(M)$ est tangent à la surface.*

Nous appelerons, par préférence, les points singuliers que nous venons de décrire les *points-pinces doubles* (bien que deux points-pinces puissent coïncider d'autres manières), nous désignerons leur nombre par $\overline{2j} = \overline{2\beta'}$, et nous supposerons que ce nombre est compris, deux fois, à $\overline{j}$ et à $\overline{\beta'}$.

On voit de même que le point-pince et le plan stationnaire qui correspondent à un *point cuspidal* de la courbe représentative sont triples. À un de ces points les courbes de contact de tous les cônes circonscrits à la surface auront un contact triponctuel avec la droite $(M)$ (qui y sera par conséquent tangente stationnaire). *Tout plan passant par $(M)$ sera donc à chacun de ces points plan tangent stationnaire de la surface*, et un de ces points comptera pour deux dans le nombre $\overline{d'}$. Nous désignerons le nombre de ces points que nous appellerons *points-pinces triples* par $\overline{3j} = \overline{3\beta'}$, et nous supposerons que ces nombres soient compris, trois fois, à $\overline{j}$ et à $\overline{\beta'}$.

On a donc en désignant par $\overline{1j}$ les points-pinces simples et par $\overline{1\beta'}$ les plans stationnaires simples:

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{j} = \overline{1j} + 2\,.\,\overline{2j} + 3\,.\,\overline{3j} \\ \overline{\beta'} = \overline{1\beta'} + 2\,.\,\overline{2\beta'} + 3\,.\,\overline{3\beta'} \\ \overline{2j} = \overline{2\beta'} \quad , \quad \overline{3j} = \overline{3\beta'}. \end{cases}$$

*En n'attribuant pas à la droite $(M)$ d'autres points où tout plan par $(M)$ est tangent à la surface que les points-pinces doubles et triples*, on aura encore

$$(2) \qquad \overline{d'} = \overline{2j} + 2\,.\,\overline{3j}\,.$$

Comme pour un point-pince simple, aussi un plan quelconque passant par un point-pince double ou triple aura à ce point un point cuspidal.

Les singularités qui sont réciproques à celles dont nous venons de parler seront 1° un *plan-pince double* suivi d'un point stationnaire double, et 2° un *plan-pince triple* suivi d'un point stationnaire triple. Ces plans et points singuliers, qui correspondent, dans le cas qui est le plus général si la surface est regardée comme enveloppe de plans, à des points doubles et cuspidaux de la courbe représentative, auront les propriétés suivantes:

*Chacun de ces plans-pinces doubles ou triples sera tangente à la surface le long de toute l'étendue de la droite $(M)$, et dans le cas d'un plan-pince triple cette droite en sera une arête cuspidale.* Un cône

circonscrit dont le sommet se trouve dans un plan-pince double ou triple aura ce plan pour plan tangent stationnaire.*)

Nous appliquerons à ces singularités les notations analogues à celles que nous venons d'appliquer aux singularités réciproques, de façon que

$$(3)\qquad \begin{cases} \overline{j'} = \overline{1j'} + 2\,.\,\overline{2j'} + 3\,.\,\overline{3j'} \\ \overline{\beta} = \overline{1\beta} + 2\,.\,\overline{2\beta} + 3\,.\,\overline{3\beta} \\ \overline{2j'} = \overline{2\beta}\quad,\quad \overline{3j'} = \overline{3\beta}\,. \end{cases}$$

*En n'attribuant pas à la surface d'autres plans tangents le long de* $(M)$ *que les plans-pinces doubles et triples*, on aura encore

$$(4)\qquad \overline{d} = \overline{2j'} + 2\,.\,\overline{3j'}.$$

Nous avons dit au n° 4 que $\frac{(\overline{n}+\overline{d})\,(\overline{n}+\overline{d}-1)}{2}$ branches de la courbe double totale de la surface coïncident dans $(M)$; mais au nombre fourni par cette expression, qui est formée dans la supposition que les $\overline{d}$ plans soient distincts l'un de l'autre, appartiendront aussi les $\overline{3j'}$ branches de la courbe *cuspidale* qui coïncident dans $(M)$. Il ne reste donc que $\frac{(\overline{n}+\overline{2j'}+2\,.\,\overline{3j'})\,(\overline{n}+\overline{2j'}+2\,.\,\overline{3j'}-1)}{2} - \overline{3j'}$ branches de la courbe *double* qui coïncident avec $(M)$. — De même, le nombre de nappes de la développable bitangente qui coïncident dans $(M)$ se réduira à $\frac{(\overline{n'}+\overline{2j}+2\,.\,\overline{3j})\,(\overline{n'}+\overline{2j}+2\,.\,\overline{3j}-1)}{2} - \overline{3j}$, pendant que $\overline{3j}$ nappes de l'enveloppe des plans tangents stationnaires coïncident dans $(M)$.

**6.** A côté de ces singularités, qui sont les plus générales, la coïncidence de points-pinces etc. peut aussi produire d'autres points et plans singuliers qui correspondent à des points doubles ou cuspidales de la courbe représentative**); mais nous n'en attribuerons pas à notre surface. Mais il y a d'autres singularités, que nous ne pouvons négliger parce qu'elles sont au nombre de celles que nous avons énumérées au commencement de l'article, qui, sans être produites par ces coïncidences, correspondent à des points doubles et cuspidaux de la courbe représentative. Nous *montrerons, dans ce qui suit*, que les points

---

*) Les équations de l'introduction de cet article ne sont pas immédiatement applicables à des surfaces dont plusieurs points-pinces ou plans-pinces coïncident.

**) Au nombre de ces points seraient ceux au voisinage immédiat desquels la surface présente le même aspect que si les points avaient été de ceux dont nous allons parler maintenant, mais *sans que* la courbe double résidue ou la courbe cuspidale ne passe par eux. Il pourrait y avoir des espèces de plans singuliers doués des propriétés réciproques.

de $(M)$ et les plans par elle où *il n'y a aucune de ces coïncidences* et qui correspondent à des *points doubles* de la courbe représentative, sont en général *les points de contact de deux des nappes passant par* $(M)$ *et leurs plans de contact* (leurs plans tangents communs aux points de contact), et que les points de $(M)$ et les plans par elle où *il n'y a ni aucune des coïncidences* dont nous avons parlé *de points-pinces etc. ni aucune coïncidence d'un point-pince avec un point de contact de deux nappes ni d'un plan-pince avec un plan de contact* et qui correspondent à des *points cuspidaux* de la courbe représentative, sont en général *des points simples de la courbe cuspidale et des plans tangents simples de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface**). Nous désignerons le nombre de points et de plans singuliers de la première de ces deux espèces par $\bar{f}$, et celui de points et de plans singuliers de la seconde espèce par $\bar{i}$. Alors $\bar{f}$ et $\bar{i}$ seront compris respectivement dans les nombres $f$ et $i$ (et à $i' = i$) dont nous avons indiqué la signification au commencement de cet article.

**7.** En résumé, on trouve pour la courbe représentative:

$\overline{1j'} + \overline{1\beta'}$ tangentes qui sortent du point $\bar{n}$-tuple $M$ et dont les points de contact sont différents de $M$;

$\overline{1j} + \overline{1\beta}$ tangentes qui sortent du point $\bar{n'}$-tuple $M'$ et dont les points de contact sont différents de $M'$;

$\overline{2j} + \overline{2j'} + \bar{f}$ points doubles différents de ceux qui coïncident en $M$ et en $M'$;

$\overline{3j} + \overline{3j'} + \bar{i}$ points cuspidaux.

Ainsi, en comptant *toutes* les tangentes par $M$ et $M'$, et en faisant usage de la première relation *Plückerienne*, on trouve pour la classe de cette courbe (qui est de l'ordre $\bar{n} + \bar{n'}$) trois expressions qui doivent être égales. On trouve ainsi, en ayant égard aux formules (1) et (3), les équations suivantes:

$$(5) \quad 2 \,.\, \bar{n} + \bar{j'} + \bar{\beta'} = 2 \,.\, \bar{n'} + \bar{j} + \bar{\beta} = 2 \,.\, \bar{n} \,.\, \bar{n'} - 2 \,.\, \bar{f} - 3 \,.\, \bar{i}.$$

Au lieu de ces équations on peut faire usage des suivantes qui y sont identiques:

---

*) En regardant une section plane par un point de contact de deux nappes, qui y aura un contact de deux branches, et une section plane par un point de simple intersection de $(M)$ avec la courbe cuspidale, qui y aura un point de rebroussement de seconde espèce (produit par la coïncidence d'un point double avec un point cuspidal), et les cônes circonscrits doués des propriétés réciproques, on voit sans difficulté que les points nommés ici et les plans qui y correspondent ont les propriétés que nous venons de leur attribuer; mais ce que nous aurons à démontrer c'est que *ces propriétés n'appartiennent, en général, qu'à ces points et à ces plans.*

$$(6) \qquad \begin{cases} 2 \,.\, \overline{n'}(\overline{n}-1) = \overline{j} + \overline{\beta} + 2 \,.\, \overline{f} + 3 \,.\, \overline{i}\,, \\ 2 \,.\, \overline{n}\,(\overline{n'}-1) = \overline{j'} + \overline{\beta'} + 2 \,.\, \overline{f'} + 3 \,.\, \overline{i'}\,. \end{cases}$$

**8.** A côté des singularités dont nous avons parlé jusqu'ici et qui ont rapport seulement aux nappes passant par la droite multiple, nous aurons aussi égard aux points où la droite multiple rencontre une $(\overline{n}+\overline{d}+1)$-ième nappe de la surface, et aux plans par elle qui ont avec la surface un $(\overline{n'}+\overline{d'}+1)$-ième contact. Nous désignerons par $\overline{t}$ le nombre de ces points $(\overline{n}+\overline{d}+1)$-tuples et par $\overline{t'}$ le nombre des plans tangents $(\overline{n'}+\overline{d'}+1)$-tuples. Nous supposerons que les points et les plans stationnaires ne soient pas compris dans ces nombres.

**9.** *Caractéristiques Plückeriennes de la section résidue d'un plan passant par* ($M$) *et d'un cône circonscrit résidu mené d'un point de* ($M$). — Nous commencerons par déterminer ces caractéristiques dans le cas où $\overline{d}=\overline{d'}=0$ et où, par conséquent, aussi $\overline{2j}=\overline{2j'}=\overline{3j}=\overline{3j'}=0$. La droite ($M$) n'est alors que $\overline{n}$-tuple, et un plan quelconque par elle n'a que $\overline{n'}$ contacts. Alors (voir au n° 1) la courbe où un plan passant par la droite multiple rencontre *encore* la surface, ou la section résidue de ce plan, est de l'ordre $n-\overline{n}$. Elle rencontre la droite multiple 1° aux $\overline{n'}$ points de contact du plan, 2° aux $\overline{t}$ points de rencontre de la droite multiple avec une $(\overline{n}+1)$-ième nappe de la surface, et 3° deux fois à chacun des $\overline{\beta}$ points stationnaires. Par conséquent

$$(7) \qquad n-\overline{n} = \overline{n'} + \overline{t} + 2 \,.\, \overline{\beta}\,.$$

Pour trouver *la classe* de la section résidue, il faut remarquer que le nombre total des tangentes qu'on peut mener d'un point dans un plan quelconque à la section qu'il fait à la surface, est égal à $a$*). Dans le cas actuel $\overline{j}$ de ces tangentes sont les droites qui passent par les points-pinces, et dans chacune des $\overline{n'}$ droites qui passent par les $\overline{n'}$ points de contact de notre plan de section avec la surface coïncident deux tangentes. Ces droites ne sont pas tangentes à la section résidue, et celle-ci ne sera donc que de la classe

$$a - 2 \,.\, \overline{n'} - \overline{j}\,.$$

Une section plane a en général des *points doubles* à tous les $b$ points où son plan rencontre la courbe double totale. Pour la section résidue d'un plan passant par ($M$) il faut soustraire de ce nombre 1° le nombre $\frac{\overline{n}(\overline{n}-1)}{2}$ dû à la droite multiple elle-même, et 2° celui des

*) Voir pour cette notation et pour les autres dont nous allons faire usage ici, l'énumération des notations au commencement de cet article.

points où la courbe double résidue rencontre $(M)$. Il y aura $\bar{n}$ de ces intersections à chacun des $\bar{t}$ points où la droite $(M)$ rencontre une $(\bar{n}+1)$-ième nappe de la surface, $2(\bar{n}-2)$ à chacun des $\bar{\beta}$ points stationnaires, et nous verrons qu'il y en a toujours *une* à chacun des points singuliers dont nous avons désigné le nombre par $\bar{f}$. Afin de n'avancer rien, nous désignons par $X$ le nombre des intersections de $(M)$ avec la courbe double qui se trouvent à ces $\bar{f}$ points. La section résidue sera donc douée de

$$b - \frac{\bar{n}(\bar{n}-1)}{2} - \bar{n}\,.\,\bar{t} - 2(\bar{n}-2)\bar{\beta} - X$$

points doubles.

La section résidue aura de même pour points cuspidaux les points d'intersection de son plan avec la courbe cuspidale de la surface à l'exception de ceux qui sont sur la droite $(M)$. Nous avons montré qu'il y en a *trois* à chacun des $\bar{\beta}$ points stationnaires, et nous supposerons qu'il y en ait $Y$ aux $\bar{i}$ points singuliers dont nous avons parlé au n° 6. Il reste ainsi pour la section résidue

$$c - 3\bar{\beta} - Y$$

points cuspidaux.

La première relation *Plückerienne* nous donne

$$(n-\bar{n})(n-\bar{n}-1) = a - 2\bar{n'} + \bar{j} + 2\left[b - \frac{\bar{n}(\bar{n}-1)}{2} - \bar{n}\,.\,\bar{t} - 2(\bar{n}-2)\bar{\beta} - X\right]$$
$$+ 3(c - 3\bar{\beta} - Y).$$

En en soustrayant l'équation connue

$$n(n-1) = a + 2b + 3c$$

on trouve

$$0 = 2\bar{n}(n - \bar{n} - \bar{t} - 2\bar{\beta}) - 2\bar{n'} - \bar{j} - 2X - \bar{\beta} - 3Y.$$

Cette équation se réduit au moyen de (7) à la suivante

$$2\bar{n'}(\bar{n}-1) = \bar{j} + \bar{\beta} + 2X + 3Y.$$

Or nous avons démontré [la première équation (6)] que

$$2\bar{n'}(\bar{n}-1) = \bar{j} + \bar{\beta} + 2\bar{f} + 3\bar{i},$$

donc

$$2X + 3Y = 2\bar{f} + 3\bar{i}.$$

Les propriétés des différents points singuliers étant indépendantes entre elles, cette équation nous montre que la courbe double résidue passe une fois par chacun des $\bar{f}$ points singuliers, qui seront par conséquent des points de contact de deux nappes, et que la courbe cuspidale passe une fois par chacun des $\bar{i}$ points, comme nous l'avons avancé dans le n° 6. Les nombres des points doubles et cuspidaux de la section résidue deviennent ainsi

$$b - \frac{\bar{n}(\bar{n}-1)}{2} - \bar{n}\,.\,\bar{t} - 2(\bar{n}-2)\,\bar{\beta} - \bar{f}$$

et

$$c - 3\bar{\beta} - \bar{i}\,.$$

Les autres équations de Plücker nous donnent ensuite les nombres des tangentes stationnaires et doubles de la section résidue.

On trouve d'une manière analogue les caractéristiques d'un cône circonscrit résidu mené d'un point de $(M)$, et l'équation suivante qui est analogue à (7)

(8) $$n' - \bar{n}' = \bar{n} + \bar{t}' + 2\,.\,\bar{\beta}'\,.$$

La déduction des caractéristiques du cône résidu donne en même temps la démonstration des propriétés des $\bar{f}$ et des $\bar{i}$ plans singuliers que nous avons avancées dans le n° 6.

On obtient ainsi dans le cas où $\bar{d} = \bar{d}' = \overline{2j} = \overline{2j'} = \overline{3j} = \overline{3j'} = 0$ les valeurs suivantes des

## Caractéristiques Plückeriennes

**de la section résidue d'un plan par $(M)$:**

Ordre: $n - \bar{n}$.

Classe: $a - 2\,.\,\bar{n}' - \bar{j}$.

Nombre de points doubles:

$$b - \frac{\bar{n}(\bar{n}-1)}{2} - \bar{n}\,.\,\bar{t} - 2(\bar{n}-2)\,\bar{\beta} - \bar{f}.$$

Nombre de points stationnaires:

$$c - 3\,.\,\bar{\beta} - \bar{i}\,.$$

Nombre de tangentes stationnaires:

$$\varkappa' - 3\,.\,\bar{\beta} - \bar{i} - 6\,.\,\bar{n}' - 3\,.\,\bar{j} + 3\,.\,\bar{n}\,.$$

Nombre de tangentes doubles $\Big($y compris $\frac{\bar{\beta}(\bar{\beta}-1)}{2}$ fois la droite $(M)\Big)$:

$$\tfrac{1}{2}\big[2\,.\,\delta' - (2\,.\,\bar{n}' + \bar{j})(2a - 2\,.\,\bar{n}' - \bar{j} - 10) - 8\,.\,\bar{n} + 9\,.\,\bar{\beta} + 3\,.\,\bar{i}\big].$$

**du cône circonscrit résidu mené d'un point de $(M)$:**

Classe: $n' - \bar{n}'$.

Ordre: $a - 2\,.\,\bar{n} - \bar{j}'$.

Nombre de plans tangents doubles:

$$b' - \frac{\bar{n}'(\bar{n}'-1)}{2} - \bar{n}'\,.\,\bar{t}' - 2(\bar{n}'-2)\,\bar{\beta}' - \bar{f}.$$

Nombre de plans tangents stationnaires

$$c' - 3\,.\,\bar{\beta}' - \bar{i}\,.$$

Nombre de génératrices stationnaires

$$\varkappa - 3\,.\,\bar{\beta}' - \bar{i} - 6\,.\,\bar{n} - 3\,.\,\bar{j}' + 3\,.\,\bar{n}'.$$

Nombre de génératrices doubles $\Big($y compris $\frac{\bar{\beta}'(\bar{\beta}'-1)}{2}$ fois la droite $(M)\Big)$:

$$\tfrac{1}{2}\big[2\,.\,\delta - (2\,.\,\bar{n} + \bar{j}')(2\,.\,a - 2\,.\,\bar{n} - \bar{j}' - 10) - 8\,.\,\bar{n}' + 9\,.\,\bar{\beta}' + 3\,.\,\bar{i}\big].$$

Les mêmes procédés dont nous avons fait usage ici servent à déterminer les caractéristiques *Plückeriennes* dans les cas où il y a sur la droite $(M)$ des points-pinces doubles etc. Nous avons indiqué dans le n° 1 la valeur que prend alors l'ordre de la section résidue; la forme de l'expression de la classe que nous venons de trouver et celle des équations (7) et (8), ne seront pas altérées par l'introduction des nouvelles singularités. Mais dans la détermination du nombre des points

cuspidaux de la section résidue on rencontre des coefficients qui sont difficiles à déterminer *directement*. J'ai trouvé leurs valeurs au moyen d'une application à un exemple que j'indiquerai dans le mémoire suivant (2me application). — Les résultats qu'on obtient ainsi seront exposés dans le n° 10, où je réunirais pour les renvois les notations et les résultats dont nous aurons à faire usage dans l'article suivant.

**10.** Notations relatives à une droite $(M)$ qui se trouve sur une surface.

$\bar{n}$, nombre des plans tangents à un point de $(M)$ qui ne sont pas tangents le long de toute la droite (n° 1);

$\bar{j} = \overline{1j} + 2 \,.\, \overline{2j} + 3 \,.\, \overline{3j}$, nombre des points-pinces, $\overline{1j}$ étant celui des points-pinces simples (n° 3), $\overline{2j} = \overline{2\beta'}$ celui des points-pinces doubles (n° 5), $\overline{3j} = \overline{3\beta'}$ celui des points-pinces triples (n° 5);

$\bar{\beta} = \overline{1\beta} + 2 \,.\, \overline{2\beta} + 3 \,.\, \overline{3\beta}$, nombre des points stationnaires, $\overline{1\beta}$ étant celui des points stationnaires simples (n° 4);

$\bar{t}$, nombre des points $(\bar{n} + \overline{2j'} + 2 \,.\, \overline{3j'} + 1)$-tuples, non compris les points stationnaires (n° 8);

$\overline{n'}$, nombre des points de contact d'un plan par $(M)$ qui ne sont pas des points de contact de tout plan par la droite (n° 1);

$\overline{j'} = \overline{1j'} + 2 \,.\, \overline{2j'} + 3 \,.\, \overline{3j'}$, nombre des plans-pinces, $\overline{1j'}$ étant celui des plans-pinces simples (n° 3), $\overline{2j'} = \overline{2\beta}$ celui des plans-pinces doubles (n° 5), $\overline{3j'} = \overline{3\beta}$ celui des plans-pinces triples (n° 5);

$\overline{\beta'} = \overline{1\beta'} + 2 \,.\, \overline{2\beta'} + 3 \,.\, \overline{3\beta'}$, nombre des plans stationnaires, $\overline{1\beta'}$ étant celui des plans stationnaires simples (n° 4);

$\overline{t'}$, nombre des plans tangents $(\overline{n'} + \overline{2j} + 2 \,.\, \overline{3j} + 1)$-tuples, non compris les plans stationnaires (n° 8);

$\bar{f}$, nombre de contacts de deux nappes passant par $(M)$ (n° 6);

$\bar{i}$, nombre de points d'intersection simples avec la courbe cuspidale résidue (n° 6).

de plans tangents simples de l'enveloppe résidue des plans tangents stationnaires (n° 6).

Equations indépendantes entre elles:

$$2 \,.\, \bar{n} + \overline{j'} + \overline{\beta'} = 2 \,.\, \overline{n'} + \bar{j} + \bar{\beta} = 2 \,.\, \bar{n} \,.\, \overline{n'} - 2\bar{f} - 3 \,.\, \bar{i} \tag{5}$$

$$n = \bar{n} + \overline{n'} + \bar{t} + 2 \,.\, \bar{\beta} \tag{7}$$

$$n' = \overline{n'} + \bar{n} + \overline{t'} + 2 \,.\, \overline{\beta'}. \tag{8}$$

Caractéristiques Plückeriennes (n° 9)

de la section résidue d'un plan par $(M)$:

Ordre: $n - \bar{n} - \overline{2j'} - 2 \,.\, \overline{3j'}$,

Classe: $a - 2\overline{n'} - \bar{j}$,

Nombre de points stationnaires:

$c - 3 \,.\, \bar{\beta} - \bar{i} - 2 \,.\, \overline{2j'} - 4 \,.\, \overline{3j'}$.

du cône circonscrit résidu mené d'un point de $(M)$:

Classe: $n' - \overline{n'} - \overline{2j} - 2 \,.\, \overline{3j}$,

Ordre: $a - 2\bar{n} - \overline{j'}$,

Nombre de plans tangents stationnaires:

$c' - 3 \,.\, \overline{\beta'} - \bar{i} - 2 \,.\, \overline{2j} - 4 \,.\, \overline{3j}$.

La déduction des équations (5) nous montre qu'elles sont aussi applicables au cas où la surface est douée d'un point conique ($\mu$-tuple) sur $(\bar{M})$ dont le cône tangent a $(M)$ pour génératrice $n$-tuple, ou de la singularité réciproque. Les caractéristiques Plückeriennes subiront dans ces cas des altérations, mais les expressions que nous venons d'en donner montreront toujours quelle sera l'influence des points et des plans singuliers dont nous avons rendu compte dans cet article. La même chose aura lieu pour les équations (7) et (8).

**11.** *Note.* Nous avons vu que le plan tangent de la surface à un point de simple intersection d'une droite double (multiple) d'une surface avec sa courbe cuspidale, est aussi plan tangent simple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface, et qu'il a par conséquent la singularité réciproque à celle de son point de contact, et réciproquement. Il n'y a aucune raison *particulière* pourquoi cette propriété appartiendrait à un point d'intersection de la courbe cuspidale avec une *droite* multiple plus qu'à son point d'intersection avec une *courbe* double. Par conséquent, *le plan tangent d'une surface à un des i points d'intersection de sa courbe double avec sa courbe cuspidale qui n'ont aucune singularité ultérieure, a lui-même la singularité réciproque à celle de son point de contact, et réciproquement.* Nous ne nous arrêterons pas à une démonstration directe de ce fait, d'où résulte pour une surface algébrique quelconque l'équation

$$i = i'.$$

Cette équation sera confirmée dans l'article suivant (3me application).

**12.** *Applications.* Les quatre équations (5), (7) et (8) servent à déterminer les nombres caractéristiques $\bar{n}$, $\bar{n}'$, $\bar{j}$ etc., lorsqu'on en connaît un nombre suffisant. Comme on sait que tous ces nombres caractéristiques doivent être entiers et positifs, le nombre des quantités inconnues peut en beaucoup de cas dépasser quatre. Au cas, par exemple, où $\bar{n} = 1$ l'équation

$$2\bar{n}'(\bar{n} - 1) = \bar{j} + \bar{\beta} + 2 \,.\, \bar{f} + 3 \,.\, \bar{i}$$

montre que $\bar{j} = \bar{\beta} = \bar{f} = \bar{i} = 0$.

Nous ne nous arrêterons pas à reproduire, au moyen de nos équations, des propriétés connues des droites d'une surface du troisième ordre ou d'une surface du quatrième ordre douée d'une seule droite double*). Nous nous bornerons, pour montrer l'usage de nos résultats, à les appliquer au cas d'une surface du quatrième ordre douée de deux droites

*) Cette dernière surface est discutée dans le mémoire de M. Clebsch: Ueber Ababildungenlgebraischer Flächen; Mathematische Annalen I, p. 280.

doubles $(M_1)$ et $(M_2)$ qui se rencontrent à un point $A$. Nous supposerons que cette surface regardée comme lieu de ses points soit de la nature la plus générale: qu'elle ne soit pas réglée, qu'il n'y ait aucun plan tangent à elle le long d'une droite, et qu'elle ne contienne pas d'autres courbes doubles ou cuspidales que $(M_1)$ et $(M_2)$ ni aucun point conique ou point-pince double.

Alors on a pour toutes les droites de la surface:

$$\bar{j}' = \bar{\beta} = \bar{i} = \overline{2j} = \overline{3j} = 0\,.$$

Commençons par appliquer nos formules à une des droites doubles, par exemple à $(M_1)$. Alors, comme le point $A$ est un point double de la courbe double, nous avons encore

$$\bar{n} = 2, \quad \bar{t} = 0, \quad \bar{f} = 1,$$

et, comme $n = 4$, les équations (5) et (7) nous donnent

$$\bar{n}' = 2, \quad \bar{j} = 2, \quad \bar{\beta}' = 2\,.$$

Nous ne pourrons faire usage de l'équation (8) qu'après avoir déterminé la classe $n'$ de la surface. On voit, en appliquant une relation *Plückerienne* à un cône circonscrit à la surface*), que

$$n' = a\,(a-1) - 2\delta - 3\varkappa\,.$$

$a$ est la classe d'une section plane, qui est du quatrième ordre et douée de points doubles à ses points d'intersection avec $(M_1)$ et $(M_2)$. Par conséquent

$$a = 12 - 4 = 8\,.$$

$\delta$ et $\varkappa$ pourraient être trouvés au moyen des équations (VIII) et (IX) au commencement de cet article; mais on peut aussi appliquer à leur recherche les résultats que nous venons de trouver, en observant qu'un cône circonscrit résidu a la droite $(M_1)$ pour génératrice double $\left(\frac{\bar{\beta}'(\bar{\beta}'-1)}{2}\text{-tuple}\right)$, et qu'il n'a pas d'autres génératrices doubles ou stationnaires. En effet, s'il y en avait, elles rencontreraient la surface en 6 ou 5 points (2 au sommet et 4 ou 3 aux points de contact) et se trouveraient donc en entier sur elle, ce qui est impossible parce que le sommet est un point quelconque de $(M_1)$ et que la surface n'est pas réglée. On trouve donc, en égalant à l'unité l'expression du nombre des génératrices doubles, et à zéro celle du nombre des génératrices stationnaires d'un cône résidu:

*) Comparer les formules (II) au commencemnet de cet article.

$$2\delta = (2\bar{n} + \bar{j}')(2a - 2\bar{n} - \bar{j} - 10) + 8\bar{n}' - 9\bar{\beta}' - 3\bar{i} + 2 = 8,$$

$$\varkappa = 3\bar{\beta}' + \bar{i} + 6\bar{n} + 3\bar{j} - 3\bar{n}' = 12.$$

En substituant ces valeurs on voit que

$$n' = 12.$$

Puis l'équation (8) nous donne

$$\bar{t}' = 4.$$

La section résidue faite par un plan passant par $(M_1)$ est une conique, et sera composée de deux droites au cas où le plan a un troisième contact avec la surface. Le plan joignant $(M_1)$ à l'autre droite double $(M_2)$ n'est pas au nombre de ces $\bar{t}'$ plans tangents triples; car il n'a que deux contacts réunis au point d'intersection $A$. On voit ainsi que $(M_1)$ rencontre quatre couples de droites et que les droites d'une même couple se trouvent dans un même plan passant par $(M_1)$. Aucune de ces droites ne peut rencontrer $(M_2)$, ne pouvant ni passer par $A$, qui n'est qu'un point double, ni se trouver dans le plan $[(M_1)(M_2)]$, dont la courbe d'intersection avec la surface se réduit aux deux droites doubles. Il y aura donc *quatre autres couples de droites qui rencontrent* $(M_2)$. Comme une droite de la surface doit rencontrer le plan $[(M_1)(M_2)]$ ou à un point de $(M_1)$ ou à un point de $(M_2)$, *ces* 16 *droites seront les seules droites simples de la surface.*

Regardons maintenant les singularités qui ont rapport à une des 8 droites qui rencontrent $(M_1)$. Nous l'appellerons $(B_1)$. On a alors

$$\bar{n} = 1, \quad \bar{t} = 1, \quad \bar{j} = 0,$$

et, comme $n = 4$, $n' = 12$, $\bar{j} = \bar{\beta} = \bar{i} = 0$, on trouve au moyen des équations (5), (7) et (8)

$$\bar{n}' = 2, \quad \bar{j} = 0, \quad \bar{\beta}' = 2, \quad \bar{t}' = 5.$$

Un des 5 plans tangents triples $\big((\bar{n}' + 1)\text{-tuples}\big)$ qu'on trouve ainsi sera celui qui joint $(B_1)$ à la droite de la même couple et à la droite double $(M_1)$. La section résidue d'un plan par $(B_1)$, étant en général du troisième ordre et douée d'un point double, se résoudra dans les autres 4 cas où le plan a un troisième contact en une conique et une droite. $(B_1)$ rencontre donc 4 des 8 droites qui rencontrent la droite double $(M_2)$. Comme $(B_1)$ ne peut rencontrer deux droites d'une même couple, *il y aura dans chacune des quatre couples qui rencontrent* $(M_2)$ *une droite qui rencontre* $(B_1)$. On trouve ainsi la distribution suivante des droites simples de la surface $(B_1)$, $(B_1')$, $(B_2)$ etc.:

$(M_1)$ rencontre les couples $(B_1)$, $(B_1')$; $(C_1)$, $(C_1')$; $(D_1)$, $(D_1')$; $(E_1)$, $(E_1')$
$(M_2)$ rencontre les couples $(B_2)$, $(B_2')$; $(C_2)$, $(C_2')$; $(D_2)$, $(D_2')$; $(E_2)$, $(E_2')$

$(B_1)$ rencontre les droites $(B_2')$, $(C_2)$, $(D_2)$, $(E_2)$ et $(B_1')$
$(B_1')$ rencontre les droites $(B_2)$, $(C_2')$, $(D_2')$, $(E_2')$ et $(B_1)$
$(C_1)$ rencontre les droites $(B_2)$, $(C_2')$, $(D_2)$, $(E_2)$ et $(C_1')$
$(C_1')$ rencontre les droites $(B_2')$, $(C_2)$, $(D_2')$, $(E_2')$ et $(C_1)$
$(D_1)$ rencontre les droites $(B_2)$, $(C_2)$, $(D_2')$, $(E_2)$ et $(D_1')$
$(D_1')$ rencontre les droites $(B_2')$, $(C_2')$, $(D_2)$, $(E_2')$ et $(D_1)$
$(E_1)$ rencontre les droites $(B_2)$, $(C_2)$, $(D_2)$, $(E_2')$ et $(E_1')$
$(E_1')$ rencontre les droites $(B_2')$, $(C_2')$, $(D_2')$, $(E_2)$ et $(E_1)$.

De même

$(B_2)$ rencontre les droites $(B_1')$, $(C_1)$, $(D_1)$, $(E_1)$ et $(B_2')$ etc.

# Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

## I.

### Remarques préliminaires*).

**1.** Nous appellerons les deux surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$, et nous donnerons aux nombres de leurs singularités les notations indiquées au commencement du précédent article, en y ajoutant seulement, pour distinguer celles des deux surfaces, les suffixes 1 et 2. Nous désignerons encore par $p_1$ et $p_2$ les genres des sections planes de $[F_1]$ et de $[F_2]$, de façon que pour chacune des surfaces

(1) $$2(p-1) = n(n-3) - 2b - 2c = a + c - 2n.$$

**2.** Aux deux points de l'une des surfaces qui coïncident dans un même point de sa courbe double, correspondent en général, sur l'autre surface, deux points différents, et le lieu de ces points est une courbe qui correspond à la courbe double. Nous désignerons la courbe double de $[F_1]$ par $(B_1)$, la courbe qui y correspond sur $[F_2]$ par $(B_{1,2})$ et l'ordre de cette dernière courbe par $b_{1,2}$, et nous appliquerons les notations analogues $(B_{2,1})$ et $b_{2,1}$ à la courbe de $[F_1]$ qui correspond à la courbe double $(B_2)$ de $[F_2]$. — S'il y a sur les deux surfaces des courbes doubles qui se correspondent, deux branches de la courbe $(B_{1,2})$ coïncideront dans l'une et deux branches de $(B_{2,1})$ coïncideront dans l'autre de ces deux courbes doubles correspondantes.

**3.** *Courbes cuspidales* (3 — 5). A une courbe cuspidale de l'une des surfaces peut correspondre sur l'autre ou une *courbe simple* ou une *courbe cuspidale*, mais *nous supposerons que seulement le premier de ces deux cas a lieu* pour nos surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$, et nous désignerons

*) Nous renvoyons pour une partie de ces remarques préliminaires aux démonstrations analytiques dans un mémoire de Mr. Nöther, Mathematische Annalen, 2. Bd. 294 – 298.

par $(C_{1,2})$ la courbe simple de $[F_2]$ qui correspond à la courbe cuspidale $(C_1)$ de $[F_1]$, et par $(C_{2,1})$ la courbe simple de $[F_1]$ qui correspond à la courbe cuspidale $(C_2)$ de $[F_2]$. Les ordres de ces deux courbes seront nommés $c_{1,2}$ et $c_{2,1}$.

Pour nous rendre compte des propriétés de la surface $[F_2]$ à un point de $(C_{1,2})$, nous regarderons la courbe cuspidale $(C_1)$ à laquelle elle correspond comme limite d'une courbe double $(B_1)$. Si nous désignerons par $P_{1,2}$ et $P'_{1,2}$ les deux points de la courbe correspondante $(B_{1,2})$ qui correspondent aux deux points de $[F_1]$ qui se trouvent dans un même point $P_1$ de la courbe double $(B_1)$, on voit qu'une courbe sur $[F_2]$ qui passe par tous les deux points $P_{1,2}$ et $P'_{1,2}$ correspond à une courbe sur $[F_1]$ qui a $P_1$ pour point double, mais que les courbes sur $[F_2]$ qui passent seulement par un des points $P_{1,2}$ et $P'_{1,2}$ correspondent à des courbes dont une seule branche passe par $P_1$. Si la courbe double $(B_1)$ tend à devenir cuspidale, les points $P_{1,2}$ et $P'_{1,2}$ tendront à coïncider. La courbe $(C_{1,2})$ qui correspond à la courbe cuspidale $(C_1)$ sera donc la limite de deux branches coïncidentes de $(B_{1,2})$, et comme la droite $(P_{1,2}P'_{1,2})$ qui joignait les deux points de $(B_{1,2})$ qui correspondaient à un même point de $(B_1)$ doit avoir une limite déterminée, il y aura par chaque point $P_{1,2}$ de $(C_{1,2})$ une direction qui joint les deux points infiniment voisins qui correspondent à un *même* point de la courbe cuspidale $(C_1)$. Les autres directions par $P_{1,2}$ joignent seulement des points des deux branches de $(B_{1,2})$, coïncidant dans $(C_{1,2})$, qui correspondent à des points de $(C_1)$ *infiniment voisins* l'un de l'autre. À une courbe sur $[F_2]$ qui à $P_{1,2}$ est *tangente à la première direction* $(P_{1,2}P'_{1,2})$ correspond sur $[F_1]$ une courbe *douée d'un point cuspidal* au point $P_1$; mais aux autres courbes qui sur $[F_2]$ passent par $P_{1,2}$ correspondent des *courbes tangentes à* $(C_1)$.

4. En regardant une courbe sur $[F_2]$ tangente à $(P_{1,2}P'_{1,2})$ et la courbe correspondante sur $[F_1]$, on voit que les parties de $[F_2]$ qui se trouvent des deux côtés de $(C_{1,2})$ correspondent respectivement aux deux nappes de $[F_1]$ qui sont réunies à la courbe cuspidale $(C_1)$, et que, par conséquent, aussi les courbes par $P_1$ et sur $[F_1]$ dont les correspondantes ne sont pas tangentes à $(P_{1,2}P'_{1,2})$, passent en général de l'une des deux nappes à l'autre*). Une courbe par $P_1$ et sur $[F_1]$ ne reste sur la même nappe que dans le cas où la correspondante sur

*) En général, une courbe qui se trouve sur une surface douée d'une courbe cuspidale $(C)$, passe de l'une des nappes à l'autre au cas où elle a un contact *biponctuel* avec $(C)$, et reste sur la même nappe au cas d'un contact *quatreponctuel*, ce qu'on peut prouver ou directement ou au moyen de la représentation dont nous nous occupons.

$[F_2]$ est tangente à $(C_{1,2})$ — ou a $P_{1,2}$ pour point cuspidal, — et alors elle aura avec $(C_1)$ un contact *quatreponctuel.*

Ces considérations nous montrent que les courbes sur $[F_1]$ qui passent par $P_1$, ont, au moins, un *contact triponctuel* (osculation) *avec une surface qui est tangente à* $[F_1]$ *le long de la courbe cuspidale* $(C_1)$ ou qui seulement au point $P_1$ est osculatrice à $(C_1)$ et tangente à $[F_1]$. Désignons par $[G]$ une surface satisfaisant à ces conditions.

5. A l'exception des courbes tangentes à la direction particulière $(P_{1,2}\,P'_{1,2})$, toute courbe par le point $P_{1,2}$ et sur $[F_2]$ a donc pour correspondante sur $[F_1]$ une courbe tangente à $(C_1)$ à un même point $P_1$ et osculatrice à la surface $[G]$. Les deux courbes sur $[F_1]$ qui correspondent à deux courbes par $P_{1,2}$ auront donc, en général, deux points communs coïncidant au point $P_1$. Elles en auront un troisième au cas où les deux courbes sur $[F_2]$ se touchent à $P_{1,2}$. Par conséquent, à deux courbes sur $[F_2]$ qui ont un contact au point $P_{1,2}$, correspondent sur $[F_1]$ deux courbes qui ont au point $P_1$ le même plan osculateur. — La proposition réciproque ne serait pas vraie; car bien que deux courbes sur $[F_1]$ qui ont au point $P_1$ le même plan osculateur aient aussi la même courbure (celle de la section faite par le plan osculateur à la surface $[G]$), et qu'elles aient par conséquent trois points communs coïncidents au lieu de deux, le troisième peut sur les deux courbes appartenir à des nappes différentes. On voit donc que les courbes par $P_1$ et sur $[F_1]$ qui ont le même plan osculateur, n'ont pour correspondantes des courbes tangentes à une même direction par $P_{1,2}$ que dans le cas où leurs arcs situés du même côté de $P_1$ se trouvent sur la même nappe. Par conséquent, les courbes sur $[F_2]$ dont les correspondantes ont le même plan osculateur au point $P_1$, sont tangentes à l'une ou à l'autre de *deux* directions par $P_{1,2}$. Le faisceau formé par ces couples de directions est en *involution.*

Les directions d'une même couple ne coïncident que dans les cas où le plan osculateur, qui passe toujours par la tangente de la courbe cuspidale $(C_1)$ au point $P_1$, y est *ou* osculateur à la courbe $(C_1)$ *ou* tangent à la surface $[F_1]$. Elles coïncident au premier cas avec la tangente à la courbe $(C_{1,2})$ et, au second, avec la direction particulière $(P_{1,2}\,P'_{1,2})$*).

En appliquant ces considérations à une *section plane faite à la surface* $[F_1]$ *par un plan passant par la tangente de la courbe* $(C_1)$ *au*

*) Ces propriétés subiront des altérations lorsque le plan tangent de $[F_1]$ au point $P_1$ est aussi osculateur à la courbe $(C_1)$. Alors les différentes directions par $P_{1,2}$ correspondront aux différentes courbures des courbes sur $[F_1]$, qui auront le même plan osculateur. — Un autre cas exceptionnel se présentera lorsque le point $P_{1,2}$ est un des points, dits fondamentaux, dont nous allons parler dans le nº 6. Alors toutes les courbes par $P_1$ et sur $[F_1]$ auront pour correspondantes des courbes ayant une tangente commune au point $P_{1,2}$.

*point* $P_1$, on voit que *la courbe correspondante sur* $[F_2]$ *a, en général, un point double au point* $P_{1,2}$, que *ce point double devient cuspidal au cas où le plan est osculateur à* $(C_1)$ *ou tangent à* $[F_1]$, et que *dans ces cas la tangente au point cuspidal est tangente, respectivement, à la courbe* $(C_{1,2})$ *ou à la direction* $(P_{1,2}\,P'_{1,2})$.

Il va sans dire que la surface $[F_1]$ a, à un point de $(C_{2,1})$, des propriétés analogues à celles de $[F_2]$ à un point de $(C_{1,2})$.

**6.** *Points fondamentaux* (6—7). Il y aura en général sur les deux surfaces des points dont les homologues restent indéterminés, de façon que tous les points d'une courbe correspondent à un de ces points. On les appelle *les points fondamentaux* ou principaux. Tout point dont on trouve plus d'un point correspondant doit être un point fondamental. A un point infiniment voisin d'un point fondamental correspond un point infiniment voisin de la courbe correspondante. Comme le point infiniment voisin détermine une direction par le point fondamental, les directions par ce point correspondent aux points de la courbe correspondante. A une courbe $(T_1)$ qui sur une des surfaces $[F_1]$ passe $\lambda$ fois par un de ses points fondamentaux $D_1$, correspond sur l'autre surface $[F_2]$ une courbe composée de la courbe $(D_{1,2})$ qui correspond au point fondamental et d'une autre courbe $(T_{1,2})$ qui rencontre $(D_{1,2})$ aux $\lambda$ points correspondant aux directions des tangentes de $(T_1)$ au point $D_1$. Tout autre point de rencontre de $(D_{1,2})$ et de $(T_{1,2})$ sera — à moins que l'intersection ne soit due seulement à une multiplicité de $[F_2]$ à ce point — un point fondamental de $[F_2]$; car il correspond à la fois à $D_1$ et à un autre point de $[F_1]$.

Les tangentes d'une surface à un point fondamental forment un plan tangent si le point est simple, et un cône s'il est conique. Il faut dans le premier cas que la courbe correspondante de l'autre surface, dont les points correspondent aux directions des tangentes au point fondamental, soit du genre zéro, et dans le second, qu'elle soit du même genre que le cône tangent.

**7.** Afin de ne pas étendre trop nos recherches nous supposerons qu'il n'y ait sur aucune des deux surfaces *aucun point fondamental doué d'une direction fondamentale*, c'est-à-dire un point où toutes les courbes dont les correspondantes rencontrent une courbe fixe sur l'autre surface, sont tangentes à une même direction. *Cette restriction nous défendra d'attribuer aux cônes tangents aux points fondamentaux coniques d'autres génératrices doubles ou cuspidales que* 1° *celles qui y sont tangentes à la courbe double ou cuspidale, et* 2° *celles qui correspondent à des points doubles ou cuspidaux de la courbe correspondant au point fondamental**).

---

*) En effet, dans la direction d'une génératrice double du cône tangent à un point multiple qui n'est pas tangente à la courbe double, il n'y a qu'un *seul* point

Nous *commencerons par supposer que tous les points coniques des surfaces soient fondamentaux*, et nous montrerons après que les résultats obtenus s'appliquent aussi à des cas où il y a sur les deux surfaces des points coniques qui se correspondent. De l'autre côté, nous *appliquerons les notations* $\mu$, $\nu$, $y$, $\eta$, $z$, $\zeta$ non seulement aux points coniques, mais aussi *aux points fondamentaux simples* ($\mu = 1$, $\nu =$ etc. $= 0$). Nous supposerons qu'il n'y ait *aucun point fondamental qui se trouve à un point-pince ou à un point non-conique d'une courbe cuspidale**). Pour le moment nous supposerons encore que les surfaces *ne soient pas douées de points-clos* ($\chi = 0$).

Nous *désignerons* par $\mu_{1,2}$ l'ordre et par $\nu_{1,2}$ la classe de la courbe $(D_{1,2})$ qui sur $[F_2]$ correspond à un point fondamental $D_1$ de $[F_1]$; la courbe $(D_{1,2})$ a, suivant les suppositions déjà faites, $\eta_1$ points doubles et $\zeta_1$ points cuspidaux correspondant aux génératrices doubles et cuspidales du cône tangent au point $D_1$ qui ne sont pas tangentes à la courbe double et à la courbe cuspidale, et nous lui attribuerons *encore* $y_{1,2}$ points doubles, apparents et propres, et $z_{1,2}$ points cuspidaux**). Alors on a, en désignant encore par $\pi_1$ le genre commun au cône tangent à $D_1$ et à la courbe $(D_{1,2})$, les équations suivantes (où l'équation (V) de l'introduction du précédent article est renfermée)

$$(2)\quad \begin{cases} 2(\pi_1 - 1) = \nu_1 + z_1 + \zeta_1 - 2\mu_1 = \mu_1(\mu_1 - 3) - 2(y_1 + \eta_1 + z_1 + \zeta_1) \\ \qquad = \nu_{1,2} + z_{1,2} + \zeta_1 - 2\mu_{1,2} = \mu_{1,2}(\mu_{1,2} - 3) - 2(y_{1,2} + \eta_1 + z_{1,2} + \zeta_1). \end{cases}$$

Les caractéristiques Plückeriennes de la courbe $(D_{2,1})$ qui sur $[F_1]$ correspond à un point fondamental $D_2$ de $[F_2]$ seront désignées de la manière analogue; elles satisfont aux équations analogues aux équations (2).

---

consécutif. Par conséquent, si dans le cas où le point conique est fondamental, deux points distincts de sa courbe correspondante correspondaient aux génératrices du cône tangent qui coïncident dans la génératrice double, l'unique point consécutif dans cette direction aurait deux points correspondants et serait donc un nouveau point fondamental coïncidant avec le premier, et la direction deviendrait fondamentale. Le cas d'une génératrice cuspidale peut être regardée comme une limite de celui d'une génératrice double.

On pourrait, du reste, obtenir les mêmes résultats par une continuation des procédés analytiques de M. Nöther. (Voir la première note du présent article.)

*) On peut regarder séparément les deux nappes qui passent par les points de la courbe double, tant que les points de la surface qui y coïncident ne sont pas *consécutifs*. (Aux points-pinces et aux points d'intersection avec la courbe cuspidale les points coïncidents sont consécutifs.) Un de deux points coïncidents, mais non pas consécutifs, peut être fondamental; s'ils le sont tous deux, on a seulement deux points fondamentaux simples.

**) Les points doubles propres de $(D_{1,2})$ qui ne sont pas au nombre des $\eta_1$ que nous venons de nommer et les $z_{1,2}$ points cuspidaux, se trouvent *ou* aux points fondamentaux de $[F_2]$ *ou* sur sa courbe double et sa courbe cuspidale.

**8.** A une courbe sur l'une des deux surfaces (dont aucune partie continue ne correspond à un point fondamental de l'autre surface et qui ne passe pas elle-même par un point fondamental), correspond une courbe qui est du même *genre*, parce que les points des deux courbes se correspondent un-à-un.

A chaque intersection de deux courbes sur l'une des surfaces qui n'est pas due à une multiplicité de cette surface au point d'intersection et qui n'a pas lieu à un point fondamental, correspond sur l'autre surface une intersection des deux courbes correspondantes. Lorsque deux des points d'intersection situés sur l'une des surfaces coïncident, la même chose doit avoir lieu pour deux points d'intersection des deux courbes correspondantes. On en conclut que les points de contacts et les points doubles et cuspidaux des courbes de l'une des surfaces qui se trouvent à des points simples et non-fondamentaux, ont pour correspondants des points de contact et des points doubles et cuspidaux des courbes correspondantes sur l'autre surface.

## II.

## Propriétés des courbes qui sur l'une des deux surfaces correspondent à des sections planes de l'autre.

**9.** *L'ordre* $s$ d'une courbe $(S_1)$ qui sur la surface $[F_1]$ correspond à une section plane de $[F_2]$, est égal au nombre des points où elle rencontre une section plane de $[F_1]$. $s$ est donc le nombre des points d'une section plane de l'une des surfaces dont les correspondants se trouvent sur une section plane de l'autre. On voit ainsi que *l'ordre $s$ d'une courbe $(S_1)$ est égal à celui d'une courbe $(S_2)$ qui sur $[F_2]$ correspond à une section plane de $[F_1]$.*

**10.** Nous *désignons* par $r_{s,1}$ la classe de la courbe $(S_1)$, par $n_{s,1}$ le nombre des plans osculateurs à elle qui sortent d'un point quelconque, et par $h_{s,1}$ le nombre des génératrices doubles d'un cône qui la projette d'un sommet quelconque. Les remarques préliminaires nous montrent qu'*elle n'est pas*, en général, *douée de points cuspidaux*, et qu'elle passe $\mu_{1,2}$ fois par un point fondamental, $\mu_{1,2}$ ayant la signification indiquée au nº 7. Les points fondamentaux comptent donc dans le nombre $h_{s,1}$ pour $\Sigma \frac{\mu_{1,2}(\mu_{1,2}-1)}{2}$, où la somme $\Sigma$ est étendue à tous les points fondamentaux de $[F_1]$.

Comme le genre de $(S_1)$ est égal à celui d'une section plane de $[F_2]$, que nous avons appelé $p_2$, on trouve, en appliquant les formules de Plücker et de Clebsch à un cône qui projette $(S_1)$, les expressions suivantes:

$$(3_a)\qquad \begin{cases} r_{s,1} = 2(p_2 - 1) + 2s, \\ 2h_{s,1} = s(s-3) - 2(p_2 - 1), \\ n_{s,1} = 6(p_2 - 1) + 3s. \end{cases}$$

On trouve de même en appliquant les notations analogues à une courbe $(S_2)$ qui sur $[F_2]$ correspond à une section plane de $[F_1]$,

$$(3_b)\qquad \begin{cases} r_{s,2} = 2(p_1 - 1) + 2s, \\ 2h_{s,2} = s(s-3) - 2(p_1 - 1), \\ n_{s,2} = 6(p_1 - 1) + 3s. \end{cases}$$

**11.** Comme toute courbe $(S_1)$ passe $\mu_{1,2}$ fois par un point fondamental de $[F_1]$, deux courbes $(S_1)$ se rencontrent $\Sigma(\mu_{1,2}^2)$ fois aux points fondamentaux. Elles se rencontrent encore aux points correspondant aux $n_2$ intersections des deux sections planes de $[F_2]$ qui correspondent aux deux courbes $(S_1)$. Deux courbes $(S_1)$ se rencontrent donc, en géneral, en

$$\Sigma(\mu_{1,2}^2) + n_2$$

points, et à ce nombre s'ajoute seulement en des cas particuliers des intersections „*impropres*" à des points de la courbe double ou cuspidale de $[F_1]$.*)

On trouve de même que deux courbes $(S_2)$ ont, en général,

$$\Sigma(\mu_{2,1}^2) + n_1$$

intersections.

**12.** Les deux cônes qui d'un même sommet $O$ projettent deux courbes $(S_1)$, étant de l'ordre $s$, auront $s^2$ génératrices communes. À ce nombre appartiennent les droites qui joignent $O$ aux $\Sigma(\mu_{1,2}^2) + n_2$ points d'intersection des deux courbes $(S_1)$, et, dans le cas où les deux courbes sont infiniment voisines, on peut aussi trouver une expression du nombre de leurs intersections *apparentes*, qu'il faut y ajouter pour avoir celui de toutes les génératrices communes. En égalant celui-ci à $s^2$, on trouve une équation à laquelle doivent satisfaire les nombres qui caractérisent les deux surfaces et les rapports de l'une à l'autre.

Le nombre des intersections apparentes de deux courbes $(S_1)$ infiniment voisines l'une de l'autre, sera composé 1$^0$ de celui des

$$\left[h_{s,1} - \Sigma\left(\frac{\mu_{1,2}(\mu_{1,2}-1)}{2}\right)\right]$$

points doubles apparents**) de l'une de ces courbes pris *deux fois*, et

---

*) On voit que les mots „intersections *impropres*" et „intersections *apparentes*" ont des significations différentes. Le nombre des intersections *apparentes* de deux courbes est celui des droites qui d'un même sommet projettent à la fois des points des deux courbes qui ne coïncident pas dans un point d'intersection.

**) Y compris les points doubles *impropres* s'il y a des courbes doubles qui se correspondent.

2º de celui des génératrices de contact d'un cône $[O(S_1)]$, projetant une courbe $(S_1)$, avec le cône enveloppe de la serie des cônes qui projettent toutes les courbes $(S_1)$ qui correspondent à un faisceau de sections planes de $[F_2]$. Ce cône enveloppe se compose 1º du cône circonscrit à la surface $[F_1]$, et 2º du cône projetant la courbe cuspidale $(C_1)$ de cette surface.

Pour trouver le nombre de contacts d'un cône $[O(S_1)]$ avec le cône circonscrit à $[F_1]$ mené du même sommet $O$, on fait usage de *la première polaire de O par rapport à* $[F_1]$, qui est une surface de l'ordre $n_1 - 1$, passant par la courbe de contact $(A_1)$ du cône circonscrit, par la courbe double $(B_1)$ et par la courbe cuspidale $(C_1)$ de la surface $[F_1]$, tangente à elle le long de cette dernière courbe, et ayant pour $(\mu_1 - 1)$-tuple tout point $\mu_1$-tuple de la surface donnée $[F_1]$. Cette polaire rencontre la courbe $(S_1)$ à $s(n_1 - 1)$ points dont les $\Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1 - 1)]$ sont aux points fondamentaux. Les autres sont les points (non-fondamentaux) où $(S_1)$ rencontre les courbes $(A_1)$, $(B_1)$ et $(C_1)$. Les points d'intersection avec la courbe de contact $(A_1)$ déterminent les génératrices cherchées le long desquelles le cône $[O(S_1)]$ est tangent au cône circonscrit $[O(A_1)]$. Les points d'intersection avec la courbe $(B_1)$ correspondent aux points d'intersection d'une section plane de la surface $[F_2]$ avec la courbe $(B_{1,2})$*) correspondante à $(B_1)$, et leur nombre est donc égal à l'ordre $b_{1,2}$ de $(B_{1,2})$. De même $(S_1)$ rencontre**) la courbe cuspidale $(C_1)$ à $c_{1,2}$ points, $c_{1,2}$ étant l'ordre de la courbe $(C_{1,2})$ correspondant à $C_1$; mais à chacun de ces $c_{1,2}$ points coïncident (suivant le nº 4) *trois* points d'intersection de $(S_1)$ avec la polaire. On trouve ainsi que le cône $[O(S_1)]$ qui projette $(S_1)$ a

$$s(n_1 - 1) - \Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1 - 1)] - b_{1,2} - 3c_{1,2}$$

contacts avec le cône circonscrit $[O(A_1)]$.

Les génératrices de contact du cône $[O(S_1)]$ avec le cône $[O(C_1)]$ se déterminent au moyen des $c_{1,2}$ points de contact de la courbe $(S_1)$ avec la courbe $(C_1)$, et leur nombre est donc $c_{1,2}$.

On obtient ainsi l'équation suivante

$$s^2 = \Sigma(\mu_{1,2}^2) + n_2 + 2\left[h_{s,1} - \Sigma\left(\frac{\mu_{1,2}(\mu_{1,2} - 1)}{2}\right)\right]$$
$$+ \{s(n_1 - 1) - \Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1 - 1)] - b_{1,2} - 3c_{1,2}\} + c_{1,2}.$$

En y substituant l'expression (3) de $h_{s,1}$ on trouve l'équation suivante

*) Si $(B_1)$ ou $(C_1)$ passe par des points fondamentaux, nous *ne* regardons *pas* comme faisant partie de $(B_{1,2})$ ou de $(C_{1,2})$ les courbes qui correspondent à ces points fondamentaux.

**) Elle y est tangente; voir le nº 3.

$$(\mathrm{I_a})^{*)}\quad n_2-2(p_2-1)+s(n_1-4)-\Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1-2)]-b_{1,2}-2c_{1,2}=0.$$

On trouve, en remplaçant les deux surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$ l'une par l'autre

$$(\mathrm{I_b})\quad n_1-2(p_1-1)+s(n_2-4)-\Sigma[\mu_{2,1}(\mu_2-2)]-b_{2,1}-2c_{2,1}=0.$$

## III.

## Construction et propriétés de surfaces auxiliaires.

**13.** *Construction des surfaces auxiliaires.* Dans nos recherches ultérieures nous ferons usage d'une surface auxiliaire $[F_3]$ définie de la manière suivante: *les droites qui joignent les points de* $[F_1]$ *à un point fixe* $O_3$ *rencontrent les plans qui joignent les points correspondants de* $[F_2]$ *à une droite fixe* $(M_3)$, *aux points de la surface* $[F_3]$. La surface $[F_3]$ sera donc engendrée par le faisceau de plans passant par $(M_3)$, et par la série de cônes $[O_3(S_1)]$ qui joignent $O_3$ aux courbes $(S_1)$ qui sur $[F_1]$ correspondent aux sections faites à $[F_2]$ par les plans du faisceau: chacun des cônes correspond à un plan du faisceau qu'il rencontre dans une courbe située sur $[F_3]$.

Nous ferons de même usage d'une surface $[F_4]$ qu'on construit de la même manière que $[F_3]$ en substituant seulement les deux surfaces l'une à l'autre. Nous désignerons par $O_4$ et $(M_4)$ le point et le plan fixes dont on fait usage dans la construction de $[F_4]$. Là, où nous n'indiquerons pas directement les résultats qui ont égard à $[F_4]$, on les déduit sans difficulté de ceux qui ont égard à $[F_3]$.

Suivant la construction des surfaces $[F_3]$ et $[F_4]$, *les points de toutes les quatre surfaces* $[F_1]$, $[F_2]$, $[F_3]$ et $[F_4]$ *se correspondent un-à-un.*

**14.** *Ordre de la surface* $[F_3]$. Désignons par $P$ et $Q$ les points où une droite fixe $(L)$ rencontre une droite par $O_3$ et un plan par $(M_3)$ qui sont déterminés par des points correspondants de $[F_1]$ et de $[F_2]$. Alors, comme une droite $(AP)$ rencontre $[F_1]$ à $n_1$ points, à un point $P$ correspondent $n_1$ points $Q$, et, comme un plan $[(M_3)Q]$ contient $s$ points de $[F_2]$ dont les correspondants se trouvent dans le plan $[O_3(L)]$, à un point $Q$ correspondent $s$ points $P$. Il y aura donc, suivant le principe de correspondance, sur $(L)$ $n_1+s$ coïncidences de points correspondants $P$ et $Q$, et le nombre des intersections de $(L)$ avec $[F_3]$, ou bien l'ordre de cette surface, sera par conséquent $n_3=n_1+s$.

On aurait pu se contenter de chercher le nombre des intersections d'une droite passant par $O_3$ avec la surface $[F_3]$. Une droite par $O_3$ rencontre $[F_3]$ 1° aux $n_1$ points qui sur cette nouvelle surface corres-

---

*) Si la courbe $(B_1)$ avait été $k$-tuple, on aurait dû donner au terme $-b_{1,2}$ le coefficient $(k-1)$.

pondent aux intersections de la même droite avec la surface $[F_1]$, et $2^0$ aux $s$ points coïncidant avec $O_3$ où elle rencontre le cône $[O_3(S_1)]$ déterminé par la courbe $(S_1)$ qui correspond à la section faite à $[F_2]$ par le plan $[(M_3)O_3]$. On voit ainsi en même temps que *la surface* $[F_3]$ *a, au point* $O_3$, *un point* $s$*-tuple.*

On aurait pu de même se contenter de chercher l'ordre de la section faite à $[F_3]$ par un plan passant par *la droite* $(M_3)$. Cette section est composée $1^0$ de la courbe d'ordre $s$ où son plan rencontre le cône qui y correspond dans la série de cônes $[O_3(S_1)]$, et $2^0$ d'une droite multiple coïncidant avec $(M_3)$. *Celle-ci est* $n_1$*-tuple*; car à un de ses points $R$ la surface $[F_3]$ a pour plans tangents ceux qui joignent $(M_3)$ aux $n_1$ points de $[F_2]$ qui correspondent aux $n_1$ points de rencontre de la droite $(O_3R)$ avec $[F_1]$.

La surface $[F_4]$ est de l'ordre $n_4 = n_2 + s$; le point $O_4$ y est $s$-tuple et la droite $(M_4)$ $n_2$-tuple.

**15.** *Le point singulier* $O_3$ *de la surface* $[F_3]$. (15—17). Nous avons vu que le point $O_3$ est $s$-tuple sur la surface $[F_3]$, et la démonstration elle-même nous montre que le cône tangent à ce point est le cône $[O_3(S_1)]$ qui joint $O_3$ à la courbe $(S_1)$ qui sur $[F_1]$ correspond à la section faite à $[F_2]$ par le plan $[(M_3)O_3]$. Nous avons déjà (dans le n° 10) parlé des caractéristiques Plückeriennes de ce cône tangent. Nous avons encore à faire remarquer que les génératrices doubles de ce cône sont tangentes aux branches de la courbe double de $[F_3]$ qui passent par le point $O_3$, ce qu'on voit sans difficulté, et que *les génératrices suivantes se trouvent en entier sur la surface* $[F_3]$: $1^0$ *celles qui passent par les points fondamentaux de* $[F_1]$, *chacune prise* $\mu_{1,2}$ *fois*, $2^0$ *celles qui passent par les* $n_2$ *points de* $[F_1]$ *qui correspondent aux points où* $[F_2]$ *est rencontrée par la droite* $(M_3)$, *et* $3^0$ *celles qui passent par les* $s$ *points de la section que fait le plan* $[O_3(M_3)]$ *à la surface* $[F_1]$ *dont les correspondants sur* $[F_2]$ *se trouvent dans le même plan.*

En effet, les points de la surface $[F_1]$ qui déterminent les deux premières classes de droites, se trouvent, comme nous l'avons prouvé aux n° 10 et 11 — $\mu_{1,2}$ ou une fois — sur toutes les courbes $(S_1)$ qui correspondent aux sections faites à $[F_2]$ par les plans passant par $(M_3)$, et les droites qui y joignent le point $O_3$ se trouvent par conséquent — le même nombre de fois — sur tous les cônes $[O_3(S_1)]$ de la série. Quant à la dernière classe de droites elles se trouvent à la fois dans le plan $[(M_3)O_3]$ et sur le cône qui y correspond.

**16.** Chacun des points de $[F_1]$ qui déterminent ces droites devient un point fondamental dans la correspondance de $[F_1]$ avec la surface $[F_3]$, et les directions par les points sur $[F_1]$ correspondent aux points des droites sur $[F_3]$. Le plan par une des droites sur $[F_3]$ déterminé

par une direction par le point correspondant de $[F_1]$, est tangent à $[F_3]$ au point qui correspond à la direction. On a ainsi le moyen de déterminer les nombres caractéristiques*) de ces droites situés sur la surface $[F_3]$.

Regardons premièrement la droite $(D_{1,3})$ qui joint $O_3$ à un point $(D_1)$ qui est fondamental sur $[F_1]$ déjà dans sa correspondance avec l'autre surface donnée $[F_2]$. Nous avons déjà indiqué que $(D_{1,3})$ est une droite $\mu_{1,2}$-tuple de $[F_3]$, et l'on trouve les $\mu_{1,2}$ plans tangents de $[F_3]$ à un point quelconque $P$ de $(D_{1,3})$ au moyen du plan $[(M_3)P]$ qui joint le point $P$ à la droite fixe $(M_3)$: ce plan rencontre la courbe $(D_{1,2})$ qui sur $[F_2]$ correspond à $D_1$ à $\mu_{1,2}$ points dont les directions correspondantes par le point $D_1$ déterminent les plans tangents cherchés. Réciproquement, un plan passant par la droite $(D_{1,3})$ contient $\mu_1$ directions par le point fondamental: il sera donc tangent à la surface $[F_3]$ aux $\mu_1$ points que déterminent les plans joignant $(M_3)$ aux points de la courbe $(D_{1,2})$ qui correspondent à ces directions. Deux des plans tangents à $[F_3]$ à un même point $P$ de $(D_{1,3})$ sont *consécutifs* dans le cas où le plan joignant $P$ à $(M_1)$ est tangent à la courbe $(D_{1,2})$, ou passe par un point cuspidal de cette courbe, ou par un des $\eta_1$ points doubles**) dont les génératrices corréspondantes du cône tangent à $D_1$ sont doubles sans être tangentes à la courbe double de $[F_1]$; et deux points de contact d'un même plan par $(D_{1,3})$ sont *consécutifs* dans le cas où le plan est tangent au cône tangent au point $D_1$, ou passe par une des génératrices cuspidales de ce cône, ou par une des $\eta_1$ génératrices doubles qui ne sont pas tangentes à la courbe double de $[F_1]$. On trouve ainsi — en observant que, la surface $[F_3]$ étant construite comme lieu de points, les coïncidences auront lieu des manières qui sont les plus générales pour des surfaces regardées comme lieux de points***) — les valeurs suivantes des caractéristiques de $(D_{1,3})$:

---

*) Nous renvoyons, sur la signification de ces caractéristiques et sur les notations que nous y appliquerons aussi ici, à notre précédent article, notamment au résumé qui se trouve à son n° 10.

**) Les notations qui ont égard aux points fondamentaux de $[F_1]$ sont indiquées au n° 7 du présent article.

***) Voir dans le précédent article les n$^{os}$ 3, 4 et 5. On pourrait croire que les points de $(D_{1,3})$, déterminés par les $\eta_1$ points doubles et les $\zeta_1$ points cuspidaux de $(D_{1,2})$ dont les génératrices correspondantes du cône tangent au point $D_1$ sont doubles et cuspidales sans être tangentes à la courbe double et à la courbe cuspidale de $[F_1]$, appartenaient aux nombres $\overline{f}$ et $\overline{i}$ des points d'intersection de $(D_{1,3})$ avec la courbe double et avec la courbe cuspidale de $[F_3]$ (voir le n° 6 du précédent article). On voit que cela n'a pas lieu, en regardant la section de $[F_3]$ que fait le plan joignant $(M_3)$ à un de ces $(\eta_1 + \zeta_1)$ points. Celle-ci aura à ce point un point cuspidal, et non pas un point de contact de deux

$$\overline{n} = \mu_{1,2}\,, \quad \overline{n'} = \mu_1\,, \quad \overline{1j} = \nu_{1,2} + z_{1,2}\,, \quad \overline{2j} = \eta_1\,, \quad \overline{3j} = \zeta_1\,.$$
$$\overline{1\beta'} = \nu_1 + z_1\,, \quad \overline{j'} = \overline{\beta} = \overline{i} = 0\,.$$

En cherchant aussi les points de $(D_{1,3})$ et les plans par $(D_{1,3})$ dont deux plans tangents ou deux points de contact coïncident sans être consécutifs, on trouverait le nombre $\overline{f}$ de contacts de deux des nappes de $[F_3]$ qui passent par $(D_{1,3})$. Ce nombre se trouve aussi au moyen de l'une des équations (5) du précédent article; l'autre de ces équations donnera

$$2\,\mu_{1,2} + \nu_1 + z_1 = 2\,\mu_1 + \nu_{1,2} + z_{1,2}\,,$$

qui est une des équations (2) du présent article. Les équations (7) et (8) du précédent article, qui subiront des altérations à cause du point singulier $O_3$ qui se trouve sur la droite $(D_{1,3})$, ne nous donneront à présent aucun résultat nouveau.

Des procédés analogues nous montrent que les autres $n_2 + s$ droites par $O_3$ qui se trouvent en entier sur $[F_3]$ sont *simples*, et qu'un plan passant par une de ces droites n'a, en général, qu'un *seul contact* avec $[F_3]$. On a donc pour chacune de ces droites $\overline{n} = \overline{n'} = 1$, $\overline{j} = \overline{j'} = \overline{\beta} = \overline{\beta'} = \overline{i} = \overline{f} = 0$.

**17.** Le cône tangent d'une surface à un point $s$-tuple est le lieu des droites par le point qui contiennent $s + 1$ points coïncidents de la surface. Il y a $s(s+1)$ génératrices du cône qui contiennent $s + 2$ points coïncidents. Pour le point $O_3$, $s$-tuple sur la surface $[F_3]$, ces $s(s+1)$ génératrices seront: 1° les $s^2$, dont nous avons déjà rendu compte au n° 12, où le cône correspondant à la section faite à $[F_2]$ par le plan $[(M_3)\,O_3]$ rencontre le cône consécutif de la série de cônes $[O_3\,(S_1)]$ qui correspondent aux plans par $(M_3)$, et 2° les $s$ droites d'intersection du même cône avec le plan correspondant $[(M_3)\,O_3]$.

**18.** *La droite multiple* $(M_3)$ *de la surface* $[F_3]$. Nous avons vu que la droite $(M_3)$ est, sur la surface $[F_3]$, multiple de l'ordre $n_1$. Les plans tangents de la surface à un point quelconque $R$ de $(M_3)$ sont ceux qui passent par les points de la surface $[F_2]$ qui correspondent aux $n_1$ points de rencontre de la droite $(O_3 R)$ avec la surface $[F_1]$. Les points de contact d'un plan quelconque $[Q]$ par $(M_3)$, sont les points de rencontre de $(M_3)$ avec les droites qui joignent $O_3$ aux $s$ points de la courbe d'intersection du plan $[O_3\,(M_3)]$ avec $[F_1]$ dont les correspondants sur $[F_2]$ se trouvent dans le plan $[Q]$. Ces derniers points sont les points d'intersection du plan $[Q]$ avec la courbe $(S_2)$

---

branches ou un point de rebroussement de seconde espèce. — Nous verrons, du reste, que $[F_3]$ n'a aucune courbe cuspidale, de façon que $\overline{i}$ (ainsi que $\overline{\beta}$) doive être égal à zéro.

qui sur $[F_2]$ correspond à la section faite à $[F_1]$ par le plan $[O_3(M_3)]$. En cherchant encore les points de $(M_3)$ où deux plans tangents sont consécutifs, et les plans par $(M_3)$ dont deux points de contact sont consécutifs — ce qui ne causera aucune difficulté — on trouve pour la droite multiple $(M_3)$ les nombres caractéristiques suivants:

$$\bar{n} = n_1, \quad \bar{n}' = s, \quad \bar{j} = a_1 + c_1, \quad \bar{\beta}' = r_{s,2},$$
$$\overline{2j} = \overline{3j} = \bar{j}' = \bar{\beta} = \bar{i} = 0.\text{*)}$$

Le nombre $\bar{f}$ indiquera l'ordre d'un cône, lieu de droites joignant deux points de $[F_1]$ dont les correspondants sur $[F_2]$ se trouvent sur des droites qui rencontrent une droite fixe. Le sommet du cône est ici à $O_3$, et la droite fixe est à $(M_3)$.

Les formules (5) du précédent article nous donneront ici, 1° qu'une courbe $(S_2)$ est du même genre qu'une section plane de $[F_1]$, ce que nous avons déjà fait remarquer, et 2° l'expression suivante de $\bar{f}$:

$$2\bar{f} = 2n_1 s - 2s - a_1 - c_1,$$

ou bien (voir les formules (1) du présent article)

$$\bar{f} = (n_1 - 1)(s - 1) - p_1.$$

Le même résultat se trouve sans difficulté au moyen du principe de correspondance. — L'équation (7) du précédent article ne nous donnera que le résultat évident que le nombre $\bar{t}$ des intersections de la droite $(M_1)$ avec d'autres nappes de la surface que les $n_1$ qui passent par elle, est égal à zéro. L'équation (8) du précédent article nous sera utile dans ce qui suit.

**19.** *Section plane de la surface* $[F_3]$. On trouve les caractéristiques Plückeriennes d'une section plane de la surface $[F_3]$ au moyen du précédent article**), où nous avons exprimé les caractéristiques Plückeriennes de la section *résidue* d'un plan passant par la droite multiple — c'est-à-dire de ce qui reste de la courbe d'intersection lorsqu'on fait abstraction de la droite multiple — au moyen de celles d'une section quelconque. Nous ferons ici, des mêmes expressions, l'usage inverse, en sachant que la section résidue faite à la surface $[F_3]$ par un plan passant par la droite multiple $(M_3)$ est la courbe d'intersection de ce plan avec un cône $[O_3(S_1)]$, et qu'elle est par conséquent de l'ordre $s$, de la classe $r_{s,1}$ et dénuée de points cuspidaux. Ce procédé est identique au troisième de ceux qui nous ont donné l'ordre $n_3 = n_1 + s$

*) Dans le cas, que nous avons negligé, où il y a sur les deux surfaces des courbes cuspidales correspondant l'une à l'autre, $\bar{i}$ sera l'ordre de celle de la surface $[F_1]$.

**) Voir le résumé à son n° 10.

de la surface $[F_3]$. On trouve de même, en désignant par $a_3$ la classe d'une section plane de $[F_3]$,

$$a_3 = r_{s,1} + 2s + a_1 + c_1$$

ou bien, en réduisant cette expression au moyen des formules (1) et (3) du présent article

$$\begin{aligned}(4)\qquad a_3 &= 4s + 2n_1 + 2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1)\\ &= a_1 + c_1 + a_2 + c_2 - 2n_2 + 4s.\end{aligned}$$

On trouve enfin

$$(5)\qquad c_3 = 0,$$

de façon que $[F_3]$ soit dénuée de courbe cuspidale. Les autres caractéristiques Plückeriennes de la section dépendent de $n_3$, de $a_3$ et de $c_3$.

On aurait trouvé les mêmes résultats en regardant la section faite à $[F_3]$ par un plan passant par son point multiple $O_3$.

**20.** On voit sans difficulté que le point $O_3$ est le seul point fondamental de $[F_3]$ dans sa correspondance avec $[F_1]$ ou $[F_2]$, et qu'il a pour courbes correspondantes, sur $[F_2]$ la section faite par le plan $[O_3(M_3)]$, et sur $[F_1]$ la courbe $(S_1)$ qui correspond à cette section et qui détermine le cône tangent de $[F_3]$ au point $O_3$. Nous avons indiqué au n° 16., que, dans la correspondance de $[F_3]$ avec $[F_1]$, les points fondamentaux de $[F_1]$ sont ceux où elle est rencontrée par les droites par $O_3$ qui se trouvent en entier sur $[F_3]$, et que les courbes correspondantes sont ces droites. On en déduit que les points fondamentaux de $[F_2]$ dans sa correpondance avec $[F_3]$ sont, 1° ceux qui le sont dans sa correspondance avec $[F_1]$, 2° les $n_2$ points où elle est rencontrée par la droite $(M_3)$, et 3° les $s$ points de la section faite par le plan $[O_3(M_3)]$, dont les correspondants sur $[F_1]$ se trouvent dans le même plan.

L'application de la formule (I) (au n° 12) à la correspondance de la surface $[F_3]$ avec $[F_1]$ ou $[F_2]$ ne donne aucun résultat nouveau et important, mais elle peut servir de vérification des résultats déjà trouvés.

## IV.

### Cônes circonscrits à $[F_3]$ ou à $[F_4]$; usage des surfaces auxiliaires.

**21.** Nous avons déjà trouvé au n° 19. l'ordre $a_3$ d'un cône circonscrit à $[F_3]$, qui est égal à la classe d'une section plane. Deux autres caractéristiques Plückeriennes du cône circonscrit seront déterminées, chacune par deux voies différentes, qui donneront deux expressions différentes. *En égalant les deux expressions d'un même nombre on trouve les équations relatives aux deux surfaces données* qui sont le but de la construction des surfaces auxiliaires.

**22.** *Classe de la surface* $[F_3]$ (22—24). On trouve la classe $n_3'$ de la surface $[F_3]$ en appliquant la formule (8) du précédent article

$$n' = \overline{n'} + \overline{n} + \overline{t'} + 2 \cdot \overline{\beta'}$$

à la droite multiple $(M_3)$ de la surface $[F_3]$. Alors $n'$ sera la classe cherchée $n_3'$; $\overline{n'}$, $\overline{n}$ et $\overline{\beta'}$ auront, comme nous l'avons indiqué au n° 18., les valeurs $s$, $n_1$ et $r_{s,2}$. Il reste donc à chercher le nombre $\overline{t'}$ des plans $[Q]$ par la droite $(M_3)$ qui ont un $(s+1)$-ième contact avec la surface $[F_3]$, ou des plans dont les sections résidues ont des points doubles qui ne sont ni au point multiple $O_3$ ni sur la courbe double de $[F_3]$. Or, la section résidue d'un plan $[Q]$ est la section que fait le cône de la série $[O_3(S_1)]$ qui correspond au plan $[Q]$, et ce plan sera donc un des $\overline{t'}$ plans cherchés si le cône correspondant a une génératrice double qui n'est pas au nombre des $h_{s,1}$ dont tous les cônes $[O_3(S_1)]$ sont doués (voir le n° 10.), et qui déterminent seulement des points de la courbe double de $[F_3]$. Cela n'arrivera que lorsque la courbe $(S_1)$ obtient un point double propre autre que ceux qui sont aux points fondamentaux de $[F_1]$, ce qui a lieu dans les cas suivants: 1° lorsque le plan $[Q]$ est tangent à $[F_2]$, 2° lorsqu'il est tangent à la courbe cuspidale de $[F_2]$, et 3° lorsqu'il passe par un point fondamental $D_2$ de $[F_2]$. En effet, dans les deux premiers cas, le point de $[F_1]$ qui correspond au point de contact sera un point double de $(S_1)$, suivant les n^os 8. et 5. Dans le troisième, la courbe $(S_1)$ se divisera, suivant le n° 6., en deux courbes qui se rencontrent aux $\mu_2$ points de $[F_1]$ correspondant aux $\mu_2$ directions du point fondamental (et $\mu_2$-tuple) $D_2$ qui se trouvent dans le plan $[Q]$, et la courbe $(D_{2,1})$ qui correspond au point $D_2$ aura encore $\eta_2$ points doubles et $\zeta_2$ points cuspidaux, correspondant aux génératrices doubles et cuspidales du cône tangent à $D_2$ qui ne sont pas tangentes à la courbe double et à la courbe cuspidale de $[F_2]$. On voit ainsi que dans le plan $[(M_3)\,D_2]$ coïncident $\mu_2 + \eta_2$ plans tangents simples et $\zeta_2$ plans tangents stationnaires de $[F_3]$, de façon qu'il compte pour $\mu_2 + \eta_2 + 2\,\zeta_2$ plans tangents simples. On aura donc*):

$$\overline{t'} = n_2' + r_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\,\zeta_2),$$

et la formule du précédent article que nous venons de citer, nous donne ainsi

$$(6_a) \qquad n_3' = s + n_1 + n_2' + r_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\,\zeta_2) + 2\,r_{s,2}$$

ou, suivant la première formule $(3_b)$ au n° 10.,

$$(6_b) \qquad n_3' = n_1 + 4\,(p_1 - 1) + n_2' + r_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\,\zeta_2) + 5\,s$$

---

*) On aurait trouvé le même résultat en regardant immédiatement la correspondance des surfaces $[F_2]$ et $[F_3]$ et des sections qu'y fait un même plan $[Q]$, au lieu de celle de $[F_2]$ avec $[F_1]$ et de la section plane de $[F_2]$ avec une courbe $(S_1)$.

ou bien, suivant la dernière formule (1) au n° 1.,

(6$_c$) $n_3' = 2a_1 + 2c_1 - 3n_1 + n_2' + r_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\zeta_2) + 5s$.

**23.** On obtient par une voie différente une autre expression de $n_3'$, qui est la classe, non seulement de la surface $[F_3]$, mais aussi d'un cône circonscrit mené à elle d'un sommet quelconque $E$. Ce cône aura la droite $(EO_3)$ pour génératrice multiple, le degré de multiplicité étant égal au nombre $r_{s,1}$ des plans tangents au cône tangent au point $O_3$ qui passent par $(EO_3)$. On trouve donc la classe $n_3'$ du cône circonscrit en ajoutant le nombre $2r_{s,1}$ à celui des plans qui passent par $(EO_3)$ et qui sont tangents à $[F_3]$ à des points différents de $O_3$. Nous allons chercher ce dernier nombre.

Comme les points correspondants des surfaces $[F_1]$ et $[F_3]$ se trouvent sur les mêmes droites par $O_3$, ils sont aussi sur les mêmes plans par $(EO_3)$, et les sections que fait un même plan $[R]$ par $(EO_3)$ sont, par conséquent, des courbes correspondantes. On voit donc, en y appliquant les mêmes raisonnements qu'au n° 22., que les plans par $(EO_3)$ tangents à $[F_3]$ à des points différents de $O_3$ sont: 1° les $n_1'$ qui sont tangents à $[F_1]$, 2° les $r_1$ qui sont tangents à la courbe cuspidale $(C_1)$ de cette surface, et 3° ceux qui passent par les points de $[F_1]$ qui sont fondamentaux dans sa correspondance avec $[F_3]$. Ces derniers plans tangents à $[F_3]$ sont (voir le n° 20.) les plans passant par les droites de $[F_3]$ qui sortent de $O_3$. Si l'on emploie, pour déterminer leurs degrés de multiplicité, les mêmes règles*) que dans le n° 22., on trouve qu'ils comptent pour $\Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) + n_2 + s$ plans tangents simples. Le nombre cherché des plans tangents à $[F_3]$ à des points différents de $O_3$, est donc

$$n_1' + r_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) + n_2 + s.$$

On trouve ainsi

(7) $\quad n_3' = s + n_2 + n_1' + r_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) + 2r_{s,1}$.

*Autrement.* On pourrait trouver le même résultat d'une manière un peu différente. Les plans tangents à $[F_3]$ menés par $(EO_3)$ dont les points de contact ne sont pas à $O_3$, sont 1° ceux qui sont tangents au cône lieu des droites tangentes à $(F_3)$ à des points différents de $O_3$, et 2° ceux qui passent par les droites par $O_3$ qui se trouvent en entier sur $[F_3]$. Comme $[F_3]$ n'a aucune courbe cuspidale (voir au n° 19.), toute droite qui rencontre cette surface en deux points *consécutifs* y sera tangente, et dans cette condition seront les droites par $O_3$ qui ren-

*) La légitimité de l'application de ces règles au cas actuel où la courbe $(D_{1,3})$ qui sur $[F_3]$ correspond à un point fondamental $D_1$ de $[F_1]$ dégénère en $\mu_{1,2}$ droites coïncidentes, pourrait sembler douteuse; mais le résultat sera assuré par notre seconde démonstration.

contrent $[F_1]$ en deux points consécutifs. Le cône lieu de ces tangentes sera donc composé du cône $[O_3(A_1)]$ circonscrit à $[F_1]$ et du cône $[O_3(C_1)]$ qui projette sa courbe cuspidale. Il sera par conséquent de la classe $n_1' + r_1$. Les plans passant par les droites de $[F_3]$ auront suivant le précédent article $\overline{n'} + \overline{2j} + 2 \, . \, \overline{3j}$ contacts avec cette surface, $\overline{n'}$, $\overline{2j}$ et $\overline{3j}$ prenant pour les droites respectives les valeurs indiquées au nº 16. Les plans joignant $(EO_3)$ aux droites de $[F_3]$ comptent donc pour $\Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) + n_2 + s$ plans tangents. —

L'expression (7) se transformera par les mêmes substitutions que nous avons appliquées à l'expression (6) dans la suivante

$$(7_c) \quad n_3' = 2a_2 + 2c_2 - 3n_2 + n_1' + r_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) + 5s.$$

**24.** En égalant les deux expressions $(6_c)$ et $(7_c)$ trouvées dans les nºs précédents on obtient l'équation suivante:

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{aligned} & n_1' - 2a_1 + r_1 - 2c_1 + 3n_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) \\ = \; & n_2' - 2a_2 + r_2 - 2c_2 + 3n_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\zeta_2). \end{aligned}$$

Cette relation est la même que j'ai exposée dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**) (T. LXX, p. 745).

**25.** *Identité des caractéristiques Plückeriennes de certains cônes circonscrits aux deux surfaces auxiliaires* $[F_3]$ *et* $[F_4]$. On voit, au moyen du précedent article**) et des formules (4), $(6_c)$ et $(7_c)$ du présent article, que, pour un sommet $P$ situé sur la droite $(M_3)$, le cône *résidu* circonscrit à $[F_3]$ est de *l'ordre*

$$a_3 - 2n_1 = 4s + 2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1),$$

et de la *classe*

$$\begin{aligned} n_3' - s &= 2a_1 + 2c_1 - 3n_1 + n_2' + r_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\zeta_2) + 4s \\ &= 2a_2 + 2c_2 - 3n_2 + n_1' + r_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) + 4s. \end{aligned}$$

L'expression de l'ordre du cône est symétrique par rapport aux nombres caractéristiques des deux surfaces données $[F_1]$ et $[F_2]$, et les deux expressions de la classe se transforment l'une en l'autre par la substitution de l'une des surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$ à l'autre. Les autres

---

*) Nous n'avons ici démontré la formule que dans les suppositions que nous avons déjà indiquées, au nombre desquelles se trouve celle qu'il *n'y ait pas sur les surfaces données des courbes cuspidales correspondant l'une à l'autre.* S'il y en a je crois avoir trouvé qu'on doit ajouter aux deux membres de l'équation les nombres respectifs des points cuspidaux des courbes cuspidales qui se correspondent sur les deux surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$. J'aurais donc dû, dans les Comptes Rendus où je n'ai pas fait cette même restriction, trouver ce résultat un peu modifié. — Dans les Comptes Rendus je n'attribuais aux surfaces que des points fondamentaux simples.

**) Voir le tableau à son nº 10.

caractéristiques Plückeriennes du même cône offriront la même symétrie, ce qu'il suffira — à cause des relations Plückeriennes — de prouver pour une seule de celles qui restent. Nous le ferons pour le nombre de ses arêtes cuspidales, c'est-à-dire pour le nombre des droites par le sommet $P$ qui ont un contact triponctuel avec $[F_3]$.

Soit $(L)$ une de ces droites. Alors il faut que le plan $[O_3\,(L)]$ contienne trois génératrices consécutives du cône $[O_3\,(S_1)]$ mené de $O_3$ à la courbe $(S_1)$ qui sur $[F_1]$ correspond à la section que fait le plan $[(M_3)\,(L)]$ à la surface $[F_2]$, ou bien, qu'il ait un contact triponctuel avec cette courbe $(S_1)$. Le nombre cherché est donc celui des plans d'un faisceau qui ont un contact triponctuel avec une courbe $(S_1)$ qui sur $[F_1]$ correspond à une section faite à $[F_2]$ par un plan d'un autre faisceau. Or le contact triponctuel d'un plan avec une courbe $(S_1)$ ou, ce qui est la même chose, celui de la section que fait le plan à $[F_1]$ avec $(S_1)$, amène aussi celui de la courbe $(S_2)$ qui sur $[F_2]$ correspond à la section plane de $[F_1]$ avec la courbe plane qui sur $[F_2]$ correspond à $(S_1)$. Le nombre des arêtes cuspidales du cône dont nous parlons dépend donc d'une manière symétrique de $[F_1]$ et de $[F_2]$.

On voit ainsi, en se rappelant la symétrie des constructions des deux surfaces auxiliaires $[F_3]$ et $[F_4]$, que *les cônes résidus circonscrits à* $[F_3]$ *et à* $[F_4]$ *dont les sommets se trouvent, respectivement, sur les droites multiples* $(M_3)$ *et* $(M_4)$ *de ces surfaces, ont les mêmes caractéristiques Plückeriennes.*

A l'endroit déjà cité des Comptes Rendus j'ai démontré cette proposition d'une manière plus immédiate, en prenant, dans la construction de $[F_4]$, pour droite $(M_4)$ une droite qui joint $O_3$ à un point de $(M_3)$ et pour point $O_4$ (point multiple de $[F_4]$) un autre point de $(M_3)$. Alors on voit sans difficulté que le point de rencontre $P$ de $(M_3)$ et de $(M_4)$ est le sommet d'un cône circonscrit à la fois aux deux surfaces auxiliaires $[F_3]$ et $[F_4]$. La proposition démontrée de cette manière permettrait de prouver la formule (II) au moyen d'une seule des deux formules (6) et (7). La formule $(6_c)$, par exemple, nous montrerait alors que la classe du cône circonscrit à la fois à toutes les deux surfaces $[F_3]$ et $[F_4]$, est égale à

$$n_3' - s = 2\,a_1 + 2\,c_1 - 3\,n_1 + n_2' + r_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + 2\,\zeta_2) + 4\,s$$

et à

$$n_4' - s = 2\,a_2 + 2\,c_2 - 3\,n_2 + n_1' + r_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\,\zeta_1) + 4\,s.$$

**26.** *Nombre* $c_3'$ *des plans tangents stationnaires d'un cône circonscrit à la surface* $[F_3]$. Les plans tangents stationnaires d'un cône circonscrit à une surface sont les plans tangents stationnaires de la surface qui passent par son sommet. Cette série de plans a pour enveloppe une surface développable dont il faut compter les plans tangents

passant par un point donné. Prenons le point $O_3$. Les plans cherchés se trouvent alors au nombre des plans tangents à $[F_3]$ qui sortent de $O_3$. Ceux-ci sont (voir le n° 23.): 1° les plans tangents au cône tangent $[O_3(S_1)]$ de $[F_3]$ au point $O_3$, 2° les plans qui passent par les droites de $[F_3]$ qui sortent de $O_3$, et 3° les plans tangents au cône $[O_3(A_1)]$ circonscrit à $[F_1]$ et au cône $[O_3(C_1)]$ projetant son arête cuspidale.

On voit sans difficulté que les plans tangents du cône tangent à un point $s$-tuple d'une surface qui ont un contact stationnaire avec cette surface, seront 1° les plans tangents stationnaires du cône, et 2° ceux dont les génératrices de contact rencontrent la surface à $(s+2)$ points coïncidant avec le point multiple, à moins que ces génératrices ne soient *seulement* tangentes à des branches de la courbe double et de la courbe cuspidale. Comme toutes les droites le long desquelles ces plans sont tangentes à l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface, passent par le point multiple, les plans comptent, au moins, pour *deux* au nombre cherché des plans tangents stationnaires qui sortent du point multiple. En regardant un exemple *) qui n'offre aucune circonstance particulière qui pourrait altérer la règle générale, on voit que les plans de la première classe comptent pour *deux*, et ceux de la seconde classe pour *trois* plans tangents stationnaires de la surface. On trouve ainsi les deux termes suivants **) du nombre cherché $c_3'$

$$2 \,.\, n_{s,1} + 3 \,.\, [s(s+1) - 2\,h_{s,1}]\,.$$

Comme les droites de $[F_3]$ qui sortent du point $O_3$ sont au nombre des $[s(s+1) - 2\,h_{s,1}]$ droites qui rencontrent $[F_3]$ en $s+2$ points coïncidant avec $O_3$, les plans qui ont ces droites pour génératrices de contact avec le cône tangent à $O_3$, se trouvent au nombre des plans que nous venons de nommer. Les autres plans par ces droites qui ont des contacts stationnaires avec $[F_3]$ sont, suivant l'article précédent ***), leurs $\overline{\beta'}\,(=\overline{1\,\beta'} + 2\,.\,\overline{2\,j} + 3\,.\,\overline{3\,j})$ plans stationnaires pris *trois* fois, et *encore deux* fois les $\overline{2\,j}$ plans tangents à leurs points-pinces doubles et *quatre* fois les $\overline{3\,j}$ plans tangents à leurs points-pinces triples, le nombre $\overline{i}$ étant égal à zéro pour toutes les droites.

*) On peut regarder une surface du quatrième ordre douée d'un point triple. — Les applications de la formule que nous cherchons (voir dans ce qui suit les applications 2 et 3) le montreraient aussi, si nous avions attribué des coëfficients indéterminés aux termes dûs à ces deux classes de plans.

**) Pour le nombre des plans de la seconde classe voir les n$^{os}$ 17. et 12.

***) Voir dans le tableau du n° 10. le nombre des plans tangents stationnaires du cône circonscrit résidu.

Pour les droites $(D_{1,3})$ qui joignent $O_3$ aux points fondamentaux $D_1$ de $[F_1]$ on a (voir le n° 16. du présent article)

$$\overline{1\beta'} = v_1 + z_1, \quad \overline{2j} = \eta_1, \quad \overline{3j} = \zeta_1, \quad \beta' = x_1 + z_1 \text{*)},$$

et pour les autres $n_2 + s$ droites ces nombres caractéristiques sont égaux à zéro. On trouve ainsi le terme suivant du nombre cherché $c_3'$

$$\Sigma(3x_1 + 3z_1 + 2\eta_1 + 4\zeta_1).$$

Un plan tangent à un des cônes $[O_3(A_1)]$ et $[O_3(C_1)]$ sera plan tangent stationnaire de $[F_3]$ si sa courbe d'intersection avec $[F_3]$ a un point cuspidal. Comme les sections que les plans par $O_3$ font à la surface $[F_3]$ correspondent à celles qu'ils font à la surface $[F_1]$ (voir le n° 23.), les plans cherchés seront 1° les $c_1'$ plans tangents stationnaires de la surface $[F_1]$ (voir le n° 8.), 2° les plans osculateurs à la courbe cuspidale $(C_1)$ de $[F_1]$, dont nous désignerons le nombre par $n_{c,1}$ (voir le n° 5.), et 3° les $\sigma_1$ plans qui sont tangents à la surface $[F_1]$ à des points de la courbe $(C_1)$ (voir le n° 5.). La tangente de rebroussement de la section que fait un de ces derniers plans, sera la droite qui joint son point cuspidal à $O_3$; car cette droite, qui rencontre $[F_1]$ en trois points consécutifs, doit aussi rencontrer $[F_3]$ en trois points consécutifs **). Or la tangente de rebroussement de la section faite par un plan tangent stationnaire est génératrice de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. Donc chacun des $\sigma_1$ plans dont nous parlons compte pour *deux* plans tangents stationnaires de $[F_3]$ sortant de $O_3$. On trouve ainsi les termes suivants de $c_3'$

$$c_1' + n_{c,1} + 2\sigma_1.$$

L'expression totale de $c_3'$ devient

$$(8_a)\quad \begin{aligned} c_3' &= 2 \,.\, n_{s,1} + 3 \,.\, [s(s+1) - 2h_{s,1}] \\ &+ \Sigma(3x_1 + 3z_1 + 2\eta_1 + 4\zeta_1) + c_1' + n_{c,1} + 2\sigma_1. \end{aligned}$$

En remplaçant $n_{c,1}$ par l'expression qu'en donnent les relations Plückeriennes

$$n_{c,1} = \beta_1 + 3r_1 - 3c_1,$$

et $n_{s,1}$ et $h_{s,1}$ par les expressions (3), on trouve

$$(8_b)\quad \begin{aligned} c_3' &= c_1' + \beta_1 + 3r_1 - 3c_1 + 2\sigma_1 \\ &+ \Sigma(3x_1 + 3z_1 + 2\eta_1 + 4\zeta_1) + 18(p_2 - 1) + 18s. \end{aligned}$$

**27.** On trouve, au moyen du précédent article et du n° 18. du présent article, qu'un cône circonscrit résidu mené à la surface $[F_3]$

---

*) Dans la formule (VI) de l'introduction du précédent article nous avons posé $v + 2\eta + 3\zeta = x$.

**) On voit aussi sans difficulté que cette droite qui joint $O_3$ au point cuspidal de la section, que nous appelons $P_{1,3}$, est tangente à la direction $(P_{1,3}P'_{1,3})$ qui est tangente aux courbes par $P_{1,3}$ et sur $[F_3]$ dont les courbes correspondantes sur $[F_1]$ ont des points cuspidaux (voir les n^os 4. et 5.).

d'un point de sa droite singulière $(M_3)$ est doué de $c_3' - 3\,r_{s,\,2}$ plans tangents stationnaires. Comme $c_3'$ a la valeur que nous venons d'indiquer, et $3\,r_{s,\,2}$, celle qui est exprimée dans la première formule $(3_b)$, le cône circonscrit résidu aura

$$c_1' + \beta_1 + 3\,r_1 - 3\,c_1 + 2\,\sigma_1 - 6\,(p_1 - 1)$$
$$+ \Sigma(3\,x_1 + 3\,z_1 + 2\,\eta_1 + 4\,\zeta_1) + 18\,(p_2 - 1) + 12\,s$$

plans tangents stationnaires.

Ce nombre doit, selon le n° 25., être égal à celui des plans tangents stationnaires d'un cône circonscrit résidu mené d'un point de la droite $(M_4)$ à l'autre surface auxiliaire $[F_4]$, ou à

$$c_2' + \beta_2 + 3\,r_2 - 3\,c_2 + 2\,\sigma_2 - 6\,(p_2 - 1)$$
$$+ \Sigma(3\,x_2 + 3\,z_2 + 2\,\eta_2 + 4\,\zeta_2) + 18\,(p_1 - 1) + 12\,s.$$

On trouve ainsi l'équation suivante, où nous avons substitué à $2\,(p - 1)$ son expression $a + c - 2\,n$ [voir les formules (1)],

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} c_1' - 12\,a_1 + 24\,n_1 + \beta_1 + 3\,r_1 - 15\,c_1 + 2\,\sigma_1 + \Sigma(3\,x_1 + 3\,z_1 + 2\,\eta_1 + 4\,\zeta_1) = \\ c_2' - 12\,a_2 + 24\,n_2 + \beta_2 + 3\,r_2 - 15\,c_2 + 2\,\sigma_2 + \Sigma(3\,x_2 + 3\,z_2 + 2\,\eta_2 + 4\,\zeta_2)\,. \end{cases}$$

Les deux membres de cette équation feront, si l'on en soustrait 24, respectivement pour les deux surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$, le 24-tuple de l'expression que M. Cayley*) a donné du genre d'une surface. L'équation (III) exprime donc le théorème de M. Clebsch**): que *deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un sont du même genre.*

## V.

## Extensions des résultats exprimés par les équations (I), (II) et (III).

**28.** Nous avons supposé dans la déduction des équations (I), (II) et (III) (voir les n$^{os}$ 12, 24 et 28) qu'aucune des surfaces $[F_1]$ et $[F_2]$ ne soit douée de *points-clos,* c'est à dire de points non-coniques où la courbe cuspidale est rencontrée par les courbes de contact de tous les cônes circonscrits à la surface. S'il y en a sur nos surfaces et *si tous ces points sont fondamentaux* on verra, en y appliquant les mêmes procédés qu'aux autres points fondamentaux, qu'on peut, dans les formules (II) et (III), regarder ces points comme des points coniques doués des caractéristiques suivantes: $\mu = 2$, $\nu = z = 1$, $y = \eta = \zeta = 0$, $(x = 1)$. Il n'en

*) Philosophical Transactions 1869, p. 227. Il faut qu'on se rappelle que nous avons supposé que $\chi = \vartheta = 0$ (voir le n° 7. du présent article et l'introduction du précédent article. $\vartheta$ est le nombre des „off-points"). Quant à $\chi$, nous y aurons égard dans le n° suivant, et son coefficient sera d'accord avec l'expression de M. Cayley. Dans ce qui suit nous aurons aussi égard à des points coniques non-fondamentaux.

**) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1868, Tome LXVII, p. 1238.

sera pas de même des formules (I); mais en appliquant les mêmes procédés qui ont donné ces formules à des surfaces douées de points-clos fondamentaux, et en observant qu'une courbe passant par un point-clos y est tangente à toute « première polaire par rapport à la surface », on trouve sans difficulté les modifications que ces formules subiront. $\chi_1$ et $\chi_2$ sont les nombres des points-clos, et nous désignons par $\chi_{1,2}$ et $\chi_{2,1}$ les ordres des courbes composées des courbes correspondant à ces nouveaux points fondamentaux. On aura donc, en séparant dans les équations nommées ces points des autres points fondamentaux (et en remplaçant en même temps dans les équations (I) $2(p-1)$ par son expression $a+c-2n$) les équations suivantes:

$$[\mathrm{I_a}]\quad 3n_2 - a_2 - c_2 + s(n_1 - 4) - \chi_{1,2} - \Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1 - 2)] - b_{1,2} - 2c_{1,2} = 0,$$

$$[\mathrm{I_b}]\quad 3n_1 - a_1 - c_1 + s(n_2 - 4) - \chi_{2,1} - \Sigma[\mu_{2,1}(\mu_2 - 2)] - b_{2,1} - 2c_{2,1} = 0,$$

$$[\mathrm{II}]\quad \begin{aligned} &n_1' - 2a_1 + 3n_1 + r_1 - 2c_1 + 2\chi_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + \zeta_1)\\ = {}&n_2' - 2a_2 + 3n_2 + r_2 - 2c_2 + 2\chi_2 + \Sigma(\mu_2 + \eta_2 + \zeta_2), \end{aligned}$$

$$[\mathrm{III}]\quad \left\{ \begin{aligned} &c_1' - 12a_1 + 24n_1 + \beta_1 + 3r_1 - 15c_1 + 2\sigma_1 + 6\chi_1\\ &\qquad + \Sigma(3x_1 + 3z_1 + 2\eta_1 + 4\zeta_1)\\ = {}&c_2' - 12a_2 + 24n_2 + \beta_2 + 3r_2 - 15c_2 + 2\sigma_2 + 6\chi_2\\ &\qquad + \Sigma(3x_2 + 3z_2 + 2\eta_2 + 4\zeta_2), \end{aligned} \right.$$

où les sommes $\Sigma$ *sont étendues aux points fondamentaux qui se trouvent aux points coniques et à des points simples.* $b_{1,2}$, $c_{1,2}$ et $\mu_{1,2}$ désignent les ordres des courbes de $[F_2]$ qui correspondent à la courbe double, à la courbe cuspidale et à un point fondamental de $[F_1]$; $b_{2,1}$, $c_{2,1}$ et $\mu_{2,1}$ ont les significations analogues.

**29.** Nous avons supposé dans le n° précédent que tous les points coniques et tous les points-clos soient fondamentaux; mais les formules trouvées resteront justes, s'il y a sur les deux surfaces:

1° des points coniques qui se correspondent et qui sont du même ordre $\mu$, du même genre $\pi$ (car $2(\pi - 1) = \nu + z + \zeta - 2\mu$), et doués des mêmes nombres $\eta$ et $\zeta$ de génératrices doubles et stationnaires *non-tangentes* à la courbe double et à la courbe cuspidale,

2° des points-clos qui se correspondent,

et 3° des points coniques doués des caractéristiques $\mu = 2$, $\nu = 2$, $y = \eta =$ etc. $= 0$, et des points-clos qui y correspondent,

et *si la somme* $\Sigma$ *est étendue à tous les points coniques des surfaces et aux points fondamentaux simples.**) Comme les points fondamentaux simples n'entrent pas dans l'équation [III], celle-ci exprime

*) Les équations de l'introduction du précédent article ne seront pas altérées si l'on étend la somme $\Sigma$ aussi à des points simples. — Pour un point conique non-fondamental est $\mu_{1,2} = 0$ (ou $\mu_{2,1} = 0$).

*une condition nécessaire,* mais non pas suffisante, à laquelle les nombres caractéristiques des deux surfaces doivent satisfaire.

On peut prouver que si deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un ont des points coniques qui se correspondent sans satisfaire aux conditions nommées, l'une ou l'autre de ces surfaces aura, au point conique qui s'y trouve, un point fondamental doué d'une direction fondamentale (voir le n° 7.). Les formules [I], [II] et [III] seront donc applicables à deux surfaces, douées des singularités nommées dans l'introduction du précédent article, dont les points se correspondent un-à-un, si *elles n'ont pas*

1° des courbes cuspidales correspondant l'une à l'autre (voir le n° 3.),

2° des points fondamentaux doués de directions fondamentales (voir le n° 7.),

3° des points fondamentaux qui se trouvent à des points-pinces ou à des points de la courbe cuspidale qui ne sont ni points coniques ni points-clos (voir le n° 7.).

## VI.

## Applications.

1. *Les surfaces* $[F_1]$ *et* $[F_2]$ *sont des plans.**) Dans ce cas les formules [I] nous donnent

$$\Sigma(\mu_{1,2}) = \Sigma(\mu_{2,1}) = 3(s-1).$$

$\Sigma(\mu_{1,2})$ et $\Sigma(\mu_{2,1})$ sont les ordres des courbes qui, dans chacun des plans, sont composées de toutes les courbes correspondant à des points fondamentaux.

L'équation [II] nous dit que les deux figures planes ont le même nombre de points fondamentaux.

L'équation [III] devient identique.

2. $[F_2]$ *est un plan,* $[F_1]$ *n'a aucune courbe cuspidale.* L'équation [III] nous donne la condition *nécessaire* (mais non pas suffisante):

$$(9)\qquad c_1' - 12\,a_1 + 24\,n_1 + \Sigma(3\,x_1 + 2\,\eta_1 + 4\,\zeta_1) - 24 = 0,$$

qui exprime que le genre de la surface $[F_1]$ doit être égal à zéro.

L'équation $[I_a]$ nous donne l'expression suivante de l'ordre de la courbe qui correspond à la courbe double de $[F_1]$

$$(10)\qquad b_{1,2} = s(n_1 - 4) + 3 - \Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1 - 2)].$$

L'équation $[I_b]$ nous donne

$$(11)\qquad \Sigma(\mu_{2,1}) = 3\,s - 3\,n_1 + a_1.$$

L'équation [II] nous donne l'expression suivante du nombre $m_2$ des points fondamentaux du plan $[F_2]$:

---

*) Les résultats indiqués ici sont trouvés par M. Cremona (*Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Nota IIa; tomo V* (*serie* 2a) *delle Memorie dell' Academia di Bologna* 1865 *et Giornale di matematiche tomo III.*

(12) $m_2 = n_1' - 2a_1 + 3n_1 + \Sigma(\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1) - 3$.

Dans le cas où la surface $[F_1]$ n'a aucun point fondamental les formules (10) et (11) sont démontrées par M. Clebsch *), et la formule (12) est d'accord avec les résultats trouvés par ce savant pour des surfaces particulières.

On peut appliquer les formules (9)—(12) au cas d'une surface $[F_1]$ douée d'un point conique $D$, dont nous désignerons les nombres caractéristiques comme ordinairement par $\mu$, $\nu$ etc.**), et qui est elle-même de l'ordre $\mu + 1$.

La courbe double de cette surface est composée de $y$ droites doubles, la courbe cuspidale de $z$ droites cuspidales, et il y a encore $\mu(\mu + 1) - 4y - 6z$ droites simples qui se trouvent sur la surface. Toutes ces droites passent par $D$. Il y a sur chacune des $z$ droites cuspidales encore un point conique

$$(\mu = 3, \quad \nu = 3, \quad z = 1, \quad y = \eta = \zeta = 0).$$

On peut trouver la classe $n'$ de cette surface et le nombre $c'$ de ses plans tangents stationnaires qui sortent d'un point quelconque, par le même procédé qui nous a donné les mêmes nombres pour la surface $[F_3]$, en cherchant les plans tangents qui passent par le point conique $D$. On trouve les coefficients difficiles à déterminer directement qu'on rencontre dans cette recherche, et les autres nombres caractéristiques de la surface, en faisant usage des formules données dans l'introduction du précédent article. Puis on peut vérifier les résultats trouvés en appliquant les formules (9)—(12) à la surface et à un plan qui y correspond. Les valeurs qu'on trouve sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
n &= \mu + 1 \\
a &= 2\mu + x \qquad\qquad (x = \nu + 2\eta + 3\zeta) \\
n' &= 2\mu + 3x - y - 3z - \eta - 2\zeta \\
c' &= 9x - 6z - 2\eta - 4\zeta \\
\varkappa &= 3x + 3y + 3z + \eta + 2\zeta \\
2\delta &= x(4\mu + x - 9) + 6z - 2\eta - 4\zeta \\
b &= y, \quad \varrho = y, \quad j = 2y, \quad f = 0 \\
c &= z, \quad r = 0, \quad \sigma = 0, \quad \chi = z, \quad \beta = 0, \quad i = 0
\end{aligned}$$

etc.

Nous projetterons cette surface du centre $D$ sur un plan. Alors les points de la surface et du plan se correspondent un-à-un. Afin de

*) *Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano*, Istituto Lombardo 1868; Mathematische Annalen Bd. I, p. 280 etc.

**) Quoique $z$ doive être égal à zéro dans l'application actuelle, je suppose qu'il ne sera pas dénué d'intérêt de connaître les nombres caractéristiques de la surface dans les cas où $z$ n'est pas zéro.

pouvoir faire usage des résultats trouvés dans cet article-ci, nous devons supposer que $z = 0$; car à une droite cuspidale correspondrait un point fondamental doué d'une direction fondamentale. Alors on a $c = 0$ [ce qu'on a aussi supposé dans les formules (9) — (12)]. La surface donnée n'a qu'un seul point fondamental, qui est placé au point conique d'ordre $\mu$. La courbe qui $y$ correspond est de l'ordre $\mu_{1,2} = \mu$. Les points fondamentaux du plan sont ceux où il est rencontré par les droites de la surface, et les courbes correspondantes sont ces droites, dont les $y$ sont doubles ($\mu_{2,1} = 2$) pendant que les autres $\mu(\mu + 1) - 4y$ $(= 2\mu + x - 2y)$ sont simples ($\mu_{2,1} = 1$). On a donc

$$m_2 = 2\mu + x - y,$$
$$\Sigma(\mu_{2,1}) = 2\mu + x.$$

Comme les droites doubles correspondent à des points, on a $b_{1,2} = 0$. Ces valeurs sont les mêmes qu'on trouverait au moyen des équations (10), (11) et (12), $s$ étant égal à $\mu + 1$.

Les nombres caractéristiques de la surface satisfont aussi à l'équation (9). Les coefficients de $\eta$ et de $\xi$ dans cette équation, qui est un cas particulier de [III], sont déterminés au moyen de cet exemple-ci, et c'est ainsi que nous avons trouvé les coefficients de $\overline{2j}$ et de $\overline{3j}$ dans l'expression, indiquée dans le n° 10. du précédent article, du nombre des plans tangents stationnaires du „cône circonscrit résidu".

3. *Les surfaces* $[F_1]$ *et* $[F_2]$ *sont deux surfaces réciproques* ($[F]$ et $[F']$). Dans ce cas on a

$$n_1 = n = n_2',$$
$$n_1' = n' = n_2,$$
$$a_1 = a = a' = a_2,$$
etc.

Un point où il y a une infinité de plans tangents sera un point fondamental, et s'il y a, au nombre de ces plans tangents à un même point, une infinité qui passent par une même droite, celle-ci sera une direction fondamentale. Les points fondamentaux se trouveront donc aux points coniques, aux points-pinces et aux points-clos. Ces dernières deux classes de points auront toujours des directions fondamentales, et les points coniques en auront, si les cônes tangents sont doués de génératrices doubles et cuspidales *non-tangentes* à la courbe double et à la courbe cuspidale. Comme nous n'avons pas eu égard, dans la déduction de nos formules, à des directions fondamentales, nous devons supposer qu'il n'y en ait sur aucune des deux surfaces, ou que

$$j = j' = \chi = \chi' = 0,$$

et que, pour tout point conique et pour tout plan tangent le long d'une courbe de $[F]$,

$$\eta = \zeta = 0 \quad \text{et} \quad \eta' = \zeta' = 0\,,$$

d'où

$$x = \nu \quad \text{et} \quad x' = \nu'.$$

La courbe correspondant à un point conique est celle le long de laquelle le plan correspondant est tangent à la surface réciproque, de façon que pour tous ces points et plans

$$\mu_{1,2} = \nu = x \quad \text{et} \quad \mu_{2,1} = \nu' = x'.$$

On aura encore

$$s = a\,,$$
$$b_{1,2} = \varrho\,, \qquad b_{2,1} = \varrho'\,,$$
$$c_{1,2} = \sigma\,, \qquad c_{2,1} = \sigma'.$$

L'équation $[\mathrm{I}_a]$ nous donnera alors, si l'on y remplace $3n' - c'$ par la quantité $3a - \varkappa$, qui y est égale (équation réciproque à la 3me équation (II) de l'introduction du précédent article):

$$a(n-2) = \varkappa + \varrho + 2\sigma + \Sigma\,[x(\mu - 2)]\,,$$

qui est la 1re équation (VIII) du précédent article.

L'équation $[\mathrm{I}_b]$ donne l'équation réciproque.

Nos deux autres équations, [II] et [III], nous donnent (comme $a = a'$) les résultats suivants

$$(13) \qquad 2n + r - 2c + \Sigma(\mu) = 2n' + r' - 2c' + \Sigma'(\mu')\,,$$

$$(14) \qquad \begin{aligned} &24n + \beta + 3r - 16c + 2\sigma + \Sigma(3x + 3z) \\ &= 24n' + \beta' + 3r' - 16c' + 2\sigma' + \Sigma'(3x' + 3z')\,. \end{aligned}$$

On ne peut déduire ces résultats-ci des équations qui sont indiquées dans l'introduction du précédent article et des équations réciproques, mais bien l'équation suivante qu'on trouve en soustrayant les deux membres de (14) de ceux de l'équation (13) après avoir multiplié ces derniers par 6:

$$(15) \quad \begin{cases} -12n + 3r + 4c - \beta - 2\sigma + \Sigma(6\mu - 3x - 3z) = \\ -12n' + 3r' + 4c' - \beta' - 2\sigma' + \Sigma'(6\mu' - 3x' - 3z')\,. \end{cases}$$

L'une des deux équations (13) et (14) peut remplacer l'une des deux équations que nous avons negligées dans l'introduction du précédent article.

Au lieu de déduire l'équation (15) des équations du précédent article, au nombre desquelles se trouve l'équation $i' = i$, on peut faire usage de l'équation (15), trouvée ici par une autre voie, pour démontrer*) que $i' = i$.

---

*) Voir le nº 11. du précédent article.

En effet, on trouve au moyen de la première équation (II) *) et de l'équation (IV)

$$c \,.\, n\,(n-1) = ac + 2\,bc + 3\,c + 3\,r + 6\,h + 9\,\beta\,.$$

En en soustrayant la dernière équation (IX) et la dernière équation (VIII) après avoir multiplié celle-ci par quatre, on trouve (comme $\chi = \eta = \xi = 0$)

(16) $$c + 3\,r - \beta - 5\,\sigma + 2\,i - \Sigma(z) + \Sigma'(2\,v') = 0.$$

On déduit, de la même manière, de la première équation (II), de l'équation réciproque à la deuxième équation (II) et des premières équations (VIII) et (IX):

$$-a + n' - \varkappa + \sigma + \Sigma(x) = 0,$$

ou bien, comme

$$\varkappa = c' + 3\,a - 3\,n' \text{ [équation réciproque à la 3me (II)]},$$

(17) $$4\,n' - 4\,a - c' + \sigma + \Sigma(x) = 0\,.$$

On voit, au moyen des équations (16) et (17) et des équations réciproques (et de l'équation $a' = a$), que les quantités

$$c + 3\,r - \beta - 5\,\sigma + 2\,i - \Sigma(z + 2\,v)$$

et

$$-4\,n + c + \sigma + \Sigma\,(x)$$

sont égales aux quantités réciproques qu'on forme en substituant les lettres accentuées aux lettres non-accentuées. La quantité

$$-12\,n + 4\,c + 3\,r - \beta - 2\,\sigma + 2\,i + \Sigma(3\,x - z - 2\,v)\,,$$

qui en est composée, satisfait donc à la même condition.

La même chose a lieu, selon l'équation (15), par rapport à la quantité

$$-12\,n + 4\,c + 3\,r - \beta - 2\,\sigma + \Sigma(6\,\mu - 3\,x - 3\,z),$$

et, par conséquent, aussi par rapport à

$$2\,i + \Sigma(6\,x - 6\,\mu + 2\,z - 2\,v)\,.$$

Or on a pour chaque point conique de $[F]$ et pour chaque plan tangent à $[F]$ le long d'une courbe [2me équation (VII)]

$$v = z + 3\,x - 3\,\mu\,,$$
$$v' = z' + 3\,x' - 3\,\mu';$$

(car, dans le cas actuel, où $\eta = 0$ et où l'on doit regarder séparément une nappe passant par un point conique formé par d'autres nappes, le cône tangent à un point conique ne peut être composé de parties au nombre desquelles il y a des plans). Donc

$$i = i'\,.$$

*) Les formules de l'introduction du précédent article sont, dans cette démonstration, les seules qui sont marquées de chiffres romains. —

Nous suivons, dans la déduction des équations (16) et (17), des calculs faits par M. Cayley. Phil. Trans. 1869, pp. 203 et 227.

## VII.

## Addition sur la représentation d'une surface sur un plan multiple.

On peut appliquer les mêmes procédés dont nous avons fait usage dans ce mémoire, à la recherche des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent d'une manière *multiple*. Nous nous contenterons ici de nous occuper de la représentation d'une surface sur un plan multiple, disons $N$-tuple. Dans ce cas, à chaque point de la surface correspond un seul point d'un plan, mais à un point du plan correspondent $N$ points de la surface. Pour les points d'une certaine courbe du plan, *la courbe de liaison* (Uebergangscurve), deux de ces $N$ points coïncident. On voit que cette courbe jouera le même rôle que, dans ce qui précède, la courbe de contact d'un cône circonscrit ou la courbe cuspidale, et nous désignerons son ordre par $A$, sa classe par $N'$ et le nombre de ses tangentes stationnaires par $C'$. Le plan multiple peut contenir des points fondamentaux: l'ordre $\mu$ d'un de ces points fondamentaux indique le nombre de nappes du plan multiple qui contribuent à le former [les points des $(N-\mu)$ autres nappes qui coïncident avec le point fondamental ont pour correspondants $(N-\mu)$ points isolés de la surface], et la classe $\nu$ indique le nombre des branches de la courbe de liaison qui passent par le point.

Si nous supposons que c'est la surface $[F_2]$ qui se réduit à un plan multiple, nous aurons, en faisant l'usage ordinaire des indices 1 et 2 et de la notation $s$, les équations

$$[1]\quad 3N - A + s(n_1 - 4) - \chi_{1,2} - \Sigma[\mu_{1,2}(\mu_1 - 2)] - b_{1,2} - 2c_{1,2} = 0$$

$$[2]\quad \begin{aligned} &n_1' - 2a_1 + 3n_1 + r_1 - 2c_1 + 2\chi_1 + \Sigma[\mu_1 + \eta_1 + 2\zeta_1] \\ &= N' - 2A + 3N + \Sigma(\mu_2)\end{aligned}$$

$$[3]\quad \begin{cases} c_1' - 12a_1 + 24n_1 + \beta_1 + 3r_1 - 15c_1 + 2\sigma_1 + 6\chi_1 \\ + \Sigma(3x_1 + 3z_1 + 2\eta_1 + 4\zeta_1) = C' - 12A + 24N + \Sigma(3\nu_2),\end{cases}$$

qu'on prouve comme les équations analogues $[I_a]$, [II] et [III]. Dans la démonstration de [1] on fait usage de l'équation suivante, que j'ai prouvée dans les „Mathematische Annalen" 3. Bd. p. 324,

$$[4]\qquad 2(P-1) = A - 2N,$$

où $P$ est le genre de la courbe de $[F_1]$ qui correspond à une section plane du plan multiple. (On pourrait appeler $P$ le genre de cette section qui est une droite multiple. L'analogie de l'équation [4] avec l'équation (1) dans le n° 1 est alors évidente.)

En appliquant au cas actuel les mêmes procédés qui donnent l'équation $[I_b]$, on voit qu'il faut remplacer, dans cette équation,

$$\big(s(n_2 - 1) - \Sigma[\mu_{2,1}(\mu_2 - 1)] - b_{2,1} - 3c_{2,1}\big) + c_{2,1}$$

par l'ordre $A_{2,1}$ de la courbe qui sur $[F_1]$ correspond à la courbe de liaison. On trouve ainsi

[5] $$A_{2,1} = a_1 + c_1 - 3n_1 + 3s - \Sigma(\mu_{2,1}).$$

Pour compléter ces résultats nous placerons ici l'équation générale dont l'équation [4] est un cas particulier:

$$A = 2(P_{2,1} - 1) - 2N(P_2 - 1),$$

où $P_2$ est le genre d'une courbe dans le plan d'image pénétrant toutes ses $N$ nappes, et $P_{2,1}$ celui de la courbe correspondante. Cette équation est prouvée à l'endroit cité.

M. Clebsch a appliqué la représentation sur un plan double à la recherche des propriétés *d'une surface du cinquième ordre douée d'une courbe double du quatrième ordre de la première espèce.**) Cette surface a les nombres caractéristiques:

$$n = 5, \quad a = 12, \quad c = r = \sigma = \chi = \beta = 0$$
$$n' = 20, \quad c' = 48.$$

Dans la représentation de cette surface sur un plan double dont M. Clebsch fait usage on a

$$N = 2, \quad s = 5, \quad A = 6, \quad N' = 16, \quad C' = 30,$$
$$b_{1,2} = 8, \quad A_{2,1} = 7, \quad P = 2.$$

Il y a sur la surface *trois* points fondamentaux simples, auxquels correspondent des droites ($\mu_1 = 1$, $\mu_{1,2} = 1$). Dans le plan il y a deux points fondamentaux: on a

pour l'un $\quad \mu_2 = 2, \quad \nu_2 = 4, \quad \mu_{2,1} = 3,$

pour l'autre $\quad \mu_2 = 2, \quad \nu_2 = 2, \quad \mu_{2,1} = 2.$

Ces quantités satisfont aux équations [1] — [5], qui pourraient aider à les trouver. —

Nous proposons comme exercice l'application de nos formules à la question suivante:

Qu'on représente *une surface du sixième ordre, douée de deux droites doubles qui ne se rencontrent pas*, sur un plan double en projetant tous ses points sur le plan par des droites qui rencontrent les droites doubles; quelles seront alors les propriétés de l'image, et quelles propriétés de la surface peut on trouver au moyen de cette représentation?

Quant à la solution de ces questions je me suis borné, moi-même, à la détermination des nombres qui entrent dans mes formules.

*) Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 15. Bd.

Copenhague, Février 1871.

# Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen*) vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen.

Von Felix Klein in Göttingen und Sophus Lie in Christiania.

In dem nachstehenden Aufsatze wird eine geometrische Schlussweise mit Consequenz angewandt werden, die wir, obwohl sie durchaus nicht neu ist, gleich hier beim Eingange unserer Arbeit mit Bestimmtheit bezeichnen wollen.

Dieselbe findet bei der Untersuchung aller solcher geometrischer Gebilde ihre Stelle, bei welchen man Transformationen kennt, durch die sie in sich selbst übergeführt werden.

Sie lässt sich in dem allgemeinen Satze zusammen fassen: *dass ein beliebiges anderes Gebilde, welches zu dem ursprünglichen in irgend einer durch die zugehörigen Transformationen unzerstörbaren Beziehung steht, durch diese Transformationen in solche Gebilde übergeht, welche dieselbe Beziehung zu dem ursprünglichen haben***).

Zum Beweise wende man auf beide Gebilde gleichzeitig diese Transformationen an; ihre gegenseitige Beziehung bleibt dabei, nach Voraussetzung, unverändert dieselbe. Ob man aber auf beide Gebilde oder nur auf das hinzutretende die Transformationen anwendet, macht keinen Unterschied, weil ja das ursprüngliche durch dieselben in sich übergeht. Unser allgemeiner Satz ist also bewiesen.

Wir betrachten nun diesen Satz in den einzelnen Fällen, auf die er Anwendung findet, und geben ihm, wenn dies angeht, eine den speciellen Voraussetzungen entsprechende Form.

Um dies völlig klar zu stellen, folge hier ein möglichst einfach gewähltes Beispiel.

---

*) Unter „einfach unendlich viel" sei hier, wie auch immer im Folgenden, eine *continuirliche* Mannigfaltigkeit von einer Dimension verstanden.

**) Diese Schlussweise ist seither wohl besonders bei kinematischen Untersuchungen angewandt worden, vergl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Theil I, Cap. III.

Betrachten wir eine Schraubenlinie $A$. Dieselbe geht durch eine continuirliche Bewegung (die zugehörige Schraubenbewegung) in sich über. Hieraus schliesst man, dass der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln eine Schraubenlinie ist, die mit $A$ die Axe und die Höhe der Schraubengänge gemein hat. Man construire nämlich in einem beliebigen Punkte von $A$ die zugehörige Schmiegungskugel und deren Mittelpunkt. Wenn man auf das so gebildete System die zu $A$ gehörigen Bewegungen anwendet, so bleibt $A$ selbst unverändert, während die Schmiegungskugel in die Schmiegungskugel in einem anderen Punkte von $A$, ihr Mittelpunkt in den Mittelpunkt dieser Kugel übergegangen ist: da Berührungs- und metrische Relationen bei der Bewegung unverändert bleiben. Man erhält also die Mittelpunkte aller Schmiegungskugeln, wenn man einen auswählt und auf ihn die zu $A$ gehörige Schraubenbewegung anwendet, was der zu beweisende Satz ist.

Die hiermit dargelegte Schlussweise erscheint um so fruchtbarer, je einfacher die Transformationen, durch welche das ursprüngliche Gebilde in sich übergeht, an sich und in ihrer gegenseitigen Beziehung sind, so wie, je grösser ihre Zahl ist.

Zwei Arbeiten, in denen wir von dieser Schlussweise als Hilfsmittel Gebrauch machten, waren geeignet, uns ihre Fruchtbarkeit in solchen Fällen zu zeigen.

In der einen Arbeit*) behandelte der eine von uns (Lie) den Linien-Complex, dessen Linien ein festes Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse schneiden. Ein derartiger Complex geht durch die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen, welche sein festes Tetraeder unverändert lassen, in sich selbst über. Von dieser fundamentalen Eigenschaft ausgehend liessen sich nun eine Reihe weiterer Eigenthümlichkeiten desselben unmittelbar ableiten. Uebrigens werden wir eine aus dieser Arbeit entstandene gemeinsame ausführlichere Arbeit bei einer nächsten Gelegenheit in dieser Zeitschrift veröffentlichen.

In der anderen Arbeit**) betrachtete der andere von uns (Klein) insonderheit die Kummer'sche Fläche 4. Grades mit 16 Knotenpunkten. Die Untersuchungsmethode ging davon aus, dass diese Fläche durch 16 lineare und 16 reciproke Transformationen, welche unter einander vertauschbar sind, in sich selbst übergeht. Diese Transformationen lassen sich — was übrigens hier nicht in Betracht kommt — durch den Uebergang von Punkt- und Ebenen-Coordinaten zu Linien-Coordinaten im Raume in sehr einfacher Weise untersuchen; ist das geschehen, so erhält man, gemäss der auseinandergesetzten Schlussweise, eine Reihe weiterer Eigenschaften der Kummer'schen Fläche.

---

*) Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes. Gött. Nachrichten 1870, 2.

**) Zur Theorie der Complexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. II, 3.

Hiernach lag es uns nahe, überhaupt solche geometrische Gebilde aufzusuchen, welche durch möglichst einfache und möglichst viele Transformationen in sich übergehen, und nachzusehen, welche Eigenschaften solche Gebilde gemäss der in Rede stehenden Schlussweise besitzen.

Anknüpfend an die genannte Arbeit über den Linien-Complex, dessen Gerade ein festes Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse schneiden, wandten wir unsere Aufmerksamkeit solchen Curven und Flächen zu, welche durch geschlossene Systeme von einfach bez. zweifach unendlich vielen unter sich vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. So entstand ein gemeinsamer Aufsatz, der unter dem Titel: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces in den Comptes Rendus des vergangenen Jahres (6. und 13. Juni) erschienen ist.

In der gegenwärtigen Abhandlung wollen wir nun den Inhalt dieser Arbeit, soweit er sich auf *ebene Curven* bezieht, ausführlicher darlegen. Indem wir uns auf die Betrachtung ebener Curven beschränken, wird es möglich sein, der Darstellung eine abgerundetere Form zu geben, als dies bei Zuziehung der betreffenden räumlichen Gebilde bei deren grosser Mannigfaltigkeit gelingen will, ohne dass wir desswegen auf die Auseinandersetzung der allgemeinen Gesichtspunkte zu verzichten brauchten, welche bei der Untersuchung solcher Gebilde in Betracht kommen.

Nur einen Punkt der allgemeinen Theorie, zu dessen Discussion man bei der Untersuchung der genannten ebenen Curven keine rechte Veranlassung hat, wollen wir, abgetrennt von dem Uebrigen, in einem besonderen Paragraphen (§ 7) behandeln. Derselbe betrifft die Integration solcher Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 Variabeln, die durch unendlich viele Transformationen in sich übergehen. Man kann dieselbe immer auf die Integration einer anderen Differentialgleichung zurückführen, die einzig von der Art der unendlich vielen Transformationen abhängt.

Die Darstellung der in den Kreis unserer Betrachtung fallenden räumlichen Verhältnisse haben wir aus genannten Gründen hier ausgeschlossen; wir hoffen indessen, bei einer nächsten Gelegenheit eine solche geben zu können. Dabei würde es sich weniger um die Erledigung principieller Fragen handeln, als vielmehr darum, die Fruchtbarkeit der in dem gegenwärtigen Aufsatze entwickelten Gesichtspunkte an dem reicheren Material, welches die Raum-Geometrie bietet, darzulegen.

*Gegenstand der nachstehenden Untersuchung sind also diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen unter sich vertauschbaren linearen Transformationen in*

*sich übergehen**). Wir werden für diese Curven eine beliebig zu erweiternde Reihe von Eigenschaften ableiten; insbesondere werden wir zeigen, dass dieselben durch unendlich viele geometrische Verwandtschaften in sich übergehen. Wir legen übrigens auf diese Entwickelungen nur insofern Werth, *als wir zu denselben einzig und allein vermöge Raisonnements gelangen und nicht nur die Richtigkeit der Resultate, sondern die innere Nothwendigkeit derselben einsehen.*

Wir beginnen damit, dass wir die verschiedenen in den Kreis unserer Betrachtung fallenden Curven aufzählen. Unter diesen Curven findet sich insbesondere, wie hier gleich angeführt sein soll, *die logarithmische Spirale.* Die bekannte merkwürdige Eigenschaft dieser Curve: dass sie durch eine Anzahl einfacher Operationen in eine Curve derselben Art übergeführt wird**), subsumirt sich unter allgemeinere Eigenschaften der von uns betrachteten Curven. Gleichzeitig ergeben sich eine Reihe bis jetzt, wie es scheint, nicht bemerkter Eigenschaften der logarithmischen Spirale. Man kann wohl durch die von uns angewandte Schlussweise die Theorie der logarithmischen Spirale auf ihren einfachsten Ausdruck zurückführen.

Es mag ferner noch die folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden.

Die Betrachtungen über geschlossene Systeme vertauschbarer linearer Transformationen, wie sie im Folgenden vorkommen werden, haben eine intime Beziehung zu Untersuchungen, welche in der Theorie der Substitutionen und damit zusammenhängend in der Theorie der algebraischen Gleichungen auftreten***). Indess findet *ein* durchgreifender Unterschied Statt zwischen der Form, unter der diese Probleme in den genannten Disciplinen und unter der sie hier auftreten, nämlich der, dass in jenen immer von discret veränderlichen, hier von continuirlich veränderlichen Grössen die Rede ist. Dadurch vereinfachen sich im vorliegenden Falle die zu lösenden Fragen in hohem Grade. Vielleicht ist es für die Durchführung der complicirteren Betrachtungen, welche bei discreten Variabeln nöthig werden, richtig, dieselben zuerst, in einer ähnlichen Weise, wie dies nachstehend geschieht, für continuir-

---

*) Die hier gegebene und auch in der Ueberschrift zu Grunde gelegte Definition der in Betracht kommenden Curven ist mit der scheinbar weiteren gleichbedeutend: Curven, welche durch einfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen. Es liegt dies daran, dass Curven Mannigfaltigkeiten von *einer* Dimension vorstellen (vergl. § 1. n. 4. Note). Wir haben vorgezogen, die Definition in der gewählten Form zu geben, weil sie in derselben auf die unseren Curven analogen Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen ausgedehnt werden kann.

**) Vergl. hierzu insbesondere den Artikel „Spirale" in Klügel's mathematischem Wörterbuch.

***) Cf. Serret, Traité d'Algèbre Supérieure. t. II, 4. und Camille Jordan, Traité des Substitutions et des Equations Algébriques. t. I, II, 2.

liche Veränderliche zu behandeln und erst hinterher die Variabilität der Veränderlichen zu beschränken.

§. 1.

## Einfach unendliche, geschlossene Systeme von vertauschbaren linearen Transformationen. *W*-Curven.

1. Von linearen Transformationen in der Ebene giebt es bekanntlich fünf Classen.

Bei Transformationen der *ersten* Classe bleiben die 3 Ecken und die 3 Seiten eines bestimmten Dreiecks (des Fundamentaldreiecks) unverändert, die übrigen Punkte und Geraden der Ebene verändern ihre Lage. Eine Seite des Dreiecks mag unendlich weit rücken, die anderen sollen bez. mit der $X$- und $Y$-Axe zusammenfallen*). Dann ist eine solche Transformation dargestellt durch:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= by, \end{aligned}$$

wobei $a$ und $b$ zwei verschiedene Constante bedeuten.

Die Transformationen der *zweiten* und *dritten* Classe lassen sich als Gränzfall der Transformationen erster Classe ansehen. Die Transformationen zweiter Classe sind dadurch characterisirt, dass für sie zwei der Ecken und zwei der Seiten des Fundamentaldreiecks bez. zusammenfallen; bei denen dritter Classe fallen sämmtliche Seiten und bez. sämmtliche Ecken des Fundamentaldreiecks zusammen. Diejenige gerade Linie, in welche für die Transformationen zweiter Classe zwei Seiten des Fundamentaldreiecks zusammenfallen, mag unendlich weit rücken; die dritte Seite des Dreiecks werde zur $X$-Axe gewählt. Die $Y$-Axe sei eine beliebige Gerade, welche durch den isolirten dritten Eckpunkt des Dreiecks geht. So ist die Transformation durch die Formel gegeben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y + b. \end{aligned}$$

Bei den Transformationen dritter Classe soll die Gerade, in welche die 3 Seiten des Fundamentaldreiecks zusammenfallen, unendlich weit rücken. Die $X$-Axe enthalte den Punkt, in welchen die 3 Eckpunkte des Dreiecks zusammengerückt sind; die $Y$-Axe sei eine beliebige Gerade. Dann hat die Transformation die Form:

---

*) Wenn wir von einer besonderen Lage des Fundamentaldreiecks und von nicht homogenen Coordinaten Gebrauch machen, so geschieht dies, weil sich dann die geometrischen Beziehungen, welche wir betrachten müssen, besser bezeichnen und die Formeln, welche vorkommen, kürzer schreiben lassen. Wir verstehen diese Ausdrucksweise immer allgemein: d. h. nicht nur in Beziehung auf die besondere, sondern in Beziehung auf eine beliebige Annahme des Fundamentaldreiecks und der Coordinaten.

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' &= x + a\,, \\ y' &= y + ax + b\,. \end{aligned}$$

Die Transformationen der *vierten* Classe sind die sogenannten perspectivischen. Bei ihnen bleibt ein isolirter Punkt (Centrum der Perspectivität) und eine Punktreihe (Axe der Perspectivität) und in Folge dessen eine isolirte gerade Linie (die Axe) und ein Büschel gerader Linien (diejenigen die durch das Centrum gehen) unverändert. Solche Transformationen werden durch (1) dargestellt, wenn entweder $a = b$, oder eine der beiden Grössen $= 1$. Unter Zugrundelegung der ersten Annahme haben wir also für Transformationen der vierten Classe:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x' &= ax\,, \\ y' &= ay\,. \end{aligned}$$

Die Transformationen der *fünften* Classe sind als ein Gränzfall derer vierter Classe anzusehen. Sie entstehen aus diesen, indem das Centrum der Perspectivität auf die Axe derselben rückt. Nehmen wir die Axe unendlich weit, die $X$- und $Y$-Axe beliebig, so hat man für diese Transformationen die Formel:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x' &= x + a\,, \\ y' &= y + b\,. \end{aligned}$$

Bei der gewählten Coordinatenbestimmung kommt die Transformation auf eine Translation der Ebene hinaus.

Wegen seiner ausgezeichneten metrischen Eigenschaften mag hier noch ein besonderer Fall der Transformationen erster Classe hervorgehoben sein. Derselbe entspricht der Annahme, dass zwei der Ecken des Fundamentaldreiecks mit den unendlich weit entfernten imaginären Kreispunkten zusammenfallen. Alsdann besteht die Transformation in einer Rotation der Ebene um den dritten Eckpunkt des Fundamentaldreiecks und einer ihrer Länge proportionalen Vergrösserung (oder Verkleinerung) der von diesem Eckpunkte ausgehenden Radiivectores.

2. Man wende nun eine jede der Transformationen (1) . . . (5) $\lambda$ mal hinter einander an. So erhält man eine Transformation, welche dieselben Elemente der Ebene unverändert lässt, wie die ursprüngliche. Dieselbe ist in den 5 Fällen bez. durch die nachstehenden fünf Gleichungen gegeben:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} x' &= a^\lambda x\,, \\ y' &= b^\lambda y\,, \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} x' &= a^\lambda x\,, \\ y' &= y + b\lambda\,, \end{aligned} \qquad \text{III.}\quad \begin{aligned} x' &= x + a\lambda\,, \\ y' &= y + a\lambda x + b\lambda \\ &\quad + a^2 \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\,, \end{aligned}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} x' &= a^\lambda x\,, \\ y' &= a^\lambda y\,, \end{aligned} \qquad \text{V.}\quad \begin{aligned} x' &= x + a\lambda\,, \\ y' &= y + b\lambda\,. \end{aligned}$$

Nun fasse man $\lambda$ nicht mehr als eine gegebene Zahl, *sondern als einen continuirlich veränderlichen Parameter* auf. Dann stellen die Gleichungen I ... V Systeme von einfach unendlich vielen linearen Transformationen dar, welche die folgenden Eigenschaften haben:

*Zwei beliebige Transformationen des Systems geben, hinter einander angewandt, unabhängig von ihrer Reihenfolge, dieselbe neue Transformation.*

*Diese neue Transformation ist selbst eine Transformation des Systems.*

Mit Rücksicht auf die erste Eigenschaft heissen die Transformationen des Systems *vertauschbar*, mit Bezug auf die zweite*) heisst das System *geschlossen***).

3. Unter den Transformationen der Systeme I ... V findet sich jedesmal eine, welche wir als die *unendlich kleine* Transformation des Systems bezeichnen, insofern sie $x$, $y$ in solche $x'$, $y'$ überführt, die sich von den $x$, $y$ nur um unendlich kleine Grössen unterscheiden. Man erhält diese unendlich kleinen Transformationen, wenn man in I ... V $\lambda$ unendlich klein, also etwa $= d\lambda$, nimmt. Beispielsweise findet man für I:

$$\begin{aligned} x' &= x + \log a \,.\, d\lambda \,.\, x\,, \\ y' &= y + \log b \,.\, d\lambda \,.\, y\,, \end{aligned} \tag{6}$$

und für V:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \,.\, d\lambda\,, \\ y' &= y + b \,.\, d\lambda\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Man kann sich die Systeme I ... V durch unendlich-malige Wiederholung der betreffenden unendlich kleinen Transformation entstanden denken.

Es ist nun auch umgekehrt klar, dass es keine weiteren Systeme einfach unendlich vieler linearer Transformationen geben kann, die die in n. 2. genannten beiden Eigenschaften besitzen, als die aufgestellten I .... V. Denn ein derartiges System muss alle Transformationen enthalten, welche sich aus einer beliebigen Transformation desselben durch Wiederholung ergeben. Man wähle nun die in dem Systeme enthaltene unendlich kleine Transformation. Dieselbe gehört entweder der Classe (1) oder (2) .... oder (5) an und führt bei un-

*) Im vorliegenden Falle ist die erste Eigenschaft nothwendig vorhanden, wenn die zweite erfüllt ist. Es ist dies aber nur dem Umstande zuzuschreiben, dass wir Systeme mit nur einfach unendlich vielen linearen Transformationen betrachten. Beispielsweise bilden die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen, die einen Kegelschnitt unverändert lassen, auch ein geschlossenes System; aber vertauschbar sind die Transformationen dieses Systems nicht.

**) Der Ausdruck „ein geschlossenes System von Transformationen" entspricht also ganz dem, was man in der Theorie der Substitutionen als „eine Gruppe von Substitutionen" zu bezeichnen pflegt.

endlich oft wiederholter Anwendung zu einem der Systeme I oder II . . . . . oder V mit Nothwendigkeit hin.

4. *Wir fragen nun nach solchen Curven, welche durch die Transformationen der Systeme I . . . V in sich übergehen.*

Zuvörderst ist klar, dass es solche Curven giebt. Man transponire nämlich einen in der Ebene beliebig angenommenen Punkt $p$ durch alle Transformationen eines der Systeme. Dann beschreibt er eine Curve, welche, mit Bezug auf dieses System, die verlangte Eigenschaft hat. Zum Beweise sei $q$ ein beliebiger Punkt der Curve. Man wende auf ihn irgend eine Transformation des Systems an. So geht er in einen Punkt über, in den $p$ übergeht, wenn man $p$ zunächst durch eine passende Transformation des Systems in $q$ überführt und alsdann auf $p$ die betreffende Transformation anwendet. Zwei Transformationen des Systems hinter einander angewandt geben aber eine neue Transformation des Systems; $p$ geht also, und mithin auch $q$, in einen Punkt der Curve über. Bei einer beliebigen Transformation des Systems geht also die Gesammtheit der Punkte der Curve in die Gesammtheit derselben Punkte, mit anderen Worten, die Curve in sich selbst über, w. z. b.

Die hiermit definirten Curven werden wir im Folgenden, der Kürze wegen, mit einem Buchstaben, als *Curven W* bezeichnen*).

*W*-Curven, welche durch dieselben Transformationen in sich übergehen, nennen wir *W*-Curven *eines Systems*. Von *W*-Curven eines Systems giebt es einfach unendlich viele. Wendet man nämlich auf alle (zweifach unendlich vielen) Punkte der Ebene die Transformationen eines Systems an, so beschreibt jeder eine demselben angehörige *W*-Curve; aber von diesen Curven sind, nach der vorstehenden Auseinandersetzung, jedesmal einfach unendlich viele identisch, nämlich alle diejenigen, die aus Punkten einer selben dem System angehörigen *W*-Curve hervorgehen.

Es sei hier gleich angeführt, dass die Herren Clebsch und Gordan in einem gemeinsamen Aufsatze in diesen Annalen (Zur Theorie der ternären Formen mit contragredienten Variabeln. t. I, 3.) eben

*) Wenn überhaupt ein geometrisches Gebilde durch eine Transformation in sich übergeht, so geht es selbstverständlicher Weise auch in sich über durch jede Transformation, welche aus der einen durch Wiederholung entsteht. Gesetzt nun, eine Curve gehe durch unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Unter denselben findet sich eine unendlich kleine. Durch unendlichmalige Wiederholung derselben entsteht eins der Systeme I . . . V. Durch alle Transformationen des Systems geht die Curve in sich selbst über; mit anderen Worten, sie ist eine von den im Texte betrachteten Curven. Hieraus folgt, was schon in der Einleitung gesagt wurde: dass für diese Curven auch die scheinbar weitere Definition gilt: diejenigen Curven, welche durch einfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen.

die hier zu untersuchenden *W*-Curven betrachtet haben, nur unter anderen Gesichtspunkten, als die sind, von denen wir hier ausgehen. Bei ihnen tritt die Curve nur beiläufig auf, als geometrischer Ort für einen Punkt, der durch wiederholte Anwendung derselben linearen Transformation transponirt wird, und die Untersuchung dreht sich darum, welche speciellen Eigenschaften die so erzeugte Punktreihe für besondere Annahmen der Constanten (Invarianten) der betreffenden linearen Transformation hat.

5. Für die *W*-Curven erhalten wir, dem entsprechend, dass man sich die Transformationen des zugehörigen Systems durch Wiederholung einer unendlich kleinen entstanden denken kann, noch eine zweite Definition. Wir wollen dabei von der Betrachtung des Systems I. ausgehen. Die in demselben enthaltene unendlich kleine Transformation (6) führt einen Punkt $x$, $y$ in einen benachbarten Punkt $x + dx$, $y + dy$ über, wobei offenbar:

$$dx = \log a \,.\, d\lambda \,.\, x\,,$$
$$dy = \log b \,.\, d\lambda \,.\, y\,,$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{\log a \cdot x} = \frac{dy}{\log b \cdot y}, \tag{9}$$

und *dieses ist eine Differentialgleichung, als deren Integrale die W-Curven des Systems erscheinen.*

Auf ganz ähnliche Weise wird man zu Differentialgleichungen für die *W*-Curven der Systeme II ... V geführt. Dieselben haben die Gestalt: $dx : dy = p : q$, wo $p$, $q$ zwei ganze lineare Functionen von $x$ und $y$ bezeichnen. Würde man in diese Differentialgleichung statt $x$ und $y$ irgend drei homogene Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einführen, welche sich auf ein beliebig gewähltes Coordinatendreieck beziehen, so würde sie die allgemeinere Form annehmen: $d\xi : d\eta : d\zeta = p : q : r$, wo $p$, $q$, $r$ jetzt homogene lineare Functionen von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind.

Andererseits ist klar, dass jede solche Differentialgleichung die *W*-Curven eines Systems zu Integralen hat. Eine solche Differentialgleichung sagt nämlich aus, dass gewisse gesuchte Curven durch eine gegebene unendlich kleine lineare Transformation in sich übergehen*). Eine Curve, die dies thut, geht aber auch durch alle Transformationen des Systems, welches durch Wiederholung der unendlich kleinen Transformation entsteht, in sich über. Also:

*Die W-Curven lassen sich auch definiren als die Integrale der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:*

*) In ähnlicher Weise lässt sich jede Differentialgleichung auffassen. Die betreffende unendlich kleine Transformation ist bei linearen Differentialgleichungen eindeutig, gehört also zu den sogenannten Cremona'schen Transformationen.

$$(10) \qquad d\xi : d\eta : d\zeta = p : q : r,$$

*wo $p$, $q$, $r$ homogene lineare Functionen von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind, und zwar sind die W-Curven eines Systems die Integrale desselben Systems von Differentialgleichungen.*

Die bekannte Umformung der Differentialgleichungen (10) auf eine canonische Form ist gleichbedeutend mit der Umformung der durch dieselbe ausgesprochenen unendlich kleinen linearen Transformation auf ihre canonische Form.

6. Wir wenden uns dazu, die Gleichungen der $W$-Curven aufzustellen, insbesondere diejenigen sonst bekannten Curven aufzuzählen, welche unter denselben enthalten sind.

Allgemein erhalten wir die Gleichung der $W$-Curven, wenn wir aus der Gleichung des zugehörigen Transformationen-Systems I oder II . . . oder V den Parameter $\lambda$ eliminiren und $x$, $y$ als Anfangswerthe, $x'$, $y'$ als veränderliche Grössen betrachten.

Um diese Elimination nach gleichförmiger Methode durchführen zu können, bemerken wir, dass sich die Systeme I, II, III, IV in der folgenden Weise schreiben lassen, die der Form entspricht, welche das System V von vorne herein hat:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} \log x' &= \log x + A\lambda \\ \log y' &= \log y + B\lambda \end{aligned} \qquad\qquad \text{II.} \quad \begin{aligned} \log x' &= \log x + A\lambda \\ y' &= \quad\; y + B\lambda \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} x' &= \qquad\quad x + A\lambda \\ (x'^2 - 2y') &= (x^2 - 2y) + B\lambda \end{aligned} \qquad\qquad \text{IV.} \quad \begin{aligned} \log x' &= \log x + A\lambda \\ \log y' &= \log y + A\lambda . \end{aligned}$$

Für die vorkommenden Constanten haben wir kurz $A$, $B$ geschrieben, da es auf die Ausdrücke derselben in den früheren Constanten $a$, $b$ nicht ankommt.

Fügen wir noch die ursprüngliche Gleichung des Systems V hinzu, indem wir in derselben statt $a$, $b$ auch $A$, $B$ schreiben, also:

$$\text{V.} \quad \begin{aligned} x' &= x + A\lambda \\ y' &= y + B\lambda . \end{aligned}$$

Eliminirt man nun zwischen den beiden Gleichungen jedes Systems $\lambda$, so erhält man die Gleichungen der betreffenden $W$-Curven. Dieselben werden, indem man noch statt $x$, $y$ bez. $x_0$, $y_0$ schreibt und bei $x'$, $y'$ die Accente fortlässt:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{I.} & B(\log x - \log x_0) = A(\log y - \log y_0), \\ \text{II.} & B(\log x - \log x_0) = A(\quad y - \quad y_0), \\ \text{III.} & B(\quad x - \quad x_0) = A[(x^2 - 2y) - (x_0^2 - 2y_0)], \\ \text{IV.} & \quad \log x - \log x_0 = \quad \log y - \log y_0, \\ \text{V.} & B(\quad x - \quad x_0) = A(\quad y - \quad y_0). \end{array} \right.$$

Statt I und IV mögen wir noch schreiben:

$$(12) \qquad \begin{cases} \text{I.} & \left(\frac{x}{x_0}\right)^B = \left(\frac{y}{y_0}\right)^A, \\ \text{IV.} & \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}. \end{cases}$$

7. Wir nennen kurz einige in den Gleichungen (11), (12) enthaltene bekanntere Curven.

Zunächst die Gleichung (11, V.) stellt gerade Linien dar und zwar bei festem $A:B$ gerade Linien derselben Richtung. Man sieht an diesem einfachsten Beispiel deutlich, wie die Curven $W$ eines Systems durch die zugehörigen linearen Transformationen in sich übergehen. Die zugehörigen linearen Transformationen bestehen im vorliegenden Falle in gleichgerichteten Translationen der Ebene, dabei verschieben sich die parallelen Geraden, welche dieselbe Richtung haben, in sich selbst.

Uebrigens geht aus dieser geometrischen Vorstellung hervor, dass man nicht nur diese Linien, sondern auch die unendlich weit liegenden Punkte als $W$-Curven des Systems V. anzusehen hat. Denn dieselben gehen durch die Transformationen des Systems auch in sich selbst über. An und für sich sind dieselben den Transformationen des Systems V gegenüber mit den geraden Linien, die durch dieselben unverändert bleiben, ganz gleichberechtigt. Sie entgehen nur der hier gewählten analytischen Darstellung; hätten wir statt Punkt-Coordinaten Linien-Coordinaten gebraucht, so würden wir zunächst nur die Punkte und erst hinterher, durch Ueberlegung, die geraden Linien gefunden haben. Diese Bemerkung wird uns später wiederholt entgegentreten (cf. n. 15.).

Die Gleichung IV. stellt gerade Linien dar, welche durch den Coordinaten-Anfangspunkt (das Centrum der Perspectivität) gehen. Als $W$-Curven des Systems müssen wir ausser diesen geraden Linien auch noch die Punkte zählen, welche unendlich weit liegen, d. h. der Axe der Perspectivität angehören.

Gleichung (11, III.) stellt Parabeln dar, deren Durchmesser zur $X$-Axe parallel sind. Diejenigen Parabeln, welche denselben Werthen von $A$, $B$ zugehören, d. h. also $W$-Curven desselben Systems sind, berühren sich in unendlicher Entfernung auf der $X$-Axe vierpunktig. Als $W$-Curven des Systems III. erhält man also, allgemein zu reden, sich vierpunktig berührende Kegelschnitte.

Die Gleichung (11, II.) stellt transscendente Curven dar von der Art der logarithmischen Linie: $y = \log x$.

Gleichung (11, I.) endlich umfasst zunächst alle sogenannten Parabeln. Unter denselben finden sich, entsprechend einem rationalen Verhältnisse von $A:B$ unendlich viele algebraische Curven.

Setzt man insbesondere $A = 1$, $B = -1$ oder $A = 1$, $B = 2$ oder $A = 2$, $B = 1$, so hat man Kegelschnitte. Dieselben gehen durch zwei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks hindurch, indem sie in jedem die bezüglich dem anderen gegenüberliegende Dreiecksseite berühren*).

Weiterhin findet man Curven dritter Ordnung mit Spitze u. s. w.

Bei beliebiger Annahme von $A$ und $B$ finden sich unter den $W$-Curven des zugehörigen Systems die drei Seiten des Fundamentaldreiecks, und auch, in dem eben auseinandergesetzten Sinne, dessen drei Eckpunkte.

Zu den $W$-Curven (11, I.) gehört namentlich auch die schon im Eingange erwähnte *logarithmische Spirale.* Man wird auf dieselbe geführt, wenn man, wie dies schon in n. 1. geschah, das Fundamentaldreieck so particularisirt, dass zwei seiner Eckpunkte in die beiden unendlich weit entfernten imaginären Kreispunkte hineinfallen. Diejenigen logarithmischen Spiralen, welche mit den Radii vectores vom Pole gleiche Winkel bilden, sind $W$-Curven desselben Systems. Bei den linearen Transformationen, durch welche die logarithmische Spirale in sich selbst übergeht, bleiben die Winkel unverändert, alle ebenen Figuren sich selbst ähnlich.

## § 2.

## Einige Eigenschaften der $W$-Curven.

8. Wir werden uns in diesem Paragraphen, in welchem wir beabsichtigen, die Anwendung der im Eingange erwähnten Schlussweise auf die $W$-Curven als solche darzulegen, auf die Betrachtung der $W$-Curven des Systems I. beschränken. Die analogen Betrachtungen für die $W$-Curven der anderen Systeme wird man ohne Weiteres dem hier Vorgetragenen nachbilden können.

Wir beginnen mit zwei Beispielen.

**1. Beispiel.** Denken wir uns mehrere demselben Systeme I. angehörige $W$-Curven gegeben und an eine derselben eine Tangente gezogen. Bei Anwendung der zugehörigen linearen Transformationen bleiben die Curven $W$ selbst unverändert, während die Tangente nach und nach die Lage jeder anderen Tangente derselben Curve einnimmt. Dabei gehen der Berührungspunkt mit der einen $W$-Curve und die Schnittpunkte mit den anderen bez. in den Berührungspunkt und die

---

*) Man hat hiernach den Satz: Kegelschnitte, welche sich in zwei Punkten berühren, gehen durch dieselben einfach unendlich vielen linearen Transformationen in sich über. Rücken die beiden Berührungspunkte unendlich nahe, so ergiebt sich der im Texte unter III. genannte Fall der vierpunktig berührenden Kegelschnitte.

Schnittpunkte der neuen Tangente mit derselben Curve über. Hieraus der Satz: *dass die Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte eine Punktreihe bilden, die, für beliebige Lagen der Tangente, derselben Punktreihe projectivisch ist.* — Da die 3 Seiten des Fundamentaldreiecks immer auch als $W$-Curven des gegebenen Systems zu betrachten sind, so folgt das Corollar: *Das Doppelverhältniss des Berührungspunktes einer Tangente einer $W$-Curve und ihrer drei Durchschnittspunkte mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist constant*).*

**2. Beispiel.** Sei eine Curve $W$ gegeben. Man schneide dieselbe durch irgend eine gerade Linie $a$ und construire in beliebigen $n$ ihrer Schnittpunkte die Tangenten. *Von den weiteren Schnittpunkten dieser $n$ Tangenten mit der Curve liegen jedesmal $n$ wieder auf einer geraden Linie.*

Zum Beweise heisse einer der Schnittpunkte der Linie $a$ mit der gegebenen Curve $o$, und einer der weiteren Schnittpunkte seiner Tangente mit der Curve $p$. Sei $o'$ ein zweiter Schnittpunkt von $a$ mit der Curve. Bei der Transformation des Systems, welche $o$ in $o'$ überführt, geht die Tangente in $o$ in die Tangente in $o'$, der Schnittpunkt $p$ in einen Schnittpunkt $p'$ der neuen Tangente über. Hiernach sind die Transformationen $o - o'$, $p - p'$ dieselben. Man setze nun beide Transformationen mit der Transformation $o' - p$ zusammen. So entsteht aus der ersten die Transformation $o - p$, aus der zweiten aber, indem man, was bei der Vertauschbarkeit der Transformationen gestattet ist, zuerst $o' - p$ und dann $p - p'$ anwendet, die Transformation $o' - p'$. Das heisst also: $p$ geht aus $o$ durch dieselbe Transformation des Systems hervor, durch welche $p'$ aus $o'$ hervorgeht. Zu den weiteren Schnittpunkten von $a$ mit der Curve $o''$, .... findet man auf dieselbe Weise Punkte $p''$, .... und dabei ist die Transformation $o - p = o' - p'$ immer gleich der Transformation $o'' - p''$, ..... Man wende nun auf $a$, welches die Punkte $o$, $o'$, $o''$.... enthält, diese Transformation an. So geht $a$ in eine neue gerade Linie über, welche $p$, $p'$, $p''$.... enthält. Damit ist unser Satz bewiesen.

9. Die vorstehenden Sätze finden ihren Beweis beide in der von uns im Eingange auseinandergesetzten Schlussweise. Ausserdem benutzt der zweite Satz die Vertauschbarkeit der Transformationen unter sich.

Um die beiden Sätze zu verallgemeinern, wollen wir hier die Art der Beziehungen, welche bei den zugehörigen Transformationen unverändert bleiben, näher definiren. *Es sind dies alle im Sinne der neueren*

*) Für die Curven des Systems II. erschliesst man auf gleiche Weise die Constanz der Subtangente, was ja auch ein bekannter Satz über die logarithmische Linie ist.

*Algebra covarianten Beziehungen zu dem von der W-Curve und dem Fundamentaldreiecke gebildeten Systeme.*

Von dieser Definition ausgehend können wir in den beiden aufgestellten Sätzen beispielsweise an Stelle der Tangente beliebige solche gerade Linien setzen, welche mit den 3 Verbindungslinien mit den Ecken des Fundamentaldreiecks ein constantes Doppelverhältniss bestimmen*). Wir können statt ihrer 2, 3, 4, 5punktig berührende Kegelschnitte setzen, welche bez. 3, 2, 1, 0 der Eckpunkte des Fundamentaldreiecks enthalten**) oder 3, 2, 1, 0 der Seiten des Dreieks berühren, u. s. w.

In dem zweiten Satze können wir die schneidende gerade Linie $a$ durch eine beliebige Curve ersetzen; die Schnittpunkte $p, p', p'', \ldots$ liegen dann auf einer Curve, die aus dieser durch eine dem Systeme angehörige lineare Transformation entsteht, u. s. f.

Es wird dies genügen, um das Schluss-Princip völlig klar zu stellen; man sieht, wie man ohne weitere Betrachtungen eine unbegränzte Reihe von Eigenschaften der $W$-Curven ableiten kann, und die einzige Frage, die man in dieser Richtung nur noch stellen kann, ist die: Welche dieser Eigenschaften sind besonders bemerkenswerth?

10. Wir heben aus der Reihe solcher Eigenschaften zunächst nur die folgenden heraus:

Curven $W$ eines Systems (und zu diesen gehören immer die Seiten des Fundamentaldreiecks) können sich nur in Eckpunkten des Fundamentaldreiecks schneiden. (Wenn also $W$-Curven transscendent sind, sind sie es nicht in der Art, dass sie einen Theil der Ebene mit einem Netzwerk bedecken.)

Curven $W$ besitzen in keinem ihrer Punkte, ausser etwa in Eckpunkten des Fundamentaldreiecks, die sie enthalten, irgend eine Singularität.

Jede im Sinne der neueren Algebra covariante Curve einer Curve $W$ (Hesse'sche Curve etc.) ist eine Curve $W$ desselben Systems.

Wenn man auf eine beliebige Curve, die nur nicht selbst eine zu dem Fundamentaldreiecke gehörige Curve $W$ sein soll, die zu einem $W$-Curven-Systeme gehörigen linearen Transformationen anwendet, so besteht die Umhüllungs-Curve der dadurch erzeugten Curvenreihe aus lauter Curven $W$ des gegebenen Systems.

---

*) In dem Falle der logarithmischen Spirale sind dies die unter constantem Winkel schneidenden Geraden. — Dass dieselben logarithmische Spiralen derselben Art umhüllen (caustica, diacaustica, evoluta), ist nach unserer Schlussweise selbstverständlich und subsumirt sich unter den letzten Satz der n. 10. des Textes.

**) Für die logarithmische Spirale gehören hierher die Berührungskreise, welche den Pol enthalten, und die Krümmungskreise.

— Besonders auf den letzten Satz machen wir aufmerksam, da wir ihn in der Folge benutzen werden. —

## § 3.

## Aufstellung solcher geschlossener Systeme vertauschbarer linearer Transformationen, welche die bisher behandelten umfassen.

11. Wir legen uns jetzt die Frage vor, ob die einfach unendlichen geschlossenen Systeme von Transformationen I, II, ... V noch in umfassenderen (mindestens zweifach unendlichen) Systemen enthalten sind, die, gleich ihnen, die beiden Eigenschaften der n. 2. besitzen: dass die ihnen angehörigen Transformationen unter einander vertauschbar sind und mit einander combinirt eine wieder dem Systeme angehörige Transformation ergeben. Insonderheit fragen wir nach den umfassendsten solchen Systemen, d. h. denjenigen, die nicht noch in weiteren Systemen gleicher Beschaffenheit enthalten sind. In unserem Falle, in welchem nur zwei Variable vorkommen, ergiebt sich, dass die umfassendsten Systeme der gesuchten Beschaffenheit immer nur zweifach unendlich sind*), so dass es also zwischen den seither betrachteten einfach unendlichen und diesen umfassendsten keine Mittelstufe mehr giebt.

12. Zum Zwecke der Aufstellung der hier in Rede stehenden Systeme betrachten wir zunächst zwei beliebige lineare Transformationen, $A$ und $B$.

*Damit dieselben vertauschbar sind, müssen die Elemente der Ebene, welche bei der einen fest bleiben, auch für die andere fest sein oder durch dieselbe unter sich vertauscht werden.*

Sei nämlich $o$ ein festes Element von $A$; durch die Transformation $B$ gehe es in $p$ über. Wenden wir also auf $o$ zuerst $A$, dann $B$ an, so erhalten wir $p$. Wenden wir hingegen zuerst $B$, dann $A$ an, so erhalten wir dasjenige Element, in welches $p$ durch $A$ übergeht. Dies aber muss $p$ selbst sein, weil die Art der Aufeinanderfolge von $A$ und $B$ gleichgültig sein soll. $p$ also bleibt bei der Transformation $A$ unverändert, w. z. b.

*) Dass die Zahl der in diesen Systemen vorkommenden Transformationen, nämlich $\infty^2$, mit der Zahl der Variabeln stimmt, ist eine besondere Eigenschaft der Zahl 2. Für drei Variable giebt es z. B. neben einer grösseren Zahl dreifach unendlicher Systeme ein vierfach unendliches. Dasselbe stellt sich etwa in der folgenden Form dar:

$$x' = x + az + b,$$
$$y' = y + cz + d,$$
$$z' = z.$$

Die Transformationen der hier gesuchten Systeme sollen nun nicht nur mit einander vertauschbar sein, sondern continuirlich sich an einander anschliessen. Damit ist die Möglichkeit aufgehoben, dass die festen Elemente einer einem solchen Systeme angehörigen Transformation — wofern dieselben nicht in continuirlicher, sondern nur in discreter Aufeinanderfolge vorhanden sind — durch irgend eine andere ihm angehörige Transformation unter sich vertauscht werden; vielmehr müssen dieselben unverändert bleiben.

13. Dieser Satz erlaubt nun sofort alle geschlossenen Systeme vertauschbarer linearer Transformationen der Ebene, die nicht noch in umfassenderen enthalten sind, aufzustellen.

Findet sich unter den Transformationen des Systems *eine*, welche der ersten Classe angehört, so muss für *alle* Transformationen des Systems das betreffende Fundamentaldreieck ungeändert bleiben. Ein solches System kann also höchstens diejenigen Transformationen umfassen, welche diese Eigenschaft besitzen, nicht aber noch andere. Diese Transformationen sind nun durch (1) dargestellt,

$$x' = ax,$$
$$y' = by,$$

wenn man $a$, $b$ nicht mehr die Bedeutung von Constanten, sondern von Parametern giebt. Die Combination irgend zweier solcher Transformationen mit den Parametern $a$, $b$ und $a'$, $b'$ ergiebt aber, wie man unmittelbar verificirt, eine neue Transformation des Systems, nämlich diejenige mit den Parametern $aa'$, $bb'$, und zwar unabhängig von der Reihenfolge der beiden Transformationen dieselbe.

*Die zweifach unendlich vielen Transformationen:*

$$\text{A.}\qquad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= by \end{aligned}$$

*bilden also ein geschlossenes System vertauschbarer linearer Transformationen, das nicht noch in einem umfassenderen enthalten ist.*

In diesem Systeme sind alle einfach unendlichen Systeme I. enthalten. *Andererseits sind die Systeme I. in keinem anderen geschlossenen Systeme vertauschbarer linearer Transformationen enthalten als eben in diesem.*

Denn nach der vorstehenden Nummer müsste ein solches System in A. enthalten sein, also eine Zwischenstufe zwischen Systemen I. und A. bilden. Eine solche Zwischenstufe giebt es aber nicht, da A. nur zweifach unendlich viele Transformationen enthält, während I. bereits einfach unendlich viele enthält.

Wie man von den Transformationen erster Classe zur Aufstellung des Systems A. gelangt, kommt man von den Transformationen zweiter und dritter Classe zu den folgenden beiden:

$$\text{B.}\quad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y + b; \end{aligned}$$

$$\Gamma.\quad \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + ax + b. \end{aligned}$$

Die Beziehung von B. und Γ. zu den einfach unendlichen Systemen II., III. ist ganz dieselbe, wie die von A. zu den Systemen I., so dass wir dieselbe hier nicht weiter auseinander setzen.

14. Bei den Transformationen vierter und fünfter Classe wird eine besondere Untersuchung nöthig, weil bei ihnen feste Elemente in continuirlicher Aufeinanderfolge vorhanden sind.

Transformationen der *vierten* Classe können, nach dem Satze der 12. Nummer, nur vertauschbar sein, wenn entweder beide dasselbe Centrum und dieselbe Axe der Perspectivität besitzen, oder wenn das Centrum der einen bez. auf der Axe der anderen liegt. In beiden Fällen sind die beiden Transformationen auch wirklich vertauschbar, wie man leicht verificirt. Aber man wird dabei zu nichts Neuem geführt. In dem ersten Falle kommt man überhaupt nur zu dem einfach unendlichen Systeme IV.; in dem zweiten wird man zu dem Systeme A. geführt, welches man offenbar aus den beiden perspectivischen Transformationen:

$$\begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= by \end{aligned}$$

zusammensetzen kann.

Ebensowenig gelingt es durch Combination von Transformationen der vierten und fünften Classe neue geschlossene Systeme vertauschbarer Transformationen zusammenzusetzen. Nach dem Satze der 12. Nummer wird man, wenn man dies versucht, zu dem Systeme B. zurückgeführt, welches man als aus der Combination der perspectivischen Transformation:

$$\begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y, \end{aligned}$$

mit der Translation:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + b, \end{aligned}$$

entstanden ansehen kann.

Dagegen lassen sich aus Transformationen *fünfter* Classe zwei neue, auch wieder zweifach unendliche Systeme der gesuchten Art bilden.

Zwei Transformationen fünfter Classe können nämlich nach n. 12. vertauschbar sein, sowohl wenn die feste Punktreihe, als auch, wenn das feste Strahlbüschel für beide identisch ist. Man verificirt unmittelbar, dass sie unter einer dieser Voraussetzungen auch wirklich vertauschbar sind und mit einander combinirt eine neue Transformation gleicher

Art erzeugen. Wir haben also zwei neue, wiederum zweifach unendliche Systeme der gesuchten Art.

Das eine umfasst alle Transformationen der fünften Classe, bei welchen dieselbe Punktreihe fest bleibt. Es mag diese Punktreihe mit der unendlich weit entfernten geraden Linie zusammenfallen. Dann sind die Transformationen des Systems dargestellt durch:

$$\Delta.\qquad \begin{aligned} x' &= x + a\,, \\ y' &= y + b\,. \end{aligned}$$

Ein Beispiel giebt die Gesammtheit der Translationen der Ebene.

Das andere umfasst alle Transformationen derselben Classe, bei denen das feste Strahlbüschel dasselbe ist. Wählt man für das letztere die zur $X$-Axe parallelen Geraden, so sind die Transformationen des Systems gegeben durch:

$$\mathrm{E}.\qquad \begin{aligned} x' &= x\,, \\ y' &= y + ax + b\,. \end{aligned}$$

15. Wenn wir zusammenfassen, sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

*Es giebt in der Ebene fünf verschiedene zweifach unendliche geschlossene Systeme von unter sich vertauschbaren linearen Transformationen:* A., B., Γ., Δ., E.

*Dieselben sind nicht noch in umfassenderen Systemen derselben Beschaffenheit enthalten.*

*Transformationen erster, zweiter und dritter Classe, so wie die aus ihnen gebildeten einfach unendlichen Systeme I., II., III. finden sich nur bezüglich in den Systemen* A., B., Γ.

*Transformationen vierter Classe und die aus solchen gebildeten einfach unendlichen Systeme IV. finden sich in* A. *und* B.; *Transformationen fünfter Classe und die aus ihnen gebildeten einfach unendlichen Systeme V. finden sich in* B., Γ., Δ., E.

Wir werden nun im Folgenden die $W$-Curven betrachten nicht mit Bezug auf das einfach unendliche System I., .... V., durch dessen Transformationen sie in sich übergehen, sondern mit Bezug auf das zweifach unendliche A., .... E., welchem das betreffende einfach unendliche angehört: wir werden uns ein solches zweifach unendliches System gegeben denken und diejenigen $W$-Curven in Untersuchung ziehen, deren zugehörige einfach unendliche Systeme in diesem enthalten sind.

Solcher $W$-Curven giebt es für jedes der Systeme A., B. ... E. zweifach unendlich viele.

Für A., B., Γ., Δ. sind dieselben durch die Gleichungen (n. I., II., III., IV.) dargestellt, wenn man den in denselben vorkommenden Constanten beliebige Werthe beilegt. Nicht eingeschlossen in diese Dar-

stellung sind für die 4 Systeme jedesmal einfach unendlich viele $W$-Curven, nämlich (vergl. n. 7.) diejenigen *Punkte*, welche durch unendlich viele Transformationen des Systems unverändert bleiben. Es sind dies für A., B., Γ. die auf den Seiten der bez. Fundamentaldreiecke gelegenen Punkte, für Δ. die Punkte der bei allen, Δ. angehörigen, Transformationen festen Punktreihe. Diese Punkte lassen sich nicht durch eine Gleichung darstellen, weil wir von Punkt-Coordinaten Gebrauch machen. Würden wir dagegen Linien-Coordinaten anwenden, so hätte man sofort die Darstellung dieser Punkte durch eine Gleichung: es würde aber unmöglich, diejenigen $W$-Curven, welche etwa gerade Linien sind, darzustellen. Insbesondere für das System Δ., dessen zweifach unendlich viele $W$-Curven — bis auf die eben genannten Punkte — die geraden Linien der Ebene sind, würde man die $W$-Curven im Allgemeinen gar nicht, sondern nur diese einfach unendlich vielen Punkte darstellen können. Das ist nun gerade, was bei dem Systeme E., das dem Systeme Δ. dualistisch gegenüber steht, bei dem Gebrauche von Punkt-Coordinaten Statt findet. Man findet ohne Weiteres einfach unendlich viele gerade Linien, welche $W$-Curven sind, nämlich die geraden Linien des festen Büschels:

$$x = x_0 .$$

Aber ausserdem giebt es zweifach unendlich viele $W$-Curven, die sich der Darstellung durch eine Gleichung entziehen: das sind sämmtliche Punkte der Ebene. Das System E. hat darum den anderen gegenüber keine Sonderstellung; dass es hier eine solche zu besitzen scheint, beruht auf dem (zufälligen) Gebrauche von Punkt-Coordinaten.

In den folgenden Betrachtungen wird von dem Systeme A. ausgegangen werden; indess übertragen sich dieselben ohne Weiteres auf die übrigen Systeme. Nur muss man dabei berücksichtigen, dass in dem Falle Δ. die geraden Linien, im Falle E. die Punkte der Ebene die $W$-Curven sind, und man daher nicht, wie bei A., B., Γ. im ersten Falle die geraden Linien, im zweiten die Punkte als Beispiele für beliebige Curven betrachten darf. Es ist übrigens so einfach, die Betrachtungen, welche wir für das System A. machen werden, auf B., Γ., Δ., E. zu übertragen, dass wir diese letzteren Systeme fortan ganz bei Seite lassen werden.

## § 4.

## Die $W$-Curven gehen durch eine unendliche Reihe von Transformationen (geometrischen Verwandtschaften) in $W$-Curven desselben Systems über.

16. Die Gleichung der $W$-Curven, die zu dem zweifach unendlichen Systeme A. gehören, ist von der folgenden Form: (vergl. n. 6.)

$$13) \qquad Ax^k = By^l,$$

wo $A, B, k, l$ irgend welche Constanten bedeuten. Diejenigen $W$-Curven, welche dasselbe $k$, $l$ besitzen, gehen durch dieselben einfach unendlich vielen linearen Transformationen in sich über. Wir bezeichneten früher solche $W$-Curven als $W$-Curven eines Systems und wir wollen hier diese Bezeichnung beibehalten, da ja wohl keine Verwechselung mit dem zweifach unendlichen Systeme A., dem alle $W$-Curven, die wir hier betrachten, angehören, möglich ist.

Aus der Form der Gleichung (13) ersieht man nun unmittelbar: *dass die W-Curven durch eine Anzahl von Transformationen, die noch jedesmal 2 willkürliche Constanten einschliessen, in W-Curven desselben Systems, bez. bei passender Bestimmuug der beiden Constanten unendlich oft in sich selbst übergeführt werden.*

Dies ist zunächst der Fall für die linearen Transformationen von A.:

$$x' = ax,$$
$$y' = by,$$

es ist allgemeiner der Fall für die Transformationen:

$$x' = ax^m,$$
$$y' = by^m,$$

wo $m$ irgend eine Zahl ist.

Es ist ferner so hinsichtlich der Umformung durch reciproke Polaren mit Bezug auf einen Kegelschnitt, der das Fundamentaldreieck von A. zum Polardreieck hat. Damit nämlich eine gerade Linie:

$$tx + uy + 1 = 0,$$

Tangente der Curve (13) sei, erhält man die Bedingung (Tangentialgleichung der Curve):

$$A't^k = B'u^l,$$

wo $A'$, $B'$ aus $A$, $B$, $k$, $l$ zusammengesetzt sind. Eine solche Gleichung entsteht aus (13), indem man setzt:

$$x = at,$$
$$y = bu,$$

und diese Transformation stellt die Umformung durch reciproke Polaren hinsichtlich des Kegelschnittes dar:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0,$$

der ein beliebiger Kegelschnitt ist, für welchen das Fundamentaldreieck Polardreieck ist.

Ferner haben die $W$-Curven dieselbe Eigenschaft hinsichtlich derjenigen Transformationen, die sich aus den genannten zusammensetzen lassen u. s. f.

Wir werden nun im Nachstehenden, anknüpfend an die Erzeugung

der $W$-Curven, auf geometrischem Wege den Grund dieses Verhaltens suchen. Dabei werden wir zur Aufstellung einer unbegränzten Reihe von Transformationen, oder, wie wir, weil bei ihnen ein Wechsel des Raumelementes eintritt, lieber sagen wollen, geometrischen Verwandtschaften gelangen, durch die jedesmal die $W$-Curven in $W$-Curven desselben Systems, bez. bei passender Wahl der in denselben vorkommenden zwei willkürlichen Constanten einfach unendlich oft in sich selbst übergehen. *Diese Verwandtschaften umfassen eine grosse Zahl sonst angewandter Verwandtschaften; abgesehen von ihrer Beziehung zu den W-Curven, die hier in den Vordergrund tritt, scheinen dieselben auch darum Interesse zu besitzen, weil durch ihre Aufstellung diese specielleren Verwandtschaften auf einen einheitlichen Algorithmus zurückgeführt werden.* Das Wesentliche bei diesen Verwandtschaften ist, dass sie nach einer festen Regel erzeugt werden, indem wir von den zu dem Fundamentaldreieke gehörigen linearen Transformationen als Grundoperationen ausgehen. In ähnlicher Weise kann man an jedes geschlossene System vertauschbarer Transformationen bei beliebig viel Veränderlichen einen Verwandtschafts-Cyclus anknüpfen. Die hiermit angedeutete Theorie scheint an und für sich beachtenswerth zu sein.

17. Wir betrachten zunächst die Transformationen:

$$x' = a x^m,\quad y' = b y^m. \tag{14}$$

Die Punkte der $XY$-Ebene, sowie die der $X'Y'$-Ebene, kann man sich — und diese Vorstellungsweise ist hier für uns fundamental — in der Art und Weise entstehend denken, dass man von einem Punkte $x_0$, $y_0$ bez. $x_0'$, $y_0'$ als gegeben ausgeht und auf denselben alle zu dem Fundamentaldreiecke von A. gehörigen linearen Transformationen anwendet.

Gemäss dieser Anschauung kann man nun in der folgenden Weise eine Beziehung (Verwandtschaft) zwischen den beiden Ebenen feststellen.

Die Punkte $x_0$, $y_0$ und $x_0'$, $y_0'$ betrachte man als entsprechend. Man betrachte ferner als entsprechend jedesmal diejenigen Punkte $x$, $y$ und $x'$, $y'$, welche aus den gegebenen durch *dieselbe* zu dem Fundamentaldreieck von A. gehörige lineare Transformation hervorgehen. Ist also etwa $x = ax_0$, $y = by_0$, so ist $x' = ax'_0$, $y' = by_0'$. Die in dieser Weise festgelegte Beziehung zwischen den beiden Ebenen ist keine andere, als die durch eine lineare Transformation, welche zu dem Fundamentaldreieck gehört, ausgedrückte Verwandtschaft. In der That, bei dem angegebenen Verfahren ist immer $\frac{x}{x_0} = \frac{x'}{x_0'}$, $\frac{y}{y_0} = \frac{y'}{y_0'}$ und diese Formeln stellen eben eine solche lineare Transformation dar.

Worauf es aber hier ankommt, ist, dass man bei dieser Auffassung der linearen Verwandtschaft ohne Weiteres einsieht, dass $W$-Curven durch dieselbe in $W$-Curven desselben Systems übergeführt werden. Transformirt man nämlich den Punkt $x_0$, $y_0$ durch solche zu dem Fundamentaldreiecke gehörige lineare Transformationen, dass er auf einer $W$-Curve fortrückt, so bewegt sich der entsprechende Punkt $x_0'$, $y_0'$ nothwendig auf einer $W$-Curve desselben Systems, da er durch ganz dieselben linearen Transformationen versetzt wird. Zugleich aber sieht man ein, dass, wenn $x_0$, $y_0$ und $x_0'$, $y_0'$ von vornherein auf derselben in Betracht kommenden $W$-Curve liegen, dass dann diese $W$-Curve und auch alle $W$-Curven desselben Systems in sich selbst übergeführt werden. — Wir machen noch darauf aufmerksam, was auch für alle im Folgenden aufzustellenden Verwandtschaften gilt, dass die Art der Beziehung unverändert dieselbe bleibt, wenn wir, statt von $x_0$, $y_0$ und $x_0'$, $y_0'$ als gegebenen entsprechenden Punkten auszugehen, von irgend einem anderen Punktepaare ausgegangen wären, das aus $x_0$, $y_0$ und $x_0'$, $y_0'$ durch dieselbe zu dem Fundamentaldreiecke gehörige lineare Transformation hervorgeht.

Wir wollen wieder von $x_0$, $y_0$ und $x_0'$, $y_0'$ als gegebenen, einander entsprechenden Punkten ausgehen. Dem Punkte $x$, $y$, der aus $x_0$, $y_0$ durch eine gewisse zu dem Fundamentaldreieck gehörige Operation hervorgeht, wollen wir denjenigen Punkt $x'$, $y'$ zuordnen, der sich aus $x_0'$, $y_0'$ nicht durch dieselbe Transformation, sondern *durch m-malige Wiederholung derselben Transformation* ergiebt. Sei $x = a x_0$, $y = b y_0$, so wird $x' = a^m x_0'$, $y' = b^m y_0'$. Eliminirt man hieraus $a$ und $b$, so erhält man:

$$\frac{x'}{x_0'} = \frac{x^m}{x_0^m} \quad , \quad \frac{y'}{y_0'} = \frac{y^m}{y_0^m}.$$

*Die so festgelegte Verwandtschaft ist also gerade von der unter* (14) *dargestellten Art.*

Nun wende man auf den Punkt $x_0$, $y_0$ solche zu dem Fundamentaldreieck gehörige lineare Transformationen an, dass er eine bestimmte $W$-Curve durchläuft. Dann wird $x_0'$, $y_0'$ eine $W$-Curve desselben Systems durchlaufen. Denn die Reihe der Transformationen, durch welche die $W$-Curven eines Systems in sich übergehen: $x = A^\lambda x_0$, $y = B^\lambda y_0$, und die Reihe der Transformationen, die durch $m$-malige Wiederholung derselben entstehen: $x = A^{\lambda m} x_0$, $y = B^{\lambda m} y_0$, sind in ihrer Gesammtheit nicht von einander verschieden, und können es auch nicht sein, da ja überhaupt die Reihe dieser Transformationen durch fortwährende Wiederholung einer (unendlich kleinen) Transformation entsteht. Der Punkt $x_0'$, $y_0'$ wird also eine $W$-Curve desselben Systems durchlaufen, wie der Punkt $x_0$, $y_0$, nur, um uns so auszudrücken, $m$-mal so schnell.

*Es ist also bewiesen, dass W-Curven durch eine Transformation* (14) *in W-Curven desselben Systems übergehen.*

Wählt man insbesondere die Punkte $x_0$, $y_0$ und $x_0'$, $y_0'$ auf der $W$-Curve, die man betrachtet, *so geht dieselbe durch die Transformation in sich über.*

18. Die allgemeineren Verwandtschaften, in welchen die in der letzten Nummer betrachteten als eine besondere Gattung enthalten sind, erhält man in ganz ähnlicher Weise, wie diese letzteren, indem man gleichzeitig an Stelle des Punktes ein anderes Gebilde als Element der Ebene einführt.

*Wir wollen nämlich als Elemente der Ebene die zweifach unendlich vielen Curven betrachten, die aus einer beliebig*) gewählten:*

$$\varphi(x, y) = 0,$$

*durch die zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen hervorgehen.*

Die Gleichung dieses Curvensystems wird sein, unter $\alpha$, $\beta$ Parameter verstanden:

$$\varphi(\alpha x, \beta y) = 0.$$

Die Parameter $\alpha$, $\beta$ mag man geradezu als *Coordinaten* der Curven betrachten.

Eine Gleichung zwischen $\alpha$, $\beta$ stellt, sagen wir, diejenige Curve dar, die von solchen Curven $\varphi$ umhüllt wird, deren $\alpha$, $\beta$ der Gleichung genügen.

Die allgemeineren Verwandtschaften bestehen nun darin, dass man einem Punkte $x'$, $y'$ eine Curve $\varphi$ entsprechen lässt, wo:

$$x' = a\alpha^m, \quad y' = b\beta^m. \tag{15}$$

In Worten ausgesprochen: *Man ordne einem willkürlich gewählten Anfangspunkte $x_0'$, $y_0'$ eine bestimmte Curve $\varphi_0$ zu. Eine jede andere Curve $\varphi$ geht aus $\varphi_0$ durch eine bestimmte zu dem Fundamentaldreiecke gehörige lineare Transformation hervor. Man lasse ihr denjenigen Punkt $x'$, $y'$ entsprechen, der aus $x_0'$, $y_0'$ durch m-malige Wiederholung derselben Transformation entsteht.*

Den Beweis, dass durch eine solche Transformation $W$-Curven in $W$-Curven desselben Systems übergeführt werden, mag man dadurch in zwei Schritte zerlegen, dass man die Gleichungen (15) durch die Aufeinanderfolge der beiden Gleichungen ersetzt:

$$x' = ax^m, \quad y' = by^m, \tag{16}$$

$$x = \alpha, \quad y = \beta. \tag{17}$$

---

*) Ausgeschlossen bleibt dabei die Annahme, dass die Curve $\varphi = 0$ eine zu dem Fundamentaldreiecke gehörige $W$-Curve sei. In diesem Falle würde man nur einfach unendlich viele Curven $\varphi$ erhalten.

Durch (16) gehen die $W$-Curven in $W$-Curven desselben Systems über, wie in der vorstehenden Nummer gezeigt ist. Es ist also nur noch von (17) zu zeigen. In Worten: es ist zu zeigen, dass eine beliebige Curve $\varphi$ eine $W$-Curve und zwar eine $W$-Curve desselben Systems umhüllt, wenn man auf sie diejenigen zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen anwendet, vermöge deren ein Punkt $x$, $y$ eine bestimmte $W$-Curve durchläuft. Das aber ist der letzte Satz der 9. Nummer.

Wählt man den Anfangspunkt $x_0$, $y_0$ und die Curve $\varphi_0$ so, dass der erstere auf der $W$-Curve liegt, die man betrachtet, die zweite eben diese Curve berührt, so geht die $W$-Curve durch die Verwandtschaft (15) in sich selbst über. Es muss dabei nur eine Bemerkung hinzugefügt werden. Die den Punkten der $W$-Curve entsprechenden $\varphi$ umhüllen die $W$-Curve, aber sie können recht wohl noch weitere Umhüllungs-Curven haben. Diese weiteren Umhüllungs-Curven sind dann aber immer $W$-Curven desselben Systems.

19. Wir wollen den Satz: dass $W$-Curven durch die Verwandtschaften (15) in $W$-Curven desselben Systems übergehen, auch noch analytisch beweisen.

Eine solche Verwandtschaft ist analytisch durch eine sogenannte aequatio directrix*) dargestellt. Man erhält dieselbe, wenn man die Werthe für $\alpha$ und $\beta$ aus (15) in die Gleichung der Curve:

$$\varphi(\alpha x,\ \beta y) = 0$$

einträgt. So entsteht:

$$\varphi\left(\frac{xx'^{-m}}{a},\quad \frac{yy'^{-m}}{b}\right) = 0. \tag{18}$$

Betrachtet man in dieser Gleichung $x'$, $y'$ als fest, so stellt sie das dem Punkte $x'$, $y'$ entsprechende $\varphi$ dar. Umgekehrt, hält man $x$, $y$ fest, so stellt sie diejenige Curve dar, deren Punkten solche Curven $\varphi$ entsprechen, welche durch $x$, $y$ hindurchgehen.

Einem bestimmten Punkte $x'$, $y'$ oder $x, y$ wird durch eine aequatio directrix erst dann ein bestimmter Punkt $x$, $y$ oder $x'$, $y'$ zugeordnet, wenn man $\frac{dy'}{dx'}$ oder $\frac{dy}{dx}$ kennt. Und zwar bestimmt sich, wenn man $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$ kennt, $x'$, $y'$, $\frac{dy'}{dx'}$ und umgekehrt. Es ist dies geometrisch evident. Denn dem Punkte $x$, $y$ entspricht zunächst eine ganze Curve von Punkten $x'$, $y'$. Dadurch, dass man von $x$, $y$ zu einem benachbarten Punkte übergeht, dem seinerseits eine benachbarte Curve entspricht, fixirt man auf dieser Curve, als Durchschnittspunkte mit der benachbarten, eine discrete Mannigfaltigkeit von Punkten $x'$, $y'$. Aber

*) cf. Pluecker. Analytisch-geometrische Entwickelungen. Band II. p. 265.

gleichzeitig ist für diese Punkte die Fortschreitungsrichtung, d. h. $\frac{dy'}{dx'}$, gegeben. Sie fällt nämlich bez. in die Tangenten der beiden benachbarten Curven in ihren Durchschnittspunkten. Analytisch stellt sich dies so. Sei

$$\varphi = 0$$

die aequatio directrix. Betrachtet man $x$, $y$ als veränderlich, so kommt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot dy = 0.$$

Sieht man dagegen $x'$, $y'$ als veränderlich an, so hat man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\cdot dx' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\cdot dy' = 0.$$

Aus den vorstehenden drei Gleichungen kann man entweder $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$ durch $x'$, $y'$, $\frac{dy'}{dx'}$ oder $x'$, $y'$, $\frac{dy'}{dx'}$ durch $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$ bestimmen.

In unserem Falle hat man nun offenbar:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x'^{-m}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial(xx'^{-m})}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y'^{-m}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial yy'^{-m}},$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = -mxx'^{-m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial(xx'^{-m})}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -myy'^{-m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial(yy'^{-m})},$$

Hieraus schliesst man, unabhängig von der besonderen Form, die $\varphi$ hat:

$$\frac{dx}{x}:\frac{dy}{y} = \frac{dx'}{x'}:\frac{dy'}{y'}.$$

Nun aber ist die Differentialgleichung der $W$-Curven (n. 5):

$$\frac{dx}{x} = C\cdot\frac{dy}{y}.$$

*Dieselbe bleibt also bei der Umformung umgeändert.*

Mit anderen Worten: durch die Umformung gehen $W$-Curven in $W$-Curven desselben Systems über, w. z. b.

20. Auf dieselbe Art, wie wir in n. 18. zwei Punkte, in n. 19. einen Punkt und eine Curve einander zugeordnet haben, kann man auch zwei Curven einander entsprechen lassen. Sei die eine Curve:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

die andere:

$$\psi(x, y) = 0.$$

Dann würde man die zweifach unendlich vielen Curven, die aus $\varphi = 0$ durch die zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen hervorgehen, nämlich:

$$\varphi(\alpha x, \beta y) = 0$$

den zweifach unendlich vielen, die sich auf gleiche Weise aus $\psi = 0$ ergeben, nämlich:

$$\psi(\alpha' x, \beta' y) = 0$$

entsprechend der Gleichung (15) in der folgenden Art zuordnen:

$$\alpha' = a\alpha^m, \quad \beta' = b\beta^m,$$

und dadurch eine Verwandtschaft begründen. Durch eine solche Verwandtschaft würden dann wieder $W$-Curven in $W$-Curven desselben Systems übergehen.

Allein diese Verwandtschaften, die begrifflich die in n. 18. und n. 19. aufgestellten Verwandtschaften umfassen, insofern man den Punkt als eine Curve specieller Art ansehen kann, sind von den bisher behandelten nicht verschieden. Den unendlich vielen Curven $\psi$ nämlich, welche durch einen Punkt gehen, entsprechen unendlich viele Curven $\varphi$ und diese haben eine Umhüllungs-Curve $\Phi = 0$ (die in besonderen Fällen auch ein Punkt sein kann). Die Beziehung der Punkte der Ebene zu den ihnen zugehörigen $\Phi$ ist dabei offenbar ganz von der in der n. 19. betrachteten Art. Weiter ist aber auch klar, dass man die Verwandtschaft, welche durch den Uebergang von den $\psi$ zu den $\varphi$ definirt war, ebenso gut durch den Uebergang von den Punkten zu den entsprechenden $\Phi$ definiren kann. Es folgt das aus dem nachstehenden Raisonnement, das übrigens in ganz gleicher Weise bei allen Verwandtschaften seine Stelle findet, welche zweifach unendlich viele Curven der Ebene zweifach unendlich vielen anderen Curven entsprechen lassen.

Den Curven $\varphi$, welche irgend eine Curve $C$ berühren, mögen $\psi$ entsprechen, die eine andere Curve $C'$ berühren. Durch einen Punkt von $C$ gehen zwei consecutive $\psi$, denen zwei consecutive $\varphi$ entsprechen, welche $C'$ berühren. Dieselben $\varphi$ müssen aber auch das dem Punkte zugehörige $\Phi$ berühren, da ja das $\Phi$ die Enveloppe aller $\varphi$ ist, die solchen $\psi$ entsprechen, die durch den Punkt gehen. Mithin wird $C'$ auch von $\Phi$ berührt. Mit anderen Worten: Wenn der Punkt die Curve $C$ durchläuft, so umhüllt die Curve $\Phi$ die Curve $C'$. Die Verwandtschaft zwischen den $\psi$ und den $\varphi$ ist also dieselbe, wie die zwischen den Punkten und den $\Phi$, w. z. b.

## § 5.

## Aufzählung einiger unter den allgemeinen Verwandtschaften enthaltenen besonderen Fälle.

21. Wir wollen hier einige unter den eben aufgestellten Verwandtschaften enthaltene besondere Fälle herausheben, die besonderes Interesse zu haben scheinen.

Zunächst mögen wir bemerken, dass wir in der im Eingange erwähnten Arbeit in den Comptes Rendus die beiden Fälle, welche den Werthen $m = +1$ und $m = -1$ entsprechen, unter dem Namen der *cogredienten* und *contragredienten* Verwandtschaften behandelt haben.

Die contragredienten Verwandtschaften haben zunächst das grössere Interesse. Für sie gilt nämlich der Satz: *dass sie zweimal hintereinander angewandt zur Identität führen, dass also bei ihnen die Beziehung zwischen dem ursprünglichen und dem verwandten Gebilde eine gegenseitige ist.*

Für die betreffende Verwandtschaft der n. 18. überzeugt man sich davon unmittelbar aus der Gleichung (14). Setzt man in derselben $m = -1$, so kommt:

$$xx' = a, \quad yy' = b.$$

Eine Vertauschung von $x$, $y$ mit $x'$, $y'$ lässt diese Formeln ungeändert. Wird man also durch sie von $x$, $y$ zu $x'$, $y'$ geführt, so gelangt man bei Wiederholung derselben von $x'$, $y'$ zu $x$, $y$ zurück.

Dasselbe gilt für die betreffenden Verwandtschaften der n. 19. Für $m = -1$ wird die aequatio directrix (18):

$$\varphi\left(\frac{xx'}{a}, \quad \frac{yy'}{b}\right) = 0$$

und ist also wieder mit Bezug auf $x$ und $x'$, $y$ und $y'$ symmetrisch, was denselben Schluss, wie im vorhergehenden Falle begründet.*)

22. Die allgemeinen, in n. 18. auseinandergesetzten Verwandtschaften sind vielfach Gegenstand geometrischer Untersuchung gewesen. Wir verweisen insbesondere auf Salmon's Treatise on the Higher Plane Curves, wo p. 238—242 eine Zusammenstellung derartiger Forschungen gegeben ist.

Für $m = +1$ sind diese Verwandtschaften, wie schon gesagt, von der collinearen Verwandtschaft nicht verschieden.

Für $m = -1$ geben sie die bekannte Verwandtschaft, welche eine gerade Linie in einen durch die 3 Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Kegelschnitt verwandelt.

Besonderes Interesse haben diese Transformationen in dem Falle, dass zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in die beiden Kreispunkte fallen. Dieselben lassen dann die Winkel**) der Ebene unverändert,

---

*) In unserer Arbeit in den Comptes Rendus haben wir diesen Satz auf geometrische Weise begründet, indem wir das System $\Delta$ aller Translationen zu Hülfe nahmen. In diesem Falle wird nämlich der Satz des Textes identisch mit dem Satze über relative Verschiebung: Wenn zwei Körper gegeneinander verschoben werden, so ist es gleichgültig, ob der eine ruht und der andere sich bewegt. oder ob der andere ruht und der erste sich im umgekehrten Sinne bewegt.

**) Es ist dies eine Folge davon, dass durch die Transformation die $W$-Curven, d. h. in diesem Falle die logarithmischen Spiralen, in $W$-Curven desselben Systems übergeführt werden. Die logarithmischen Spiralen zweier Systeme schneiden sich nämlich unter constantem Winkel; bleiben bei der Transformation nun die Systeme ungeändert, so müssen es auch die Winkel thun. Es gilt diese Bemerkung auch für die in der folgenden Nummer betrachteten Verwandtschaften, soweit sie sich auf das Fundamentaldreieck der logarithmischen Spirale beziehen. — Die betreffende Arbeit von Herrn M. Roberts findet sich: Liouville's Journal XIII.

ein Umstand, den Herr M. Roberts zur Ableitung einer Reihe schöner Sätze benutzt hat. Ist in diesem Falle insbesondere $m = -1$ und setzt man gleichzeitig statt $x$ $(-x)$, so hat man die Transformation der reciproken Radien. Im Uebrigen vergleiche man Salmon, die angeführte Stelle.

23. Unter den Verwandtschaften der n. 19. sind diejenigen besonders bemerkenswerth, welche man erhält, wenn man für die Curven $\varphi = 0$ gerade Linien nimmt. Dann entsprechen den Punkten der Ebene die geraden Linien derselben. Die Parameter $\alpha$, $\beta$, welche wir als Coordinaten der Curven $\varphi$ auffassten, sind dabei die reciproken Werthe der gewöhnlichen Linien-Coordinaten $t$ und $u$.

A. Betrachten wir zunächst den Fall $m = -1$, d. h.

$$(19) \qquad \begin{aligned} at &= x, \\ bu &= y, \end{aligned}$$

Diese Formeln stellen die Verwandtschaft der reciproken Polaren hinsichtlich des Kegelschnittes:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0$$

dar, d. h. also hinsichtlich eines Kegelschnittes, welcher das Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat. Wir haben also den folgenden Satz, den wir, unmittelbar aus der Gleichung bewiesen, bereits in n. 16. anführten:

*Die reciproke Polare einer W-Curve hinsichtlich eines Kegelschnittes, der das Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat, ist eine W-Curve desselben Systems.*

Hieran knüpft sich noch das folgende Corollar:

*Die W-Curve ist ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines solchen Kegelschnitts, wenn sie von dem Kegelschnitte berührt wird.* *)

Denn bei der durch einen solchen Kegelschnitt vermittelten Zuordnung von Punkt und gerader Linie entspricht einem Punkte der *W*-Curve — nämlich dem Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt — eine Tangente derselben Curve — nämlich die Tangente im Berührungspunkte, und also (n. 18.) allen Punkten der *W*-Curve eine Tangente derselben Curve.

Durch Uebertragung früher aufgestellter Eigenschaften der *W*-Curven vermöge der Theorie der reciproken Polaren finden wir unter Anderen, was man übrigens vermöge der von uns immer gebrauchten Schlussweise ohne Weiteres einsehen kann: *Das Doppelverhältniss der*

*) Für die logarithmische Spirale sagt dieser Satz aus: Die logarithmische Spirale ist ihre eigene reciproke Polare in Bezug auf jede gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt in ihren Pol fällt, und welche sie berührt.

*Tangente einer W-Curve zu den drei geraden Linien, welche ihren Berührungspunkt mit den Ecken des Fundamentaldreiecks verbinden, ist constant.* Wir führen diesen Satz hier an, weil er für die logarithmische Spirale diejenige Eigenschaft ausspricht, die man gewöhnlich als Definition derselben giebt: dass nämlich für sie die Radiivectores vom Pole aus mit der Curve gleiche Winkel bilden. — Man schliesst ferner noch, dass dieses Doppelverhältniss dasselbe ist, welches der Berührungspunkt und die drei Durchschnittspunkte der Tangente mit den Seiten des Fundamentaldreiecks miteinander bilden, wie dies auch aus bekannten Eigenschaften des Dreiecks ersichtlich ist.

B. Sei zweitens $m = +1$. So sind die Formeln für die Verwandtschaft:

(20) $$xt = a, \quad yu = b.$$

Man kann diese aus den Formeln

$$xx' = a, \quad yy' = b,$$

und

$$x' = t, \quad y' = u$$

zusammensetzen; die hier betrachtete Verwandtschaft entsteht also, wenn man die Verwandtschaft:

$$xx' = a, \quad yy' = b$$

mit der der reciproken Polaren verbindet.

Die Transformation (20), wie überhaupt jede Transformation, die nicht reciprok ist, kann in doppeltem Sinne aufgefasst werden, je nachdem man von den $x$, $y$ der ersten Ebene zu den $t$, $u$ der zweiten, oder von den $t$, $u$ der ersten zu den $x$, $y$ der zweiten übergeht.

In dem ersten Falle lässt sie dem Punkte eine gerade Linie, der geraden Linie einen Kegelschnitt entsprechen, welcher die 3 Seiten des Fundamentaldreiecks berührt. — In dem zweiten Falle entspricht der geraden Linie ein Punkt, dem Punkte ein Kegelschnitt, der durch die drei Ecken geht.

Es ist dabei ein besonderer Fall bemerkenswerth. Derselbe entspricht der Annahme $a + b + 1 = 0$, also:

$$tx + uy + 1 = 0.$$

Alsdann liegen Punkt und entsprechende gerade Linie (unter beiden Annahmen) jedesmal vereinigt.

Unter diesen Fall gehört namentlich auch die Beziehung der Punkte der $W$-Curven eines Systems zu deren Tangenten, wie man dies an der Gleichung der $W$-Curven unmittelbar verificirt. Die vorstehend ausgesprochenen Eigenschaften der Transformation (20) ergeben für diesen besonderen Fall die beiden Sätze:

*Die Tangenten in den Schnittpunkten einer geraden Linie mit einer*

*W-Curve berühren einen dem Fundamentaldreiecke eingeschriebenen Kegelschnitt.**)

*Die Berührungspunkte der von einem Punkte aus an eine W-Curve gelegten Tangenten liegen auf einem durch die drei Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Kegelschnitt.***)

Noch mag als ein besonderer Fall der durch (20) dargestellten Verwandtschaft die Beziehung angesehen werden, die Pluecker in seinem „Systeme der analytischen Geometrie" p. 10 als Polarität hinsichtlich eines Dreiecks***) bezeichnet. Dieselbe entsteht aus (20), wenn man $a = b = 1$ nimmt. Geometrisch ist diese Beziehung in folgender Weise definirt. Man ordne einem Punkte der Ebene diejenige Gerade zu, welche diejenigen drei Punkte enthält, in denen die Seiten des Fundamentaldreiecks von den Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit dem gegebenen Punkte noch ausser in diesen Ecken geschnitten werden. —

## § 6.

## Allgemeine Probleme, die sich an das Vorige anknüpfen.

24. Mit der im vorstehenden Paragraphen gegebenen Aufzählung specieller Verwandtschaften schliessen wir unsere Auseinandersetzungen über die $W$-Curven. Es soll hier nur noch kurz angedeutet werden, zu welchen allgemeineren Problemen dieselben hinführen.

Indem wir auf einen Punkt alle Transformationen eines einfach unendlichen geschlossenen Systems vertauschbarer linearer Transformationen anwandten, erhielten wir die $W$-Curven.

Aber statt des Punktes können wir eine beliebige Curve wählen. Indem wir auf sie die nämlichen Transformationen anwenden, erhalten wir eine Curvenreihe, deren Umhüllungscurve, wie schon gesagt, aus $W$-Curven desselben Systems besteht. Diese Curvenreihe nun können wir statt der Punktreihe, die wir seither betrachteten, in die Untersuchung einführen.

Wir können weiter gehen. Auf eine beliebig angenommene Curve wende man die Transformationen eines geschlossenen zweifach unendlichen Systems vertauschbarer linearer Transformationen an. Dann erhält man ein zweifach unendliches System von Curven und nach dessen Eigenschaften kann man fragen. Auf dasselbe wird ebenso

---

*) Für die logarithmische Spirale ist dies eine Parabel, deren Brennpunkt in den Pol fällt.

**) Für die logarithmische Spirale ein durch den Pol gehender Kreis. Der Satz kommt darauf hinaus, dass im Kreise Peripheriewinkel auf gleichen Bogen constant sind.

***) Man kann ein Dreieck als eine Curve dritter Ordnung betrachten. Die dem Punkte zugeordnete Linie ist seine gerade Polare mit Bezug auf diese Curve.

wie auf die vorstehend genannten Curvenreihen unsere Schlussweise Anwendung finden. Wenn wir seither nicht zur Betrachtung solcher Systeme als selbstständiger geometrischer Gebilde geführt wurden, so liegt das daran, weil wir vom Punkte als Element der Ebene ausgingen. Ein System von zweifach unendlich vielen Punkten fällt nämlich mit der Gesammtheit der Punkte der Ebene zusammen und erscheint deswegen nicht als ein in der Ebene enthaltenes besonderes geometrisches Gebilde.

Implicite haben wir übrigens wiederholt von solchen Curvensystemen gehandelt. Einmal betrachteten wir solche Systeme in n. 19. und n. 20. bei der Begründung der allgemeinen Verwandtschaften. Andererseits ist das, was wir ein System von $W$-Curven genannt haben, eben ein solches System. Dasselbe umfasst, im Gegensatze zu den allgemeinen Systemen dieser Art, nur einfach unendlich viele Curven, weil seine Constituenten, die $W$-Curven, selbst durch einfach unendlich viele Transformationen in sich übergehen. Die $W$-Curven eines Systems wurden durch die aufgestellten Verwandtschaften immer in $W$-Curven desselben Systems übergeführt. Wir können das so aussprechen:

*Die $W$-Curvensysteme, als selbstständige Gebilde aufgefasst, bleiben bei den aufgestellten Verwandtschaften ungeändert.*

Insofern die hier definirten Curvensysteme durch ein geschlossenes System von zweifach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, schliesst sich ihre Untersuchung unmittelbar an das Studium der $W$-Curven an, d. h. derjenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch ein geschlossenes System von nur einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Hiermit ist zugleich das allgemeinste Problem angedeutet, unter welches sich die Untersuchung der $W$-Curven als einfachster Fall subsumirt. Dasselbe lautet:

*Man soll nach der im Eingange auseinandergesetzten Schlussweise die Eigenschaften solcher geometrischer Gebilde entwickeln, die aus einem willkürlich gewählten durch Anwendung geschlossener Systeme beliebig unendlich vieler unter sich vertauschbarer linearer Transformationen hervorgehen.*

Es ist hier nicht unsere Absicht, auf diese Frage einzugehen; wir haben nur das allgemeine Problem bezeichnen wollen, unter welches die hier gegebenen speciellen Betrachtungen fallen.

## § 7.

## Ueber die Integration gewisser Differentialgleichungen.

25. In diesem letzten Paragraphen wollen wir einige Betrachtungen anstellen, die mit der Transformirbarkeit geometrischer Ge-

bilde in sich selbst nahe zusammenhängen. Dieselben betreffen die Integration solcher Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabeln, welche durch unendlich viele Transformationen in sich übergeführt werden.

Bekanntlich kann man die Veränderlichen in den sogenannten homogenen Differentialgleichungen:

$$(\alpha) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ohne Weiteres separiren. Denn man setze $\frac{y}{x} = t$, so wird $y = xt$ und $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$, folglich verwandelt sich die Gleichung in die folgende:

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t), \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{-t+f(t)} = \frac{dx}{x},$$

in welcher die Veränderlichen separirt sind.

Wir wollen den inneren Grund für diese Eigenschaft der Gleichungen ($\alpha$) suchen.

Es mögen $x$, $y$ Punktcoordinaten in der Ebene sein. Dann bestimmt die Gleichung ($\alpha$) für jeden Punkt der Ebene eine Fortschreitungsrichtung. Diese Fortschreitungsrichtung ist nun für alle Punkte dieselbe, welche auf einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Geraden liegen. Denn ($\alpha$) bleibt unverändert, wenn man statt $x$, $y$ Multipla derselben, etwa $ax$, $ay$, setzt. Statt nun die Punkte der Ebene durch die Parallelen zur $X$- und $Y$-Axe zu bestimmen, kann man sie durch die Parallelen zur $X$-Axe und das vom Coordinatenanfangspunkte ausgehende Strahlbüschel festlegen. Dies ist gerade der Sinn der Substitution $y = xt$; $t$ ist dabei ein Parameter für die Geraden des genannten Strahlbüschels. Durch Einführung von $t$ an Stelle von $y$ geht Gleichung ($\alpha$) in eine neue Gleichung über:

$$(\beta) \qquad \frac{dt}{dx} = \varphi(x, t).$$

Von dieser Differentialgleichung weiss man nun: sie ändert sich nicht, wenn man statt $x$ ein Multiplum $ax$ setzt und $t$ constant lässt. Dadurch geht aber $\frac{dt}{dx}$ in $\frac{1}{a}\cdot\frac{dt}{dx}$ über. Es muss also auch $\varphi(x, t)$ bei dieser Substitution sich um einen Factor $\frac{1}{a}$ ändern. Man hat somit:

$$\varphi(ax, t) = \frac{1}{a}\cdot\varphi(x, t).$$

Setzt man $x$ gleich 1 und sodann $a$ gleich $x$, so kommt:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{x}\,\varphi(1, t) = \frac{1}{x}\,\psi(t).$$

$\varphi(x, t)$ ist also nothwendig von der Form $\frac{\psi(t)}{x}$. In der Gleichung

($\beta$) sind mithin, wie dies ja auch die wirkliche Ausrechnung zeigt, die Veränderlichen separirt.

26. Der allgemeine in dem vorstehenden Raisonnement enthaltene Gedankengang ist der folgende.

Es sei eine Differentialgleichung gegeben:

$$(\gamma) \qquad \frac{dy}{dx} = f(y, x)$$

und man wisse von derselben, dass sie durch einfach unendlich viele Transformationen in sich übergeht.

So führe man statt der Veränderlichen $y$, $x$ zwei neue Veränderliche $\eta$, $\xi$ ein, welche die folgende geometrische Bedeutung haben. $\eta = \varkappa$ ist die Gleichung aller solcher Curven, welche durch dieselben unendlich vielen Transformationen in sich übergehen, durch welche die vorgelegte Differentialgleichung unverändert bleibt. $\xi = \lambda$ ist die Gleichung desjenigen Curvensystems, das aus einer beliebig angenommenen Curve $\xi = \lambda_1$ durch Anwendung der betreffenden unendlich vielen Transformationen entsteht.

*Durch Einführung der Variabelen $\xi$, $\eta$ geht die gegebene Differentialgleichung in eine neue über, in welcher die Veränderlichen separirt sind.*

Ehe wir dies beweisen, werde gezeigt, dass die Separation der Veränderlichen in der homogenen Differentialgleichung ($\alpha$) in der hiermit ausgesprochenen allgemeinen Regel als etwas Specielles enthalten ist. Die Curven $\eta = \varkappa$ sind dort die durch den Anfangspunkt gehenden Geraden $t =$ Const., da diese bei den Transformationen $x' = ax$, $y' = ay$, durch die ($\alpha$) unverändert bleibt, ebenfalls unverändert bleiben. Weiter an Stelle der Curven $\xi = \lambda$ sind die Geraden $x =$ Const. gewählt, die in der That der für die Curven $\xi$ aufgestellten Bedingung genügen: dass alle aus einer durch die zu der Differentialgleichung gehörigen Transformationen hervorgehen.

27. Der Beweis dafür, dass bei der Einführung von $\eta$, $\xi$ in die Gleichung ($\gamma$) allgemein Separation der Veränderlichen Statt findet, ist der folgende.

Die Differentialgleichung ($\gamma$) geht durch Einführung der $\eta$, $\xi$ in eine andere über, die die folgende sein mag:

$$(\delta) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\eta, \xi).$$

Von dieser Differentialgleichung weiss man nun, dass sie unverändert bleibt, wenn man, ohne $\eta$ irgendwie zu ändern, $\xi$ gewissen einfach unendlich vielen Transformationen unterwirft. Dies ist nicht anders möglich, als wenn $\varphi(\eta, \xi)$ in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine nur $\eta$, der andere nur $\xi$ enthält.

Um dies deutlich einzusehen, führe man statt $\xi$ eine Function

von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ als Veränderliche ein, die dadurch bestimmt ist, dass sie durch die einfach unendlich vielen Transformationen, denen man $\mathfrak{x}$ unterwirft, in Multipla ihrer selbst übergeht. Durch Einführung dieses $\mathfrak{z}$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ wird die Differentialgleichung ($\delta$) die folgende:

$$\frac{d\eta}{d\mathfrak{x}} = \psi(\eta, \mathfrak{z}).$$

Dieselbe bleibt ungeändert, wenn man, bei constantem $\eta$, statt $\mathfrak{z}$ ein Multiplum setzt. Man schliesst also ganz nach der Methode, die in n. 25. für die homogene Gleichung angewandt wurde, dass $\psi(\eta, \mathfrak{z})$ zerfällt in eine Function von $\eta$, dividirt durch $\mathfrak{z}$. Die Veränderlichen in der Gleichung sind also separirt. Setzt man nun statt $\mathfrak{z}$ wieder rückwärts $\mathfrak{x}$, so kommt man zu der Gleichung ($\delta$) zurück, und in dieser sind also auch die Veränderlichen separirt, wie behauptet wurde.

28. Die Bestimmung der Curven $\eta = \varkappa$, welche durch die einfach unendlich vielen gegebenen Transformationen in sich übergehen, wird im Allgemeinen die Integration einer neuen Differentialgleichung verlangen, nämlich derjenigen Differentialgleichung, welche aussagt, dass eine Curve durch die unter den einfach unendlich vielen Transformationen enthaltene unendlich kleine Transformation in sich übergeht (vergl. n. 3.). *Ist die Integration dieser Gleichung, die nur noch von der Art der Transformationen, welche* ($\gamma$) *zulässt, abhängt, geleistet, so verlangt die Integration von* ($\gamma$) *nur noch Quadraturen.*

Sind nun die Transformationen, durch welche ($\gamma$) in sich selbst übergeht, insbesondere linear, wie dies in dem Beispiele der Gleichung ($\alpha$) war, so lassen sich die Curven $\eta = \varkappa$ ohne Weiteres bestimmen. Es sind nämlich diejenigen *W*-Curven, welche durch die betreffenden unendlich vielen linearen Transformationen in sich übergehen. Man hat also den Satz: *Differentialgleichungen* ($\gamma$), *welche durch unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, verlangen zu ihrer Integration nur Quadraturen.*

29. Von diesem Satze wollen wir eine Anwendung geben, die sich auf Raumgeometrie bezieht.

Nach den Auseinandersetzungen des § 1., n. 3. wird es deutlich sein, was man unter einer unendlich kleinen linearen Transformation nicht nur der Ebene, sondern auch des Raumes zu verstehen hat. Wendet man eine solche unendlich oft auf einen Punkt an, so durchläuft er eine *räumliche W-Curve.* Die *W*-Curven, welche gleichzeitig von den verschiedenen Punkten des Raumes erzeugt werden, heissen *W*-Curven eines Systems.

Man betrachte nun die Fläche, welche erzeugt wird von den *W*-Curven eines Systems, die eine beliebige feste Curve schneiden. *Auf dieser Fläche lassen sich die Haupttangenten-Curven durch Quadratur bestimmen.*

Die Fläche geht nämlich offenbar durch dieselben unendlich vielen linearen Transformationen in sich über, durch welche die $W$-Curven des Systems unverändert bleiben. Dieselben Transformationen werden auch die Haupttangenten-Curven der Fläche in Haupttangenten-Curven der Fläche überführen, da bei linearer Transformation Haupttangenten Haupttangenten bleiben. Die Differentialgleichung der Haupttangenten-Curven wird also bei den bez. linearen Transformationen ungeändert bleiben. Sie wird also, nach unserem Satze, quadrirbar, wenn man, auf der Fläche, die folgende Coordinatenbestimmung macht. Man bestimme jeden Punkt derselben als den Durchschnitt zweier Curven: $\eta = \varkappa_1$, $\xi = \lambda_1$, wo $\eta = \varkappa$ die auf der Fläche liegenden $W$-Curven darstellen, $\xi = \lambda$ ein Curvensystem ist, das sich aus einer auf der Fläche beliebig gezogenen Curve durch Anwendung der zugehörigen unendlich vielen linearen Transformationen ergiebt.

Wir wollen noch zwei besondere Fälle dieses Satzes hervorheben.

Unter den verschiedenen $W$-Curven-Systemen, welche es im Raume giebt, finden sich insonderheit die geraden Linien, welche zwei feste Geraden schneiden. Man kann nun nach unserem Satze die Haupttangenten-Curven bestimmen auf jeder aus solchen Linien gebildeten Fläche, d. h. also *auf jeder Linienfläche, deren Erzeugende zwei feste Geraden schneiden.**)

Ein zweiter besonderer Fall ist der folgende. Gleichgewundene Schraubenlinien von gleicher Axe und gleicher Ganghöhe bilden ebenfalls ein $W$-Curven-System. Die zugehörigen linearen Transformationen, durch welche dieselben in sich übergehen, sind die betreffenden Schraubenbewegungen um die gemeinsame Axe. Bei einer Bewegung bleiben nun nicht nur die projectivischen Beziehungen, sondern auch die metrischen ungeändert. Man wird also auf einer von solchen Schraubenlinien gebildeten Fläche nicht nur die Haupttangenten-Curven, sondern auch die Krümmungscurven bestimmen können. Wir haben also den Satz:

*Wenn man auf irgend eine Curve eine beliebige Schraubenbewegung anwendet, so beschreibt sie eine Fläche, auf der man die Haupttangenten-Curven und Krümmungs-Curven durch Quadratur bestimmen kann.*

---

*) Dieser Satz ist in umfassenderen Sätzen mit enthalten, die von Herrn Clebsch (Crelle's Journal LXVIII, p. 151) und von Herrn Cremona (Annali di Matematica. 1869) über die Haupttangenten-Curven von Linienflächen aufgestellt worden sind.

Göttingen und Christiania im März 1871.

# Ueber independente Darstellung der höheren Differentialquotienten.

Von R. Hoppe in Berlin.

---

Wenn es sich um die Aufgabe handelt, den $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten einer Function einer Variabeln entwickelt darzustellen, so kann die Form der Entwickelung noch eine äusserst mannichfaltige sein. Selbst wenn man festsetzt, dass nur endliche Reihen von geschlossener Dimensionszahl vorkommen, lassen sich zur Darstellung derselben Function oft eine unübersehbare Menge identischer Ausdrücke finden, deren Zusammenhang schon bei Doppelreihen nicht mehr in die Augen fällt. Von dieser möglichen Formverschiedenheit sah ich vorläufig ab, und hielt allein die genannte Beschränkung fest, als ich in der Schrift: „Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten. Leipzig 1845.“ — die bezeichnete Aufgabe für alle diejenigen Functionen löste, die durch Substitution aus Functionen hervorgehen, für deren ganze positive Potenzen die Differentialformel als bekannt zu betrachten war. Die Lösung ist daselbst (Seite 38) in der Formel enthalten:

$$(5) \qquad \frac{\partial^n f(z)}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{z^k f^k(z)}{1.2\ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k-h} (k)_h z^{-h} \frac{\partial^n \cdot z^h}{\partial x^n},$$

wo $(k)_h$ den Binomialcoefficienten bezeichnet. Bei Anwendung derselben auf eine durch Substitution gebildete Function

$$\varphi_n \ldots \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 x$$

hat man erst

$$z = \varphi_1 x \quad ; \quad fz = (\varphi_2 z)^h$$

zu setzen, um hernach successive für

$$z = \varphi_2 \varphi_1 x \quad ; \quad fz = (\varphi_3 z)^h$$
$$z = \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 x \quad ; \quad fz = (\varphi_4 z)^h$$
$$\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.}$$

die in die Formel einzuführenden Werthe zu haben, während erst am Schluss

$$fz = \varphi_n z$$

gesetzt werden kann.

In einzelnen Fällen, namentlich für $z = x^2$, $z = \frac{1}{x}$, und $fz = z^\alpha$, geht die Doppelreihe in eine einfache über. Dem letztgenannten Falle entspricht die Formel (S. 56):

$$(20) \qquad \frac{\partial^n . z^\alpha}{\partial x^n} = \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^{n-h} (\alpha)_h (\alpha - h - 1)_{n-h} z^{\alpha - h} \frac{\partial^n . z^h}{\partial x^n}$$
$$= \alpha (n - \alpha)_n \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^h (n)_h \frac{z^{\alpha-h}}{\alpha - h} \frac{\partial^n . z^h}{\partial x^n}.$$

Ist hier $\alpha$ eine negative ganze Zahl, so lässt sich der Ausdruck zu dem folgenden (S. 162) erweitern:

$$\frac{\partial^n . z^{-m}}{\partial x^n} = (m + \mu)(m + n + \mu + \nu)_{m+\mu} \sum_{h=0}^{h=n+\nu} (-1)^h (n + \nu)_h \frac{z^{-m-h-\mu}}{m + h + \mu} \frac{\partial^n . z^{h+\mu}}{\partial x^n},$$

worin $\mu$ und $\nu$ willkürliche ganze positive Zahlen bezeichnen. Hieran sieht man, dass z. B.

$$(m + \mu)(m + n + \mu + \nu)_{m+\mu} \sum_{h=1}^{h=n+\nu} (-1)^h (n + \nu)_h \frac{(h + \mu)^n}{m + h + \mu}$$

eine von $\mu$ und $\nu$ unabhängige Grösse ist, und dass sich solcher Ausdrücke beliebig viele ergeben, indem man beliebige Functionen $z$ wählt.

Die Bedingung, unter welcher die Formel (5) zum Ziele führt, ist sichtlich erfüllt, soweit die Elementarfunctionen $\varphi$ theils algebraisch, theils Potenzen, sei es von variabler Basis oder variablem Exponenten, theils Sinus oder Cosinus sind. Zur Anwendung auf Logarithmen und Kreisbogen, welche letzteren sich auf die ersteren reduciren, würde erst der $n^{\text{te}}$ Differentialquotient von $(\log x)^h$ zu entwickeln sein. Die unmittelbare Entwickelung giebt folgende Form:

$$\frac{\partial^n f(\log x)}{\partial x^n} = x^{-n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} C_k f^k (\log x)$$

und zwar ist $C_k$ die Summe der Produkte der Combinationen zu $n - k$ Elementen aus den Zahlen $1, 2, \ldots n - 1$. Diese Bestimmung des Coefficienten genügte mir nicht, da er sich als Summe einer Reihe von variabler Dimensionszahl darstellt, mithin im Grunde nicht independent, sondern recurrirend ausgedrückt ist. Ich erweiterte die Formel folgendermassen. Bezeichnet $C^n(a_p)$ die Summe der Produkte der Combinationen zu $p$ Elementen aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots a_n$, und setzt man zur Abkürzung

$$A(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) \quad ; \quad A_h(x) = \frac{x - a_h}{A(x)},$$

so ist

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^{h=n} f^k(z) \sum_{h=1}^{h=n} A_h(a_h) e^{-a_h z} \frac{\partial^n . e^{a_h z}}{\partial x^n} \sum_{p=0}^{p=n-k} (-1)^p (a_h)^{n-k-p-1} C^n(a_p).$$

Jetzt kann man die Reihe der $a$ so wählen, dass die independente Darstellung der $C$ möglich wird. Dies ist unter andern der Fall für $a_p = a^p$. Man findet nämlich (S. 96):

$$C^n(a^p) = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \frac{a^{(p-r+1)_2 + r(n+1)}}{\Lambda(r)\,\Lambda(p-r)},$$

wo

$$\Lambda(r) = (1-a)(1-a^2)\ldots(1-a^r).$$

Nachdem hiermit die Aufgabe gelöst ist, ergiebt sich auch der independente Ausdruck der anfänglichen Coefficienten $C_k$ durch Identificirung mit dem neuen für $z = \log x$. Am einfachsten gestaltet er sich, wenn $a$ die $(n+1)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit ist; hier hat man (S. 104):

$$C^n(k) = (-1)^k\, 1\,.\,2 \ldots n \sum_{h=1}^{h=n+1} a^{hk}(a^h)_{n+1}\,.$$

Aus dem Angeführten ist zu ersehen, dass die Lösung der genannten Aufgabe, wenn man sie nur in einigen wenigen Formen versucht, schon zu einer grossen Menge identischer oder willkürliche Elemente enthaltender Ausdrücke führt, die sich ohne Zweifel noch sehr vermehren lässt. Es würde eine Aufgabe für sich bilden, die hier wie zufällig auftretenden Identitäten aus Gesetzen abzuleiten, und den Umfang der Transformationsfähigkeit zu ermitteln.

Da in den 26 Jahren nach Publication meiner Theorie durch keine literarische Erscheinung die Aufmerksamkeit auf irgend welche verwandte Fragen wieder gelenkt worden ist, so habe ich jene Untersuchung gleichfalls nicht fortgeführt. Kürzlich jedoch ist die obige Formel (20), auf ganz verschiedenem Wege zum zweitenmal gefunden, Gegenstand eines Aufsatzes im dritten Bande der mathematischen Annalen [vergl. Seite 276, Formel (9)] geworden. Dieser erste Beweis eines noch vorhandenen Interesses gab mir Veranlassung, im Vorstehenden auf den Umfang dessen, was in der Sache bereits bekannt war, und auf die noch restirende Aufgabe aufs neue hinzuweisen.

# Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function.

Von A. Mayer in Leipzig.

Die Frage nach den Bedingungen, unter welchen mehrere partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Function eine gemeinsame Lösung zulassen, ist zuerst von Bour behandelt worden im 39. Hefte des *Journal de l'Ecole polytechnique.* Die Kriterien, zu denen Bour gelangt und die man auch in zwei neueren Abhandlungen von Imschenetsky*) und von Collet**) wiederfindet, sind indessen unvollständig und daher einer Revision bedürftig. Diese zu geben und die vollständigen Kriterien auseinanderzusetzen, ist der Zweck der folgenden Note. Des leichteren Verständnisses wegen schicke ich derselben in der Form zweier Sätze (I. und II.) dasjenige aus der Jacobi'schen *neuen* Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Crelle J. 60) voraus, was in ihr benutzt werden wird.

I. Wenn sich aus den $n$ Gleichungen zwischen den $2n$ Grössen $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots f_n = 0$$

für $p_1, p_2, \dots p_n$ solche Functionen der unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \dots q_n$ ergeben sollen, welche den Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots p_n dq_n$$

zu einem vollständigen Differential machen, so müssen durch Substitution dieser Functionen die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen:

$$(f_i, f_k) = 0$$

identisch erfüllt werden.

*) Grunert's Archiv T. 50.

**) Annales de l'Ecole normale t. VII.

Unter dem Zeichen $(\varphi, \psi)$ wird immer der Ausdruck verstanden:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \frac{\partial \psi}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h} \frac{\partial \psi}{\partial q_h} \right).$$

II. Wenn man $\mu$ Functionen

$$f_1, f_2, \ldots f_\mu$$

der $2n$ Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ hat, unabhängig von einander in Bezug auf $p_1, p_2, \ldots p_n$, für welche die $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ Gleichungen:

$$(f_i, f_\varkappa) = 0$$

identisch erfüllt sind, so lehrt die Jacobi'sche Methode $n - \mu$ andere Functionen $f_{\mu+1}, \ldots f_n$ zu finden, von der Beschaffenheit, dass sich aus den $n$ Gleichungen:

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_\mu = 0$$
$$f_{\mu+1} = h_{\mu+1}, \ldots, f_n = h_n,$$

in denen die $h$ willkürliche Constanten bedeuten, solche Werthe von $p_1, p_2, \ldots p_n$ ergeben, welche den Ausdruck:

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots p_n dq_n$$

zu einem vollständigen Differential machen; woraus hervorgeht, dass unter den gemachten Voraussetzungen die $\mu$ simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche durch die Substitutionen

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}$$

aus den Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots f_\mu = 0$$

entstehen, eine gemeinsame vollständige Lösung $V$ mit $n - \mu$ nicht additiven willkürlichen Constanten besitzen. —

---

Wenn man sich irgend welche partielle Differentialgleichungen mit derselben unbekannten Function $V$ vorlegt und es tritt in ihnen diese Function selbst auf, so darf man nur an Stelle von $V$ eine unbekannte Function $W$ von $V$ und von den unabhängigen Variabeln in der Weise einführen, dass man sich $V$ durch die Gleichung

$$W = \text{Const.}$$

bestimmt denkt, um hierdurch sofort die gegebenen partiellen Differentialgleichungen zu verwandeln in solche, die zwar eine unabhängige Variable $V$ mehr besitzen, dafür aber die neue unbekannte Function $W$ nur in ihren partiellen Differentialquotienten enthalten.

Indem wir hiernach nur solche partielle Differentialgleichungen zu betrachten brauchen, in denen die unbekannte Function selbst nicht

vorkommt, können wir der Frage, um die es sich handelt, die folgende allgemeine Fassung geben:

Gegeben sind $m$ Gleichungen:

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \; \ldots \; f_m = 0$$

zwischen den $2n$ Grössen

$$q_1, q_2, \ldots q_n, \; p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \; p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \; \ldots \; p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n},$$

aus denen sich $m$ von den Grössen $p$ durch die übrigen und die $q$ bestimmen lassen. Unter welchen Bedingungen existirt eine Function $V$ der unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_n$, welche allen diesen Gleichungen gleichzeitig genügt? Oder nur anders ausgedrückt: Unter welchen Bedingungen kann man noch $n - m$ andere Gleichungen zwischen denselben Grössen finden:

$$(2) \qquad f_{m+1} = 0, \; \ldots . \; f_n = 0,$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen (1) $p_1, p_2, \ldots p_n$ so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots p_n dq_n$$

ein vollständiges Differential wird?

Die Auffindung dieser Bedingungen geschieht mittelst des Satzes I., während der Nachweis, dass dieselben nicht bloss nothwendig, sondern auch ausreichend sind, sodann dem Satze II. entnommen wird.

Wenn es wirklich $n - m$ Gleichungen von der verlangten Art giebt, so müssen nach I. die aus ihnen und den gegebenen Gleichungen folgenden Werthe der Grössen $p$ den Bedingungen:

$$(3) \qquad (f_i, f_\varkappa) = 0$$

identisch Genüge leisten.

Daraus folgt unmittelbar, dass die Gleichungen (1) keine gemeinsame Lösung zulassen können, die nicht zu gleicher Zeit auch allen denjenigen Gleichungen (3) genügte, in denen $i$ und $k \leq m$ ist.

Unser erstes Geschäft wird es daher sein müssen, mit den gegebenen Functionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ die $\frac{m(m-1)}{2}$ Ausdrücke

$$(f_i, f_k)$$

zu bilden und die Werthe zu betrachten, welche dieselben in Folge der Gleichungen (1) annehmen.

Findet sich, dass irgend einer dieser Ausdrücke durch die Gleichungen (1) auf eine von Null verschiedene Constante oder auf eine blosse Function von $q_1, q_2, \ldots q_n$ reducirt wird, so ist schon mit dieser ersten Reihe von Operationen die ganze Untersuchung zu Ende. Es ist dann unmöglich den Bedingungen (3) identisch zu genügen und man ist daher sicher, dass die Gleichungen (2) nicht existiren oder dass die gegebenen Gleichungen eine gemeinsame Lösung nicht zulassen.

Tritt dieser Umstand aber nicht ein, so ist im Allgemeinen jene Reihe von Operationen nun noch weiter fortzuführen. Man hat dann zunächst, unter Weglassung aller derjenigen Gleichungen (3), welche durch die gegebenen Gleichungen allein schon erfüllt werden, die übrigen dem System (1) als neue Gleichungen hinzuzufügen. Mit diesem, durch eine Anzahl neuer Gleichungen vervollständigten Systeme sind hierauf die nämlichen Operationen vorzunehmen, die man vorhin mit dem gegebenen Systeme angestellt hatte, u. s. f. Dann muss man schliesslich immer auf einen der beiden Fälle stossen:

A. Entweder es ergiebt sich im Laufe der Rechnung irgend eine Gleichung, welche unter Vermittelung der vorhergehenden zu einer nicht identischen Relation führt, die frei ist von sämmtlichen Differentialquotienten $p$.

Die gegebenen Gleichungen sind alsdann einer simultanen Integration sicher nicht fähig.

Dieser Fall wird jedesmal dann eintreten, wenn man bereits zu $n$ Gleichungen

$$f_1 = 0, \ldots f_m = 0, \quad f_{m+1} = 0, \ldots f_n = 0$$

gelangt ist, ohne dass durch dieselben den Bedingungen (3) sämmtlich Genüge geschieht; daher man die Rechnung stets abbrechen kann, sobald man $n$ Gleichungen erhalten hat.

B. Oder man erhält $\mu \leqq n$ Gleichungen:

$$(4) \qquad f_1 = 0, \ldots f_m = 0, \quad f_{m+1} = 0, \ldots f_\mu = 0,$$

durch die allen denjenigen Gleichungen (3) identisch genügt wird, in denen $i$ und $k \leqq \mu$ ist.

Der letztere Fall verlangt eine eingehendere Betrachtung.

Wären jene $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ Gleichungen (3) an sich identisch, so würden nach dem Satze II. die Gleichungen (4) und folglich auch die gegebenen sicher eine gemeinsame vollständige Lösung mit $n - \mu$ willkürlichen Constanten besitzen. Aber man darf nicht, wie es in den oben angeführten Abhandlungen geschieht, ohne Weiteres schliessen, dass dasselbe gerade so auch dann noch gilt, wenn die Gleichungen (3) erst durch Hinzuziehung der Gleichungen (4) identisch werden. Denn es kann sehr wohl sein, dass die Gleichungen (3) nur eine Folge sind der besonderen Form der Gleichungen (4), dass sie aber nicht für jede beliebige Form gelten, die man diesen Gleichungen geben kann. In der That lassen sich $\mu$ beliebig gegebene Gleichungen zwischen den $2n$ Variabeln $p$ und $q$ immer auf eine solche Form bringen, dass aus denselben die Gleichungen (3) folgen. Man braucht die gegebenen Gleichungen z. B. nur durch ihre Quadrate zu ersetzen, um sofort ein System Gleichungen (4) zu erhalten, welches die Gleichungen (3) nach sich zieht.

Mit dem Eintreten des Falles B. ist demnach die Untersuchung durchaus noch nicht beendigt; vielmehr erfordert die Discussion dieses Falles eine neue Reihe von Operationen, die darauf hinzielen, das System (4) womöglich auf ein solches zurückzuführen, in welchem die Ausdrücke $(f_i, f_k)$ identisch Null sind.

Zu diesem Ende wird man zunächst die Gleichungen (4), aus denen, in Folge der Art, wie sie erhalten wurden, immer $\mu$ von den Grössen $p$ durch die übrigen und die $q$ bestimmbar sind, etwa nach $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ auflösen und mit diesen Auflösungen:

$$(5) \qquad p_1 = \varphi_1, \quad p_2 = \varphi_2, \ldots p_\mu = \varphi_\mu$$

sodann die $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ Ausdrücke bilden:

$$(6) \quad (\varphi_i - p_i, \varphi_k - p_k) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} + \sum_{h=\mu+1}^{h=n} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_h} \right).$$

Sind diese Ausdrücke sämmtlich Null, wie dies der Fall sein muss, wenn die Gleichungen (3) für jede beliebige Form der Gleichungen (4) Geltung haben, dann allerdings besitzen die Gleichungen (5) und mit ihnen die gegebenen (1) eine gemeinsame vollständige Lösung mit $n - \mu$ willkürlichen Constanten. Diese Lösung findet man durch die Jacobi'sche Methode, welche*) im ungünstigsten Falle die Kenntniss erfordert je eines Integrales von

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | Systemen | von | $2n - 2\mu$, |
| $\mu + 1$ | „ | „ | $2n - 2(\mu + 1)$, |
| . . . . . | . . . | . . . | . . . . . . |
| $n - 1$ | „ | „ | $2$ |

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, aber, wenn man diejenige lineare Combination der zu integrirenden Systeme linearer partieller Differentialgleichungen eintreten lässt, welche nach dem Vorgange des Herrn Weiler von Herrn Clebsch in der Abhandlung *„Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen"* (Crelle, J. 65.) auseinander gesetzt worden ist, im Allgemeinen schon zu der gesuchten Lösung führt nach Ermittelung je eines Integrales von

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | Systemen | von | $2n - 2\mu$ |
| $2$ | „ | „ | $2n - 2(\mu + 1)$ |
| . . . . | . . . | . . . | . . . . . . |
| $2$ | „ | „ | $2$ |

gewöhnlichen Differentialgleichungen. —

*) Vgl. die Jacobi'schen Vorlesungen über Dynamik, S. 291 u. flg.

Hingegen, wenn die Ausdrücke (6) nicht sämmtlich verschwinden, so muss man nun auch das System (5) denselben Operationen unterwerfen, die man zuerst mit dem gegebenen System (1) durchgeführt hatte, d. h. man muss diejenigen Gleichungen

$$(\varphi_i - p_i,\ \varphi_k - p_k) = 0,$$

die nicht identisch stattfinden, den Gleichungen (5) als neue Gleichungen:

$$f_{\mu+1} = 0,\ f_{\mu+2} = 0,\ \ldots$$

hinzufügen, mit denselben die Gleichungen bilden

$$(\varphi_i - p_i,\ f_{\mu+h}) = 0,\ (f_{\mu+h},\ f_{\mu+k}) = 0$$

und so fortfahren, bis man wiederum zu einem der beiden Fälle A. oder B. gelangt ist, wo dann die früheren Betrachtungen sich wiederholen. —

Jedoch nicht in allen Fällen ist es nöthig, die Ausdrücke (6) wirklich zu berechnen. In gewissen Fällen — und zu diesen gehört gerade der am häufigsten auftretende Fall linearer partieller Differentialgleichungen — kann man auch direkt aus der Erreichung des Falles B. die Existenz einer gemeinsamen vollständigen Lösung mit $n-\mu$ willkürlichen Constanten der vorgelegten Gleichungen folgern.

Um dies einzusehen, ist nur nöthig zu untersuchen, unter welcher Bedingung aus den Gleichungen (3) die Identitäten

$$(7)\qquad (\varphi_i - p_i,\ \varphi_k - p_k) = 0$$

hervorgehen.

Nach Voraussetzung sind die Gleichungen (5) die Auflösungen des Systems (4). Versteht man daher unter $f=0$ irgend eine der Gleichungen (4), so wird durch die Substitutionen (5) mit $f$ zugleich auch

$$\frac{\partial f}{\partial q_h} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial q_h} = 0 \text{ für } h = 1, 2, \ldots n$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial p_h} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\varrho}\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_h} = 0 \quad ,, \quad h = \mu+1, \ldots n.$$

Setzt man die hieraus folgenden Werthe der partiellen Differentialquotienten von $f_i$ und $f_k$ nach $q_1, \ldots q_n, p_{\mu+1}, \ldots p_n$ in den Ausdruck $(f_i f_k)$ ein, so erhält derselbe den Werth:

$$(f_i,\ f_k) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\mu} \frac{\partial f_i}{\partial p_\varrho}\frac{\partial f_k}{\partial p_\sigma}(\varphi_\varrho - p_\varrho,\ \varphi_\sigma - p_\sigma).$$

Diese durch die Substitutionen (5) identische Gleichung lehrt, dass im Falle B. immer die Identitäten (7) stattfinden, so oft die Determinante

$$(8)\qquad \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial f_\mu}{\partial p_\mu},$$

die an sich nicht Null ist, auch durch die Substitutionen (5) nicht Null wird, während man dasselbe nicht mehr behaupten kann, wenn diese Determinante in Folge der Gleichungen (4) verschwindet, d. h. die Werthe (5) von $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ vielfache Wurzeln der Gleichungen (4) sind.

In dem besonderen Falle nun, wo die gegebenen Gleichungen (1) linear sind in Bezug auf die Differentialquotienten $p$, hat auch das vervollständigte System (4) dieselbe Eigenschaft. Daher ist dann die Determinante (8) ganz unabhängig von $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ und folglich sind in diesem Falle die Bour'schen Kriterien ebenso ausreichend wie nothwendig.

Sind die Gleichungen (1) überdies auch homogen in Bezug auf die $p$, so kann man den entscheidenden Ausdrücken $(f_i, f_k)$ noch eine andere Form geben. Ist nämlich allgemein:

$$f_i = Q_{i1}p_1 + Q_{i2}p_2 + \cdots Q_{in}p_n,$$

wo die $Q$ blosse Functionen der $q$ sind, und führt man die Bezeichnung ein:

$$\mathsf{A}_i(V) = Q_{i1}\frac{\partial V}{\partial q_1} + Q_{i2}\frac{\partial V}{\partial q_2} + \cdots Q_{in}\frac{\partial V}{\partial q_n},$$

so hat man in der Voraussetzung $p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}$:

$$\mathsf{A}_k\big(\mathsf{A}_i(V)\big) - \mathsf{A}_i\big(\mathsf{A}_k(V)\big) = (f_i, f_k).$$

Bemerkt man noch, dass überhaupt, sobald $f_1, f_2, \ldots f_m$ ganze homogene Functionen der $p$ sind, in dem vervollständigten System (4) $\mu < n$ sein muss, falls diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung besitzen sollen neben der evidenten $V = \text{Const.}$, so sieht man, dass sich aus dem Vorhergehenden für lineare homogene partielle Differentialgleichungen dieselben Kriterien der simultanen Integrabilität ergeben, welche auf anderem Wege in der oben citirten Abhandlung von Herrn Clebsch aufgestellt worden sind.

Leipzig, April 1871.

# Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double.

Par Fr. Brioschi à Milan.

---

La recherche des tangentes doubles à une courbe du quatrième dégré avec un point double, présente une application très-intéressante de la théorie des covariants et des invariants simultanés des formes binaires.

Soient $u$, $v$ deux formes binaires en $x$, $y$; la première biquadratique, quadratique la seconde. Si le point double est déterminé par $x=0$, $y=0$, on pourra donner à l'équation de la courbe du quatrième dégré la forme suivante:

$$U = 6z^2 v - u;$$

et si l'on suppose que la droite $z + px + qy = 0$ soit une tangente double de la courbe, on aura:

$$6(px+qy)^2 v - u = f^2$$

$f$ étant une forme quadratique en $x$, $y$. L'équation $f=0$ donne deux droites passantes par le point double, et les autres points d'intersection avec la courbe sont les points de contact des deux tangentes doubles:

$$z + px + qy = 0; \qquad -z + px + qy = 0.$$

On a huit fonctions $f$; et l'on voit tout-de-suite la liaison que la recherche des tangentes doubles a avec la bissection des fonctions hyperelliptiques de première espèce.

Soient $\varphi$, $\psi$ deux formes binaires des dégrés $n$, $m$; en posant:

$$\frac{1}{n}\,\frac{d\varphi}{dx} = \varphi_1; \quad \frac{1}{n(n-1)}\,\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi_{11} \;\ldots\ldots\; \frac{1}{m}\,\frac{d\psi}{dx} = \psi_1 \;\ldots\ldots$$

et:

$$(\varphi\psi) = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1; \quad (\varphi\psi)^2 = \varphi_{11}\psi_{22} - 2\varphi_{12}\psi_{12} + \varphi_{22}\psi_{11};$$

$$(\varphi\psi)^3 = \varphi_{111}\psi_{222} - 3\varphi_{112}\psi_{221} + 3\varphi_{122}\psi_{211} - \varphi_{222}\psi_{111};$$

les fonctions $(\varphi\psi)$, $(\varphi\psi)^2$, $(\varphi\psi)^3 \ldots$ sont des covariants ou des invariants simultanés des formes $\varphi$, $\psi$.

Les formes $u$, $v$ donnent lieu aux formes simultanées suivantes*):

$$u;\ v;\ h=\tfrac{1}{2}(uu)^2\ ;\ w=(uv)^2\ ;\ t=(uw)^2$$

$$k=\tfrac{1}{2}(vv)^2;\ i=\tfrac{1}{2}(uu)^4;\ j=\tfrac{1}{3}(uh)^4;\ I=(vw)^2;\ J=\tfrac{1}{2}(ww)^2=\tfrac{1}{2}(vt)^2$$

$$K=\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix}.$$

L'invariant $K$ est gauche; c'est-à-dire son carré peut s'exprimer en fonction des autres invariants. En posant:

$$A=4kJ-I^2\ ;\ B=IJ-ikI-4k^2j\ ;\ C=k(iJ+jI)-J^2$$

on a:

$$K^2k=AC-B^2.$$

J'ajoute aux invariants supérieurs le discriminant simultané:

$$\Delta=I^2-16k(J-ki)$$

et en posant:

$$D=\tfrac{1}{2}(I+\sqrt{\Delta})\qquad E=\tfrac{1}{2}(I-\sqrt{\Delta})$$

j'observe qu'on a:

$$4k^2i=A+ID+E^2=A+IE+D^2$$

$$16k^3j=E(A+ID)-(AE+4Bk)=D(A+IE)-(AD+4Bk)$$

et les:

$$(AD+4Bk)(AE+4Bk)=-16K^2k^3$$

$$ADE+4Bk(D+E)+16Ck^2=0.$$

Les formes biquadratiques $u$, $h$ peuvent s'exprimer, comme il est connu, en fonctions quadratiques des covariants $v$, $w$, $t$; et l'on a entre ces covariants une équation identique du second dégré. Ces relations, qui peuvent prendre des formes différentes, se déduisent des trois suivantes:

$$\begin{aligned} &Iu+4kh=w^2-iv^2+2vt \\ (1)\qquad &Ju+Ih=jv^2+wt \\ &(iI+4kj)u+4Jh=iw^2+t^2+4jvw. \end{aligned}$$

Par exemple, en multipliant ces dernières par $A+ID$, $4kE$, $-4k^2$ et en les ajoutant, on trouve:

$$4k^2u=-\frac{1}{AE+4Bk}\Big[(A+ID)v+2kEw-4k^2t\Big]^2-Ev^2+4kvw;$$

par conséquent si l'on pose:

$$(2)\qquad (A+ID)v+2kEw-4k^2t=\theta\sqrt{AE+4Bk}$$

l'on a:

$$(3)\qquad 4k^2u=-\theta^2-Ev^2+4kvw.$$

*) On peut consulter à ce propos les mémoires de MM. Harbordt, Bessel et Gordan, Mathematische Annalen. Band 1.

Si avec la forme ternaire $U$ et son hessien:

$$H = -3kvz^4 + (3vw - 4ku)z^2 + hv$$

on forme l'équation du quatorzième dégré trouvée par Mr. Hesse pour la courbe dont les points d'intersection avec $U = 0$ sont les points de contact des tangentes doubles; en éliminant $z$ entre cette équation et l'équation $U = 0$, on obtient l'équation du sizième dégré suivante:

$$[2k^2u^2 + (Iv - 4kw)uv + 8khv^2]^2 - \Delta u^2v^4 = 0$$

le premier membre de laquelle sera le produit des huit fonctions quadratiques $f$. Or cette équation se décompose évidemment dans les deux:

$$2k^2u^2 + (Iv - 4kw)uv + 8khv^2 \pm uv^2\sqrt{\Delta} = 0,$$

desquelles à cause de la première des relations (1) on déduit:

$$(ku - vw)^2 - (Eu + iv^2 - 2vt)v^2 = 0,$$

et l'autre en substituant $D$ à $E$. Mais en multipliant cette dernière par $4k^2$ on a:

$$4k^2(ku-vw)^2 - 4kE(ku-vw)v^2 - [(A+ID+E^2)v + 4kEw - 8k^2t]v^3 = 0$$

ou en substituant $\theta$ à $t$ au moyen de la relation (2), on obtient:

$$4k^2(ku - vw)^2 - 4kE(ku - vw)v^2 - 2N\theta v^3 + (A + ID - E^2)v^4 = 0$$

ayant posé:

$$N = \sqrt{AE + 4Bk} = \sqrt{-E^3 + 4k^2iE - 16k^3j}.$$

Enfin en observant que l'expression (3) de $u$ donne:

$$4k(ku - vw) = -(\theta^2 + Ev^2)$$

l'équation supérieure deviendra:

$$(\theta^2 + Ev^2)^2 + 4Ev^2(\theta^2 + Ev^2) - 8N\theta v^3 + 4(A + ID - E^2)v^4 = 0$$

ou:

$$(\theta - \varrho_1 v)(\theta - \varrho_2 v)(\theta - \varrho_3 v)(\theta - \varrho_4 v) = 0$$

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ étant les racines de l'équation du quatrième dégré:

$$(4) \qquad \varrho^4 + 6E\varrho^2 - 8N\varrho - 3E^2 + 16k^2i = 0.$$

Quatre fonctions $f$ sont en conséquence données par l'équation:

$$(5) \qquad 2kf = \theta - \varrho v$$

et les deux tangentes doubles correspondantes par la:

$$24k^2z^2 - (\varrho^2 - E)v + 2\theta\varrho - 4kw = 0$$

dans laquelle on posera pour $\theta$ l'expression (2).

En permutant $E$, $D$ on aura une seconde équation du quatrième dégré, les autres fonctions $f$, et les tangentes doubles relatives.

Ces deux équations du quatrième dégré sont douées d'une propriété très-remarquable; leurs invariants quadratique et cubique sont égaux et en les désignant par $S$, $T$, on trouve:

$$S = 16k^2i \qquad T = 4E(A + ID) - 4N^2 = 64k^3j.$$

Les deux fonctions anharmoniques des quatre racines des deux équations supérieures et de la $u = 0$ auront donc la même valeur; c'est-à-dire les deux premières peuvent se déduire de la troisième au moyen d'une substitution linéaire.

La résolution de l'équation du sizième dégré de la bissection des fonctions hyperelliptiques de la première espèce se réduit par conséquent à celle de deux équations du quatrième dégré et de huit équations du second dégré; et seulement à la resolution de ces dernières, lorsque les racines de l'équation $u = 0$ sont connues.

J'ajouterai enfin une remarque relative à la forme de l'équation en $\varrho$. Cette forme correspond à celle qu'on obtient par la substitution linéaire qui annulle le coefficient du second terme dans la transformation d'une biquadratique. En effet en supposant:

$$u = (a_0, a_1 \ldots . a_4)(x, y)^4$$

et

$$x = \frac{1}{a_0}(\xi - a_1) \quad , \quad y = 1$$

on trouve:

$$a_0^3 u = \xi^4 + 6e\xi^2 - 8n\xi - 3e^2 + a_0^2 i$$

étant:

$$e = a_0 a_2 - a_1^2$$

et:

$$2n = 3a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3 - 2a_1^3 = \sqrt{-4e^3 + a_0^2 ie - a_0^3 j}\,.$$

La transformée a évidemment la même forme de l'équation en $\varrho$, et ses coefficients sont fonctions de $e$, $i$, $j$; comme ceux de l'équation en $\varrho$ de $E$, $S$, $T$. L'équation en $\varrho$ s'obtiendra par conséquent de l'équation en $\xi$ par la substitution $\xi = \frac{a\varrho - \alpha}{\beta - b\varrho}$, étant:

$$\varphi(a, b) = a^4 + 6ea^2b^2 + 8nab^3 + (a_0^2 i - 3e^2)\,b^4$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{4}\frac{d\varphi}{db} \quad ; \quad \beta = \tfrac{1}{4}\frac{d\varphi}{da}$$

et les $a$, $b$ déterminées par les deux relations:

$$a_0\varphi = 4k \quad ; \quad \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)^2 = E;$$

propriétés qu'on déduit facilement de la théorie des covariants associés.

Milan, avril 1871.

# Observations géométriques à propos de la Note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4e ordre avec un point double".

Par L. Cremona à Milan.

En supposant que $\varrho$ ne soit pas une racine de l'équation (4), mais plutôt un paramètre arbitraire, on déduit des équations (3) et (5) la suivante

$$4k^2(6z^2v-u)=v[24k^2z^2+(E-\varrho^2)v+2\varrho\theta-4kw]+4k^2f^2.$$

Donc, quelque soit $\varrho$, la conique

$$24k^2z^2+(E-\varrho^2)v+2\varrho\theta-4kw=0 \tag{6}$$

est tangente à la courbe biquadratique donnée

$$6z^2v-u=0$$

en quatre points, situés par couples dans les deux droites $f=0$. L'équation (6) représente un système de coniques quadritangentes: il contient quatre coniques qui se décomposent en deux droites (tangentes doubles), et ces quatre coniques particulières correspondent aux quatre valeurs du paramètre $\varrho$ qui satisfont l'équation (4). En effet, le premier membre de celle-ci ne diffère du discriminant de la forme ternaire (6) que par un facteur indépendant de $\varrho$.

L'interprétation géométrique du résultat obtenu par Mr. Brioschi est donc la suivante: „Une courbe homologique-harmonique*) du 4e ordre avec un point double possède deux systèmes de coniques quadritangentes, qui ont même centre et axe d'homologie harmonique (c'est-à-dire que le point $x=y=0$ est le pole de la droite $z=0$). L'équation de l'un de ces systèmes est (6), où $\varrho$ désigne le paramètre; en permutant $E$ avec $D$, on obtient le second système. Dans chaque système, les couples de droites menées du point double aux points de contact de la courbe donnée avec les coniques quadritangentes forment une involution: ce qui résulte de la relation (5). Chaque système comprend quatre couples de tangentes doubles; et les valeurs correspondantes du paramètre sont les racines de l'équation (4)."

En désignant par $\omega$ la forme qu'on déduit de $\theta$ par la permuta-

*) C'est-à-dire que la courbe possède un *centre* $x=y=0$ et un *axe* $z=0$ de *homologie harmonique*: propriété géométrique qui correspond à l'absence du terme linéaire en $z$ dans l'équation de la courbe. On sait d'ailleurs que toute courbe hyperelliptique peut être transformée rationnellement en une courbe homologique-harmonique.

tion de $E$ avec $D$, on voit tout de suite que les trois groupes de quatre droites

$$v \,.\, \theta = 0, \qquad v \,.\, \omega = 0, \qquad \omega \,.\, \theta = 0$$

sont harmoniques. Les formes biquadratiques $u = 0$, $\omega\theta = 0$ sont aussi liées *harmoniquement* entre elles, selon la dénomination proposée par Mr. Battaglini*); donc les formes $\theta$, $\omega$ sont déterminées par les conditions que les invariants quadratiques

$$(v \,.\, \vartheta)^2, \quad (v \,.\, \omega)^2, \quad (\vartheta \,.\, \omega)^2, \quad (\vartheta\omega \,.\, u)^4$$

soient tous égaux à zéro.

On peut aussi présenter le théorème ci-devant sous la forme algébrique qui suit: „On donne deux formes binaires $u$ et $v$, biquadratique la première, quadratique l'autre; et on demande à satisfaire à l'équation

$$u = v\varphi - f^2$$

Il y a deux systèmes de solutions, dont l'un est contenu dans les formules

$$2kf = \theta - \varrho v, \qquad 4k^2\varphi = (\varrho^2 - E)v + 2\varrho\theta - 4kw,$$

$\varrho$ étant arbitraire. La permutation de $E$ avec $D$ donne l'autre système."

On obtient très rapidement les 16 tangentes doubles de la courbe proposée, en lui appliquant le procédé ingénieux que Mr. Geiser**) a indiqué pour la courbe générale du 4^e^ ordre. En supposant donnée une surface générale du 3^e^ ordre, si l'on place l'oeil sur une des 27 droites, la projection plane du contour apparent de la surface sera précisement une courbe du 4^e^ ordre avec un point double. Je conserve pour les 27 droites la notation de Mr. Schläfli, omis seulement l'index 6; si $a$ est la droite choisie pour y placer l'oeil $O$, la trace de $a$ sur le plan de projection sera le point double; les traces des deux plans bitangents contenant les coniques touchées par $a$ seront les tangentes au point double; les cinq plans tritangents qui passent par $a$ et le plan tangent en $O$ auront pour traces les six tangentes issues du point double. Enfin, les 16 tangentes doubles seront les projections des 16 droites

$$a_1,\; a_2,\; a_3,\; a_4,\; a_5,\; b,\; c_{12},\; c_{13},\; c_{14},\; c_{15},\; c_{23},\; c_{24},\; c_{25},\; c_{34},\; c_{35},\; c_{45}$$

de la surface, qui ne sont pas rencontrées par $a$. Or, il suit de la théorie très connue de la surface du 3^e^ ordre, que ces 16 droites se déterminent linéairement, dès qu'on connait les restantes; par ex. $a_1$ est la droite commune aux hyperboloïdes $c_1 b_2 b_3$, $c_1 b_2 b_4$ qui ont déjà en commun $c_1$, $b_2$ et $a$.

---

*) Sulle forme binarie di grado qualunque (Atti della R. Accademia delle scienze di Napoli, vol. III, pag. 11).

**) Mathem. Annalen, t. 1, p. 129.

Si l'on veut que le contour de la surface donne une courbe homologique-harmonique, il faut supposer que la surface, au lieu d'être tout-à-fait générale, présente cette singularité que, dans deux des plans tritangents qui passent par $a$, les deux droites y contenues se coupent sur $a$. Nous supposerons que cela arrive pour les plans $ab_4c_4$, $ab_5c_5$. Soit donc l'équation de la courbe proposée

(I) $$xyz^2 - (y + \lambda^2 x)(y + \lambda_1{}^2 x)(y + \lambda_2{}^2 x)(y + \lambda_3{}^2 x) = 0,$$

l'équation de la surface $J_3$ sera

(II) $$w^2(y + \lambda^2 x) + 2(f\lambda^2 x + ey)zw + (f^2\lambda^2 x + e^2 y)z^2 \\ - \lambda^2(e - f)^2(y + \lambda_1{}^2 x)(y + \lambda_2{}^2 x)(y + \lambda_3{}^2 x) = 0,$$

où $w = 0$ est le plan de projection; $e$, $f$ sont deux constantes arbitraires, inégales. La droite $a$ est $x = y = 0$; les droites $(c_1, b_1)$, $(c_2, b_2)$, $(c_3, b_3)$ sont données par

$$y + \lambda_r{}^2 x = 0, \qquad \lambda(w + fz) \pm \lambda_r(w + ez) = 0$$

$(r = 1, 2, 3)$; les droites $(c_4, b_4)$ par

$$x = 0, \qquad w + ez \pm \lambda(e - f)y = 0$$

et les droites $(c_5, b_5)$ par

$$y = 0, \qquad w + fz \pm \lambda_1\lambda_2\lambda_3(e - f)x = 0.$$

Coupons la surface $J_3$ par un hyperboloïde

(III) $$z(Ax + By) + w(Cx + Dy) = 0$$

mené par les droites $x = y = 0$, $z = w = 0$, la deuxième desquelles perce $J_3$ aux trois points $c_1b_1$, $c_2b_2$, $c_3b_3$. En éliminant $w$ entre (II) et (III), on a l'équation de la projection de l'intersection des deux surfaces: équation qui représentera une courbe du 5$^e$ ordre, ayant un point triple en $x = y = 0$ et tangente à la courbe (I) aux points $c_1b_1$, $c_2b_2$, $c_3b_3$ et en quatre autres points allignés avec $x = y = 0$ sur les droites

$$(y + \lambda^2 x)(Ax + By) - (ey + f\lambda^2 x)(Cx + Dy) = 0.$$

Or, en écrivant que l'équation du 5$^e$ degré contient les trois facteurs $y + \lambda_r{}^2 x$, on a les trois conditions

$$\lambda[A - fC - \lambda_r{}^2(B - fD)] \pm \lambda_r[A - eC - \lambda_r{}^2(B - eD)] = 0$$

qui donnent huit systèmes de valeurs pour $A : B : C : D$ correspondant aux combinaisons de signes de $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. La combinaison $(+\ +\ +)$ donne ainsi l'hyperboloïde

$$(w + ez)[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)y - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 x] \\ + (w + fz)\lambda[y - (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)x] = 0$$

lequel, ayant déjà quatre droites $a$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ communes avec $J_3$, coupera cette surface suivant deux nouvelles droites $b$, $c_{45}$, dont les projections sur le plan $w = 0$ seront deux tangentes doubles de la courbe (I), savoir

$$\pm z + (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) y - \lambda \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right) x = 0.$$

Analoguement, les autres combinaisons de signes $(+ - -)$, $(- + -)$, $(- - +)$, $(- - -)$, $(- + +)$, $(+ - +)$, $(+ + -)$ donnent les autres 7 couples de droites $(a_1 c_{23})$, $(a_2 c_{31})$, $(a_3 c_{12})$, $(a_4 a_5)$, $(c_{14} c_{15})$, $(c_{24} c_{25})$, $(c_{34} c_{35})$. Les premières quatre couples et les quatre dernières appartiennent respectivement aux deux systèmes de coniques quadritangentes, dont j'ai déjà parlé.

J'observe encore que la section de $J_3$ par le plan $w = 0$ est la cubique homologique-harmonique

$$(f^2 \lambda^2 x + e^2 y) z^2 - \lambda^2 (e - f)^2 (y + \lambda_1^2 x)(y + \lambda_2^2 x)(y + \lambda_3^2 x) = 0$$

ayant un point d'inflexion en $x = y = 0$, et pour tangentes issues de ce point les trois droites $y + \lambda_r^2 x = 0$. Les trois points de contact de ces tangentes, situés dans $z = 0$, et deux autres points allignés avec $x = y = 0$ sur la droite $f\lambda^2 x + ey = 0$ sont autant de points de tangence entre la cubique et la courbe (I). Les traces des 27 droites de $J_3$ sont distribuées dans la cubique de la manière suivante: le point $x = y = 0$ est la trace de $a$; les traces de $c_4$, $b_4$ sont dans $x = 0$; celles de $c_5$, $b_5$ dans $y = 0$; les traces de $b_1$ et $c_1$, de $b_2$ et $c_2$, de $b_3$ et $c_3$ coïncident deux à deux avec les points de contact des tangentes issues du point d'inflexion. Enfin, les traces des autres 16 droites sont, par couples, allignées avec $x = y = 0$ sur les 8 droites

$$[e(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + f\lambda] y - [e\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + f\lambda(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)] x = 0$$

correspondant aux combinaisons de signes de $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. Ces 8 droites sont les traces des 8 hyperboloïdes, qui ont tous en commun les droites $x = y = 0$, $z = w = 0$.

Si l'on place l'oeil au point commun à trois droites $a$, $b_4$, $c_4$ de $J_3$, la projection du contour apparent de la surface sera la cubique homologique-harmonique

$$y(w + ez)^2 - \lambda^2 (e - f)^2 (y + \lambda_1^2 x)(y + \lambda_2^2 x)(y + \lambda_3^2 x) = 0.$$

Le point $x = y = 0$ est la projection des droites $a$, $b_5$, $c_5$; les droites $b_4$, $c_4$ se projètent en deux points sur $x = 0$; les trois tangentes issues du point $x = y = 0$ représentent les couples $c_1$ et $b_1$, $c_2$ et $b_2$, $c_3$ et $b_3$; et les huit tangentes de la courbe, issues de ces deux points seront les projections des autres seize droites, coïncidant deux à deux:

$a_1$ et $c_{14}$ , $a_2$ et $c_{24}$ , $a_3$ et $c_{34}$ , $c_{45}$ et $a_5$
$b$ et $a_4$ , $c_{23}$ et $c_{15}$ , $c_{31}$ et $c_{25}$ , $c_{12}$ et $c_{35}$ .

D'ici, et de la propriété anharmonique des quatre tangentes issues d'un point d'une cubique, on conclut immédiatement l'égalité des rapports anharmoniques des trois formes biquadratiques considérées par Mr. Brioschi.

Milan, avril 1871.

# Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.

Von E. Lommel in Erlangen.

1. In einer vorhergehenden Abhandlung*) habe ich gezeigt, dass der Bessel'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

durch das vollständige Integral mit zwei Bessel'schen *Functionen erster Art*

$$y = A J^{\nu}_{(z)} + B J^{-\nu}_{(z)}$$

genügt wird, welchen reellen, imaginären oder complexen Werth die Grösse $\nu$ auch haben mag. Nur wenn $\nu$ eine ganze Zahl $n$ ist, reducirt sich das vorstehende Integral (weil $J^{-n}_{(z)} = (-1)^n J^n_{(z)}$ ist) auf ein blos particuläres; das vollständige Integral für diesen Fall

$$y = A J^n_{(z)} + B Y^n_{(z)}$$

nimmt neben der Bessel'schen Function erster Art $J^n_{(z)}$ auch noch die Bessel'sche *Function zweiter Art* $Y^n_{(z)}$ in sich auf.

Wäre nur das eine der beiden particulären Integrale, etwa $J^{\nu}_{(z)}$, gegeben, so könnte man sich durch folgende bekannte Methode eine zweite particuläre Lösung verschaffen. Man setze

$$y = J^{\nu}_{(z)} \int \varphi(z) \,.\, dz$$

in die Differentialgleichung ein; man erhält dann zur Bestimmung der Function $\varphi$ folgende Gleichung:

$$J^{\nu}_{(z)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(2 \cdot \frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{\partial z} + \frac{1}{z} \cdot J^{\nu}_{(z)}\right) \cdot \varphi = 0,$$

woraus sich sofort

$$\varphi(z) = \frac{C}{z\left(J^{\nu}_{(z)}\right)^2}$$

und demnach

$$y = C J^{\nu}_{(z)} \int \frac{dz}{z\left(J^{\nu}_{(z)}\right)^2}$$

---

*) Diese Annalen Bd. III, pag. 475; vergl. auch meine „Studien über die Bessel'schen Functionen", § 29.

ergiebt, wo $C$ eine willkürliche Constante ist. Da dieses particuläre Integral in dem bereits bekannten vollständigen Integral nothwendig enthalten ist, so muss, bei geeigneter Bestimmung der Constanten, folgende Beziehung stattfinden:

$$CJ^{\nu}_{(z)}\int\frac{dz}{z\left(J^{\nu}_{(z)}\right)^2} = AJ^{\nu}_{(z)} + BJ^{-\nu}_{(z)},$$

welche, nachdem beiderseits mit $CJ^{\nu}_{(z)}$ dividirt und die willkürliche Integrationsconstante $\left(\frac{A}{C}\right)$ als selbstverständlich weggelassen ist, kürzer wie folgt geschrieben werden kann:

$$(1_a)\qquad \int\frac{dz}{z\left(J^{\nu}_{(z)}\right)^2} = \alpha\cdot\frac{J^{-\nu}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}},$$

wo die Constante $\alpha$ noch zu bestimmen bleibt. Von dem particulären Integrale $J^{-\nu}_{(z)}$ ausgehend, gelangt man auf demselben Wege zu der Gleichung

$$(1_b)\qquad \int\frac{dz}{z\left(J^{-\nu}_{(z)}\right)^2} = -\alpha\cdot\frac{J^{\nu}_{(z)}}{J^{-\nu}_{(z)}}.$$

Für den speciellen Fall eines ganzzahligen $\nu$ findet man ebenso

$$(2_a)\qquad \int\frac{dz}{z\left(J^{n}_{(z)}\right)^2} = \beta\cdot\frac{Y^{n}_{(z)}}{J^{n}_{(z)}}$$

$$(2_b)\qquad \int\frac{dz}{z\left(Y^{n}_{(z)}\right)^2} = -\beta\cdot\frac{J^{n}_{(z)}}{Y^{n}_{(z)}}.$$

Dass der constante Factor zur Rechten in den Formeln (b) der nämliche, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, sein muss, wie in der entsprechenden Formel (a), erkennt man auf den ersten Blick.

2. Nun werde die Gleichung $(1_a)$ nach $z$ differentiirt, man erhält dadurch

$$\frac{1}{z} = \alpha\left(J^{\nu}_{(z)}\,\frac{\partial J^{-\nu}_{(z)}}{dz} - J^{-\nu}_{(z)}\cdot\frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{dz}\right)$$

oder, wenn man $\frac{1}{\alpha} = a$ setzt:

$$(3)\qquad J^{\nu}_{(z)}\cdot\frac{\partial J^{-\nu}_{(z)}}{\partial z} - J^{-\nu}_{(z)}\cdot\frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{\partial z} = \frac{a}{z}.$$

Aus der Theorie der Bessel'schen Functionen ist aber bekannt, dass

$$\frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{\partial z} = -\frac{\nu}{z}\,J^{\nu}_{(z)} + J^{\nu-1}_{(z)}$$

und

$$\frac{\partial J^{-\nu}_{(z)}}{\partial z} = -\frac{\nu}{z}\,J^{-\nu}_{(z)} - J^{-\nu+1}_{(z)}$$

ist. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein, so gelangt man zu der folgenden bemerkenswerthen Beziehung

(4) $$J^{\nu}_{(z)} J^{-\nu+1}_{(z)} + J^{-\nu}_{(z)} J^{\nu-1}_{(z)} = -\frac{a}{z},$$

wo die Constante $a$ noch zu bestimmen bleibt.

Um die Constante $a$, welche nur von $\nu$ abhängen kann, kennen zu lernen, bedenken wir, dass für ein *äusserst grosses* $z$

$$J^{\nu}_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$$

ist. Aus der Gleichung*)

$$J^{-\nu}_{(z)} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m} (-2)^p \cdot \frac{m^{p/-1}(m-\nu)^{p/-1}}{p!} z^{-p} J^{2m-\nu-p}_{(z)},$$

welche jede Bessel'sche Function mit negativem Index durch eine Reihe von solchen mit positivem Index auszudrücken erlaubt, ergiebt sich für ein äusserst grosses $z$:

$$J^{-\nu}_{(z)} = (-1)^m \cdot J^{2m-\nu}_{(z)}$$

oder, wenn man von dem obigen genäherten Ausdruck für $J^{\nu}_{(z)}$ zur Rechten Gebrauch macht:

$$J^{-\nu}_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right).$$

Daraus folgt weiter:

$$J^{\nu-1}_{(z)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$$

und

$$J^{-\nu+1}_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right).$$

Werden jetzt diese asymptotischen Werthe in die Gleichung (4) eingesetzt, so ergiebt sich

$$J^{\nu} J^{-\nu+1} + J^{-\nu} J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z}\left(\sin\left(z + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - \cos\left(z + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right) = \frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi.$$

Demnach muss

$$a = -\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi$$

sein, und wir haben schliesslich die, *für jeden Werth von z giltige*, Gleichung

(A) $$J^{\nu}_{(z)} J^{-\nu+1}_{(z)} + J^{-\nu}_{(z)} J^{\nu-1}_{(z)} = \frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi,$$

*in welcher ein neues wichtiges Grundgesetz der Bessel'schen Functionen seinen Ausdruck findet.* Dieselbe gilt für jeden beliebigsn (reellen, imaginären oder complexen) Werth von $\nu$, auch ganzzahlige Werthe nicht ausgenommen; für letztere Werthe nämlich reduciren sich beide Seiten der Gleichung auf Null.

---

*) s. „Studien etc." § 4.

Die analoge Behandlung der Gleichung ($1_b$) führt selbstverständlich zur nämlichen Relation (A).

3. Differentiirt man jetzt die Gleichung ($2_a$), so findet man zunächst

$$\frac{1}{z} = \beta\left(J^n_{(z)} \cdot \frac{\partial Y^n_{(z)}}{\partial z} - Y^n_{(z)} \cdot \frac{\partial J^n_{(z)}}{\partial z}\right)$$

oder, wenn man $\frac{1}{\beta} = b$ setzt:

$$(5) \qquad J^n_{(z)} \cdot \frac{\partial Y^n_{(z)}}{\partial z} - Y^n_{(z)} \cdot \frac{\partial J^n_{(z)}}{\partial z} = \frac{b}{z}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial J^n_{(z)}}{\partial z} = \frac{n}{z} J^n_{(z)} - J^{n+1}_{(z)}$$

$$\frac{\partial Y^n_{(z)}}{\partial z} = \frac{n}{z} Y^n_{(z)} - Y^{n+1}_{(z)};$$

man hat also, wenn man diese Werthe oben einsetzt:

$$(6) \qquad J^n_{(z)} Y^{n+1}_{(z)} - Y^n_{(z)} J^{n+1}_{(z)} = -\frac{b}{z},$$

wo nur die Constante $b$ noch bestimmt werden muss.

Ehe wir uns hierzu anschicken, sei es gestattet, auf die in dem oben citirten Werkchen „Studien über die Bessel'schen Functionen" unter § 23. gegebene Definition der Bessel'schen Function zweiter Art $Y^n_{(z)}$ zurückzukommen, um dieselbe in etwas zu modificiren. Dort wurde nämlich die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^n_{(z)}$ zusammengesetzt aus zwei Functionen $\mathfrak{J}^n_{(z)}$ und $L^n_{(z)}$, welche zwar jede für sich den Grundgesetzen der Bessel'schen Functionen nicht genügen, deren Summe $\mathfrak{J}^n_{(z)} + L^n_{(z)}$ aber, ohne mit $J^n_{(z)}$ identisch zu sein, jenen Gesetzen gehorcht. Es lag daher am nächsten, jene Summe selbst sofort als Bessel'sche Function zweiter Art hinzustellen. Da nun jene für alle Bessel'schen Functionen charakteristischen Relationen linear und zusammen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent sind, so wird ihnen nothwendig auch der Ausdruck

$$\mathfrak{J}^n_{(z)} + L^n_{(z)} + aJ^n_{(z)}$$

Genüge leisten. Man könnte daher, insoweit als nur jene Relationen als massgebend betrachtet werden, die vorstehende Form als Definition der Function zweiter Art benutzen, indem man über die Constante $a$ derart verfügt, dass der analytische Ausdruck für $Y^n_{(z)}$ möglichst einfach erscheint. In dieser von Willkür nicht freien Art wurde an der angeführten Stelle verfahren, $a = \psi(n - \frac{1}{2}) + \log 2$ gesetzt, und der Ausdruck

$$\mathfrak{J}^n_{(z)} + L^n_{(z)} + \left(\psi(n - \tfrac{1}{2}) + \log 2\right) J^n_{(z)}$$

als Definition für $Y^n_{(z)}$ aufgestellt. Die so definirte Function $Y^n_{(z)}$ ge-

nügt aber der soeben gefundenen Gleichung (6), welche eine nothwendige Beziehung zwischen den Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art ausdrückt, nicht; der Ausdruck $\mathfrak{J}^n_{(z)} + L^n_{(z)} + a J^n_{(z)}$ würde ihr nur dann genügen, wenn $a$ unabhängig von $n$ gewählt würde. Die Gleichung (6) weist uns also darauf hin, $a$ absolut constant oder noch besser gleich Null zu setzen, d. h. zu der zunächst liegenden Definition zurückzukehren.

*Wir definiren daher die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^n_{(z)}$, wie folgt:*

$$Y^n_{(z)} = \mathfrak{J}^n_{(z)} + L^n_{(z)};$$

darin ist

$$\mathfrak{J}^n_{(z)} = \frac{z^n}{\pi . 1^{n/2}} \int_0^\pi \cos(z \cos \omega) \sin^{2n} \omega . \log \sin^2 \omega . d\omega - \left(\psi(n - \tfrac{1}{2}) + \log 2\right) J^n_{(z)}$$

und

$$L^n_{(z)} = \log z . J^n_{(z)} - \tfrac{1}{2} \Sigma\, 2^{p+1} . \frac{n^{p+1/-1}}{p+1} . \frac{J^{n-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}};$$

die Grösse $\psi(n - \frac{1}{2})$ hat folgende Bedeutung:

$$\psi(n - \tfrac{1}{2}) = \psi(0) - 2 \log 2 + 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right),$$

wo $\psi(0)$ die sogenannte Constante des Integrallogarithmen, nämlich

$$\psi(0) = -\,0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,6\ldots$$

ist.

Sämmtliche in dem erwähnten Werkchen über die Function $Y^n_{(z)}$ aufgestellten Sätze behalten, weil sie auf den Grundgesetzen der Bessel'schen Functionen beruhen, auch für diese modificirte Definition ihre volle Geltung. Nur die in § 26. gegebene Entwickelung von $Y^n_{(z)}$ nach negativen Potenzen von $z$ wird jetzt einfacher, wie folgt, lauten:

$$\begin{aligned} Y^n_{(z)} = & -\tfrac{1}{2} \Sigma\, 2^{p+1} . \frac{n^{p+1/-1}}{p+1} . \frac{J^{n-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}} \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left\{P \sin\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right) + Q \cos\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right\} \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P' \cos\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right) - Q' \sin\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right\}, \end{aligned}$$

wo $P$, $Q$, $P'$, $Q'$ die an der citirten Stelle angegebenen semiconvergenten Reihen sind.

Bei stets wachsendem $z$ nähern sich die Werthe der Reihen $Q$, $P'$ und $Q'$ der Grenze 0, derjenige der Reihe $P$ aber der Grenze 1; auch die Glieder der Reihe $\Sigma$ gehen bei wachsendem $z$ sämmtlich gegen Null. Man hat daher für ein *äusserst grosses* $z$:

$$Y^n_{(z)} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \sin\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

woraus folgt

$$Y_{(z)}^{n+1} = -\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cos\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

Diese genäherten Ausdrücke im Verein mit den bereits oben gebrauchten

$$J_{(z)}^{n} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

$$J_{(z)}^{n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

können nun dazu dienen, um die Constante $b$ in Gleichung (6) zu bestimmen. Setzt man nämlich vorstehende Werthe dort ein, so erhält man

$$J_{(z)}^{n}\,Y_{(z)}^{n+1} - Y_{(z)}^{n}\,J_{(z)}^{n+1} = -\frac{1}{z}\left(\cos^2\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right) + \sin^2\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right) = -\frac{1}{z};$$

demnach ist $b = 1$.

*Zwischen den Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art besteht demnach folgende merkwürdige Beziehung:*

$$\text{(B)} \qquad Y_{(z)}^{n}\,J_{(z)}^{n+1} - J_{(z)}^{n}\,Y_{(z)}^{n+1} = \frac{1}{z},$$

welche ebenso, wie (A), für jeden Werth von $z$ gilt.

Aus der analogen Behandlung der Gleichung ($2_b$) würde sich natürlich ganz dieselbe Relation ergeben.

4. Von der Reductionsformel

$$J_{(z)}^{\nu} = \frac{2(\nu-1)}{z}\,J_{(z)}^{\nu-1} - J_{(z)}^{\nu-2}$$

ausgehend, sind wir schon früher*) durch successive Erniedrigung des Index zu der Gleichung

$$J^{m+\nu} = J^{\nu}\,\Sigma(-1)^p\,\frac{(m-p)^{p/-1}}{p!}\,(p+\nu)^{m-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{m-2p}$$
$$-\,J^{\nu-1}\,\Sigma(-1)^p\cdot\frac{(m-1-p)^{p/-1}}{p!}\,(p+1+\nu)^{m-1-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{m-1-2p}$$

gelangt. Durch wiederholte Anwendung derselben Formel im Sinne der Erhöhung des Index ergiebt sich ebenso die folgende analoge Gleichung

$$(-1)^m J^{-m+\nu} = J^{\nu}\,\Sigma(-1)^p\,\frac{(m-p)^{p/-1}}{p!}\,(p-\nu)^{m-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{m-2p}$$
$$+\,J^{\nu+1}\,\Sigma(-1)^p\cdot\frac{(m-1-p)^{p/-1}}{p!}\,(p+1-\nu)^{m-1-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{m-1-2p}.$$

In beiden Gleichungen ist unter $m$ nothwendig eine positive ganze Zahl zu verstehen, $\nu$ dagegen kann jeden beliebigen complexen Werth haben. Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\text{(7)} \qquad R_{(z)}^{m,\nu} = \Sigma(-1)^p\cdot\frac{(m-p)^{p/-1}}{p!}\,(p+\nu)^{m-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{m-2p}$$

*) „Studien über die Bessel'schen Functionen", § 1.

ein, so kann man die beiden Gleichungen bequemer wie folgt schreiben:

$$(8_a)\qquad \begin{cases} J^{m+\nu} = J^{\nu} R^{m,\nu} - J^{\nu-1} R^{m-1,\nu+1} \\ (-1)^m J^{-m+\nu} = J^{\nu} R^{m,-\nu} + J^{\nu+1} R^{m-1,-\nu+1} \end{cases}$$

oder auch, wenn man in der zweiten $-\nu$ statt $\nu$ setzt:

$$(8_b)\qquad \begin{cases} J^{m+\nu} = J^{\nu} R^{m,\nu} - J^{\nu-1} R^{m-1,\nu+1} \\ (-1)^m J^{-m-\nu} = J^{-\nu} R^{m,\nu} + J^{-\nu+1} R^{m-1,\nu+1}. \end{cases}$$

Durch Elimination von $R^{m-1,\nu+1}$ aus diesen letzteren zwei Gleichungen erhält man nun zunächst

$$J^{m+\nu} J^{-\nu+1} + (-1)^m J^{-m-\nu} J^{\nu-1} = (J^{\nu} J^{-\nu+1} + J^{-\nu} J^{\nu-1}) R^{m,\nu};$$

da aber nach (A)

$$J^{\nu} J^{-\nu+1} + J^{-\nu} J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi$$

ist, so gelangen wir sofort zu dem folgenden merkwürdigen Satze:

$$(\mathrm{C})\qquad J^{m+\nu} J^{-\nu+1} + (-1)^m J^{-m-\nu} J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi \,.\, R^{m,\nu}.$$

Die Elimination von $R^{m-1,\nu+1}$ aus den Gleichungen $(8_b)$ führt augenscheinlich zur nämlichen Beziehung.

Man kann diese Gleichung, welche sich als eine Erweiterung des Satzes (A) darstellt, noch mehrfach umgestalten. Setzen wir z. B. $-n+\nu$ statt $\nu$ und $2n$ statt $m$, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(\mathrm{C}_a)\quad J^{n+\nu} J^{n+1-\nu} + J^{-n-\nu} J^{-n-1+\nu} = (-1)^n \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi \,.\, R^{2n,-n+\nu}.$$

Macht man darin wieder $\nu = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$(\mathrm{C}_\alpha)\qquad (J^{n+\frac{1}{2}})^2 + (J^{-n-\frac{1}{2}})^2 = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi z} R^{2n,-n+\frac{1}{2}}$$

eine Gleichung, welche wir in einer früheren Abhandlung*) in etwas anderer Gestalt bereits abgeleitet haben, welche demnach, wie sich jetzt herausstellt, ein specieller Fall des allgemeinen Satzes (C) ist.

Die in dieser Gleichung vorkommende endliche Reihe

$$(-1)^n R^{2n,-n+\frac{1}{2}} = \Sigma (-1)^{n-p} \,.\, \frac{(2n-p)^{p/-1}}{p\,!} \,.\, \frac{(2p-2n+1)^{2n-2p/2}}{z^{2n-2p}}$$

kann leicht in eine elegantere Form gebracht werden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} (-1)^{n-p} (2p-2n+1)^{2n-2p/2} &= (-1)^{n-p} (2p-2n+1)^{n-p/2}\, 1^{n-p/2} \\ &= (-1)^{n-p} \,.\, (-1)^{n-p/-2} \,.\, 1^{n-p/2} \\ &= (1^{n-p/2})^2. \end{aligned}$$

Wir haben demnach

$$(\mathrm{C}_\alpha)\qquad (J^{n+\frac{1}{2}})^2 + (J^{-n-\frac{1}{2}})^2 = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2n-p)^{p/-1}}{p\,!} \left(\frac{1^{n-p/2}}{z^{n-p}}\right)^2 {}^{**)}$$

---

*) Diese Annalen, Bd. II., pag. 631.

**) In der bereits citirten Abhandlung (diese Annalen, Bd. II., pag. 631) hatten wir auf ganz verschiedenem Wege gefunden

oder auch

$$(\mathrm{C}_\alpha) \qquad (J^{n+\frac{1}{2}})^2 + (J^{-n-\frac{1}{2}})^2 = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2p+1)^{n-p/1}}{(n-p)\,!} \cdot \left(\frac{1^{p/2}}{z^p}\right)^2,$$

wo nur die Glieder der Reihe zur Rechten umgekehrt geordnet sind. —

Setzt man in (C) wiederum $-n+\nu$ statt $\nu$, aber $2n+1$ statt $m$, so erhält man

$$(\mathrm{C}_\beta) \quad J^{n+1+\nu} J^{n+1-\nu} - J^{-n-1-\nu} J^{-n-1+\nu} = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi \,.\, R^{2n+1,-n+\nu}$$

woraus für $\nu = \frac{1}{2}$

$$(\mathrm{C}_\beta) \quad J^{n+\frac{1}{2}} J^{n+\frac{3}{2}} - J^{-n-\frac{1}{2}} J^{-n-\frac{3}{2}} = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi z} \cdot R^{2n+1,-n+\frac{1}{2}}$$

hervorgeht. Auf demselben Wege wie oben kann auch hier die Reihe zur Rechten auf eine einfachere Gestalt gebracht werden; man findet nämlich leicht

$$(\mathrm{C}_\beta) \qquad J^{n+\frac{1}{2}} J^{n+\frac{3}{2}} - J^{-n-\frac{1}{2}} J^{-n-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2n+1-p)^{p+1/-1}}{p\,!} \cdot \frac{(1^{n-p/2})^2}{z^{2n+1-2p}},$$

oder, bei umgekehrter Anordnung der Glieder der Reihe:

$$(\mathrm{C}_\beta) \; J^{n+\frac{1}{2}} J^{n+\frac{3}{2}} - J^{-n-\frac{1}{2}} J^{-n-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2p+1)^{n+1-p/1}}{(n-p)\,!} \cdot \frac{(1^{p/2})^2}{z^{2p+1}}.$$

Diese Gleichung, nicht minder bemerkenswerth als $(\mathrm{C}_\alpha)$, bildet zu dieser das ergänzende Seitenstück.

5. Setzen wir in der ersten der Gleichungen (8) $n+1$ statt $\nu$, wo $n$ eine positive ganze Zahl bedeutet, so erhalten wir

$$(8_c) \qquad J^{m+n+1} = J^{n+1} R^{m,n+1} - J^n R^{m-1,n+2}.$$

Da aber auch für die **Bessel**'sche Function zweiter Art das Recursionsgesetz

$$Y^n_{(z)} = \frac{2(n-1)}{z} Y^{n-1}_{(z)} - Y^{n-2}_{(z)}$$

gilt, so hat man ebenso

$$(8_d) \qquad Y^{m+n+1} = Y^{n+1} R^{m,n+1} - Y^n R^{m-1,n+2}.$$

---

$$(J^{n+\frac{1}{2}})^2 + (J^{-n-\frac{1}{2}})^2 = \frac{2}{\pi z} \Sigma \frac{(2n+1-2p)^{p/1}}{p\,!} \left(\frac{(n+1-p)^{n-p/1}}{(2z)^{n-p}}\right)^2,$$

welche Form von der obigen an Einfachheit sichtlich übertroffen wird. Um die Identität beider Formen nachzuweisen, braucht, da offenbar

$$(2n+1-2p)^{p/1} = (2n-p)^{p/-1}$$

ist, nur noch gezeigt zu werden, dass

$$\frac{(n+1-p)^{n-p/1}}{2^{n-p}} = 1^{n-p/2}$$

oder dass überhaupt

$$\frac{(n+1)^{n/1}}{2^n} = 1^{n/2}$$

ist. Die Führung dieses Beweises giebt ein hübsches Uebungsbeispiel zur Lehre von den Factoriellen ab.

Eliminirt man nun aus den beiden Gleichungen ($8_{c,\,d}$) die Grösse $R^{m-1,\,n+2}$, so erhält man zunächst

$$Y^n J^{m+n+1} - J^n Y^{m+n+1} = (Y^n J^{n+1} - J^n Y^{n+1}) \,.\, R^{m,\,n+1}.$$

Da aber nach (B)

$$Y^n J^{n+1} - J^n Y^{n+1} = \frac{1}{z}$$

ist, so erscheint

(D) $$Y^n J^{m+n+1} - J^n Y^{m+n+1} = \frac{1}{z} R^{m,\,n+1}$$

als Erweiterung des Satzes (B). Die beiden Theoreme (C) und (D) gelten, ebenso wie ihre Specialfälle (A) und (B), für *jeden Werth von z.*

6. Die in § 1. aufgestellten Integrationsformeln (1) und (2) können jetzt, nachdem die Werthe von $\alpha$ und $\beta$ bekannt sind, vervollständigt werden. Da nämlich

$$\alpha = \frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}$$

und

$$\beta = \frac{1}{b} = 1$$

ist, so hat man

(1) $$\int \frac{dz}{z\left(J^{\nu}_{(z)}\right)^2} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi} \cdot \frac{J^{-\nu}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}}$$

und

(2) $$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{dz}{z\left(J^{n}_{(z)}\right)^2} = \frac{Y^{n}_{(z)}}{J^{n}_{(z)}} \\ &\int \frac{dz}{z\left(Y^{n}_{(z)}\right)^2} = -\frac{J^{n}_{(z)}}{Y^{n}_{(z)}}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln sind analog den aus den Elementen der Integralrechnung bekannten

$$\int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\operatorname{cotg} z$$

und

$$\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z,$$

welche als specielle Fälle für $\nu = \frac{1}{2}$ und $\nu = -\frac{1}{2}$ aus Gleichung (1) hervorgehen.

Noch andere bemerkenswerthe Resultate können aus den Gleichungen (3) und (5) hergeleitet werden. Dividirt man nämlich die Gleichung (3), nachdem darin $a$ durch seinen Werth $-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi$ ersetzt ist, durch das Product $J^{\nu} J^{-\nu}$, so hat man

$$\frac{\frac{\partial J^{-\nu}}{\partial z}}{J^{-\nu}} - \frac{\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}}{J^{\nu}} = -\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi \cdot \frac{1}{z J^{\nu} J^{-\nu}},$$

also, wenn man beiderseits integrirt:

$$\log J^{-\nu} - \log J^{\nu} = -\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi\int\frac{dz}{zJ^{\nu}J^{-\nu}}$$

oder

$$\int\frac{dz}{zJ^{\nu}J^{-\nu}} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\log\frac{J^{\nu}}{J^{-\nu}}, \tag{9}$$

worin die bekannte Formel

$$\int\frac{dz}{\sin 2z} = \tfrac{1}{2}\log \operatorname{tg} z$$

für $\nu = \frac{1}{2}$ als Specialfall enthalten ist.

Bei gleicher Behandlung liefert die Gleichung (5)

$$\int\frac{dz}{zJ^{n}Y^{n}} = \log\frac{Y^{n}}{J^{n}}. \tag{10}$$

7. Die Gleichung

$$(-1)^m J^{-m+\nu} = J^{\nu} R^{m,-\nu} + J^{\nu+1} R^{m-1,-\nu+1}$$

könnte ebenso gut wie die oben in § 2. benutzte*), welche $J^{-\nu}$ in eine nach Bessel'schen Functionen mit positivem Index fortschreitende endliche Reihe entwickelt giebt, als Definition der Bessel'schen Function erster Art mit beliebig negativem Index gebraucht werden. Sie ist sogar, wenn man $J^{-m+\nu}$ sogleich auf zwei Ausgangsfunctionen $J^{\nu}$ und $J^{\nu+1}$ reducirt haben will, jener noch vorzuziehen. Sowohl diese Bemerkung, noch mehr aber die Sätze (C) und (D) zeigen, dass der endlichen Reihe $R^{m,\nu}$ in der Theorie der Bessel'schen Functionen eine hervorragende Stelle gebührt. Auch für sich betrachtet, erscheint die Reihe $R^{m,\nu}$ mit sehr bemerkenswerthen Eigenschaften ausgestattet, von denen einige, im engen Anschluss an das Vorausgehende, hier namhaft gemacht werden sollen.

Zunächst kann man der Summe $R^{m,\nu}$ eine mehr symmetrische Gestalt geben, wenn man die Fälle eines geraden und ungeraden $m$ von einander trennt. Da nämlich in

$$R^{2m,\nu} = \Sigma(-1)^p\frac{(2m-p)^{p/-1}}{p!}(p+\nu)^{2m-2p/1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2m-2p}$$

der Werth von $p$ blos bis $m$ zu steigen braucht, weil für $p > m$ die Factorielle $(2m-p)^{p/-1}$ verschwindet, so kann man $m-q$ statt $p$ schreiben, und erhält dann die Reihe in umgekehrter Anordnung:

$$R^{2m,\nu} = \Sigma(-1)^{m-q}\cdot\frac{(m+q)^{m-q/-1}}{(m-q)!}(m+\nu-q)^{2q/1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2q}.$$

Wird nun hierin Zähler und Nenner des Quotienten

$$\frac{(m+q)^{m-q/-1}}{(m-q)!}$$

mit $(m+1-q)^{3q-m/1}$ multiplicirt, und dabei beachtet, dass

*) S. „Studien etc.“ § 4.

$$(m+q)^{m-q/-1}\,(m+1-q)^{3q-m/1} = (m+1-q)^{2q/1}$$

und

$$(m-q)\,!\,(m+1-q)^{3q-m/1} = 1^{2q/1} = (2q)\,!$$

ist, so hat man

$$(11)\quad R^{2m,\nu} = \Sigma\,(-1)^{m-q} \cdot \frac{(m+1-q)^{2q/1}\,(m+\nu-q)^{2q/1}}{(2q)\,!} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^{2q}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$(12)\quad R^{2m+1,\nu} = \Sigma(-1)^{m-q} \cdot \frac{(m+1-q)^{2q+1/1}\,(m+\nu-q)^{2q+1/1}}{(2q+1)\,!} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^{2q+1}.$$

Diese zwei dem Gedächtniss sich leicht einprägenden Gleichungen können zusammen ebenfalls als Definition der Function $R^{m,\nu}$ gelten. —

Wir setzen nun in der Gleichung

$$J^{m+\nu} = J^{\nu}\,R^{m,\nu} - J^{\nu-1}\,R^{m-1,\nu+1}$$

$m+1$ statt $m$ und $\nu-1$ statt $\nu$; dann lautet sie:

$$J^{m+\nu} = J^{\nu-1}\,R^{m+1,\nu-1} - J^{\nu-2}\,R^{m,\nu}.$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$(J^{\nu} + J^{\nu-2})\,R^{m,\nu} - (R^{m+1,\nu-1} + R^{m-1,\nu+1})\,J^{\nu-1} = 0.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$J^{\nu} + J^{\nu-2} = \frac{2\,(\nu-1)}{z}\,J^{\nu-1};$$

man hat also für die Function $R^{m,\nu}$ folgende Recursionsformel:

$$(13)\qquad \frac{2\,(\nu-1)}{z} \cdot R^{m,\nu} = R^{m+1,\nu-1} + R^{m-1,\nu+1}.$$

Um weitere Eigenschaften der Function $R^{m,\nu}$ aufzufinden, multipliciren wir die Gleichung (C) mit $z^{-m-1}$; sie kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi \,.\, z^{-m-2}\,R^{m,\nu} = z^{-m-\nu}\,J^{m+\nu} \,.\, z^{\nu-1}\,J^{-\nu+1}$$
$$+ (-1)^m\,z^{-m-\nu}\,J^{-m-\nu} \,.\, z^{\nu-1}\,J^{\nu-1}.$$

Wird hier beiderseits nach $z$ differentiirt unter Berücksichtigung der Sätze

$$\frac{\partial\left(z^{-\nu}\,J^{\nu}_{(z)}\right)}{\partial z} = -\,z^{-\nu}\,J^{\nu+1}_{(z)}$$

und

$$\frac{\partial\left(z^{\nu}J^{\nu}_{(z)}\right)}{\partial z} = z^{\nu}\,J^{\nu-1}_{(z)},$$

so ergiebt sich

$$\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi \cdot \frac{\partial\left(z^{-m-2}\,R^{m,\nu}\right)}{\partial z} =$$
$$-\,z^{-m-1}\left[J^{m+\nu}\,J^{-\nu+2} + (-1)^{m+1}\,J^{-m-\nu}\,J^{\nu-2}\right]$$
$$-\,z^{-m-1}\left[J^{m+\nu+1}\,J^{-\nu+1} + (-1)^{m+1}\,J^{-m-\nu-1}\,J^{\nu-1}\right].$$

Aus (C) aber folgt für $m+1$ statt $m$

$$J^{m+\nu+1}\, J^{-\nu+1} + (-1)^{m+1}\, J^{-m-\nu-1}\, J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi\, R^{m+1,\nu}$$

und daraus wieder, wenn $\nu - 1$ statt $\nu$ gesetzt wird:

$$J^{m+\nu}\, J^{-\nu+2} + (-1)^{m+1}\, J^{-m-\nu}\, J^{\nu-2} = -\frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi\, R^{m+1,\nu-1}.$$

Führt man diese Werthe oben ein, so erhält man

$$(14)\qquad \frac{\partial\,(z^{-m-2}\, R^{m,\nu})}{\partial z} = z^{-m-2}\,(R^{m+1,\nu-1} - R^{m+1,\nu})$$

oder, was dasselbe ist:

$$(14_a)\qquad \frac{\partial R^{m,\nu}}{\partial z} = \frac{m+2}{z} R^{m,\nu} + R^{m+1,\nu-1} - R^{m+1,\nu}.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung (C) mit $z^{m+1}$, bringt sie dann in die Form

$$\frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \,.\, z^m\, R^{m,\nu} = z^{m+\nu}\, J^{m+\nu} \,.\, z^{-\nu+1}\, J^{-\nu+1} + (-1)^m\, z^{m+\nu}\, J^{-m-\nu} \,.\, z^{-\nu+1}\, J^{\nu-1}$$

und differentiirt wie oben, so erhält man zunächst

$$\frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot \frac{\partial\,(z^m\, R^{m,\nu})}{\partial z} = z^{m+1}\left[J^{m+\nu}\, J^{-\nu} + (-1)^{m-1}\, J^{-m-\nu}\, J^{\nu}\right] + z^{m+1}\left[J^{m+\nu-1}\, J^{-\nu+1} + (-1)^{m-1}\, J^{-m-\nu+1}\, J^{\nu-1}\right].$$

Da aber nach Gleichung (C) die eckig eingeklammerten Ausdrücke resp.

$$-\frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi \,.\, R^{m-1,\nu+1} \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi z} \sin \nu\pi\, R^{m-1,\nu}$$

sind, so hat man noch

$$(15)\qquad \frac{\partial\,(z^m\, R^{m,\nu})}{\partial z} = z^m\,(R^{m-1,\nu} - R^{m-1,\nu+1})$$

oder auch:

$$(15_a)\qquad \frac{\partial R^{m,\nu}}{\partial z} = -\frac{m}{z} R^{m,\nu} + R^{m-1,\nu} - R^{m-1,\nu+1}.$$

Durch Combination dieser letzteren Gleichung mit $(14_a)$ ergiebt sich sofort

$$(16)\qquad \frac{2\,(m+1)}{z} R^{m,\nu} = R^{m+1,\nu} + R^{m-1,\nu} - R^{m+1,\nu-1} - R^{m-1,\nu+1},$$

und wenn hierzu die bereits oben gefundene Gleichung

$$(13)\qquad \frac{2\,(\nu-1)}{z} R^{m,\nu} = R^{m+1,\nu-1} + R^{m-1,\nu+1}$$

addirt wird:

$$(17)\qquad \frac{2\,(m+\nu)}{z} R^{m,\nu} = R^{m+1,\nu} + R^{m-1,\nu}.$$

Macht man von diesem Recursionsgesetz wiederholte Anwendung zur fortgesetzten Erniedrigung des Index $m$, so findet man leicht:

$$R^{m,\nu} = R^{m-n,\nu}\,\Sigma\,(-1)^p\cdot\frac{(n-p)^{p/-1}}{p\,!}\,(m+\nu-n+p)^{n-2p/1}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-2p}$$
$$-\,R^{m-n-1,\nu}\,\Sigma(-1)^p\cdot\frac{(n-1-p)^{p/-1}}{p\,!}\,(m+\nu-n+1+p)^{n-1-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{n-1-2p}.$$

d. i.

$$R^{m,\nu} = R^{m-n,\nu}\,.\,R^{n,m+\nu-n} - R^{m-n-1,\nu}\,R^{n-1,m+\nu-n+1}$$

oder, wenn man $m+n$ statt $m$ schreibt:

(18) $$R^{m+n,\nu} = R^{m,\nu}\,R^{n,m+\nu} - R^{m-1,\nu}\,R^{n-1,m+\nu+1}$$

Wendet man dieselbe Formel (17) zur successiven Erhöhung des Index $m$ an, so findet man zunächst

$$R^{m,\nu} = R^{m+n,\nu}\,\Sigma\,(-1)^p\cdot\frac{(n-p)^{p/-1}}{p\,!}\,(m+\nu+n-p)^{n-2p/-1}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-2p}$$
$$-\,R^{m+n+1,\nu}\,\Sigma\,(-1)^p\cdot\frac{(n-1-p)^{p/-1}}{p\,!}\,(m+\nu+n-1-p)^{n-1-2p/-1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{n-1-2p}$$

oder, was dasselbe ist

$$(-1)^n\,R^{m,\nu} = R^{m+n,\nu}\,\Sigma\,(-1)^p\cdot\frac{(n-p)^{p/-1}}{p\,!}\,(p-m-\nu-n)^{n-2p/1}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-2p}$$
$$+\,R^{m+n+1,\nu}\,\Sigma(-1)^p\cdot\frac{(n-1-p)^{p/-1}}{p\,!}\,(p+1-m-\nu-n)^{n-1-2p/1}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^{n-1-2p}.$$

Man hat demnach

$$(-1)^n\,R^{m,\nu} = R^{m+n,\nu}\,R^{n,-m-n-\nu} + R^{m+n+1,\nu}\,R^{n-1,-m-n-\nu+1},$$

oder, wenn $m-n$ statt $m$ gesetzt wird:

(19) $$(-1)^n\,R^{m-n,\nu} = R^{m,\nu}\,R^{n,-m-\nu} + R^{m+1,\nu}\,R^{n-1,-m-\nu+1}.$$

Während in den bisher für $R^{m,\nu}$ aufgestellten Beziehungen (13 bis 19) dem $\nu$ jeder beliebig complexe Werth beigelegt werden darf, können andrerseits auch Relationen angegeben werden, welche z. B. nur dann gelten, wenn $\nu$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Setzt man nämlich in den Gleichungen ($8_b$) $\frac{1}{2}$ statt $\nu$, und berücksichtigt, dass

$$J^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot\sin z$$

und

$$J^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z$$

ist, so erhält man die zwei Gleichungen

$$J^{m+\frac{1}{2}} = \sin z\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\;R^{m,\frac{1}{2}} - \cos z\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\;R^{m-1,\frac{3}{2}}$$
$$(-1)^m\,J^{-m-\frac{1}{2}} = \cos z\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cdot R^{m,\frac{1}{2}} + \sin z\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\;R^{m-1,\frac{3}{2}}.$$

Dieselben liefern, wenn man sie quadrirt und addirt

$$(J^{m+\frac{1}{2}})^2 + (J^{-m-\frac{1}{2}})^2 = \frac{2}{\pi z}\left[(R^{m,\frac{1}{2}})^2 + (R^{m-1,\frac{3}{2}})^2\right].$$

Nun haben wir aber oben ($C_a$) schon gefunden

$$(J^{m+\frac{1}{2}})^2 + (J^{-m-\frac{1}{2}})^2 = (-1)^m\cdot\frac{2}{\pi z}\,R^{2m,-m+\frac{1}{2}}.$$

Es muss demnach folgende Beziehung stattfinden:

$$(20)\qquad (-1)^m R^{2m,-m+\frac{1}{2}} = (R^{m,\frac{1}{2}})^2 + (R^{m-1,\frac{3}{2}})^2.$$

Eine hiermit analoge Relation wird gefunden, wenn man die aus obigen zwei Gleichungen für $J^{m+\frac{1}{2}}$, $J^{m-\frac{1}{2}}$, $J^{m+\frac{3}{2}}$ und $J^{-m-\frac{3}{2}}$ sich ergebenden Werthe in die Gleichung ($C_\beta$) substituirt; man findet nämlich

$$(21)\qquad (-1)^m R^{2m+1,-m+\frac{1}{2}} = R^{m,\frac{1}{2}} R^{m+1,\frac{1}{2}} + R^{m,\frac{3}{2}} R^{m-1,\frac{3}{2}}.$$

Es wäre ein Leichtes, noch weitere derartige Gleichungen aufzustellen; die vorliegenden mögen jedoch vorläufig genügen, um darzuthun, dass die in der Theorie der Bessel'schen Functionen eine Rolle spielende Reihe $R^{m,\nu}$ in ihren Eigenschaften eine auffallende Analogie mit den Bessel'schen Functionen selbst zeigt und desshalb als eine *mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function* bezeichnet zu werden verdient.

Erlangen, im Januar 1871.

# Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht*).

Von G. Korndörfer in Neumünster.

## VII.

### Die Fläche besitzt keinen weiteren Knotenpunkt.

Eine solche Fläche wird durch die Gleichung dargestellt

$$(q^2 - ps)^2 = 4 \,.\, p^2 \psi.$$

Ich wähle ein Coordinatentetraeder, dessen 2 Ebenen $x$ und $p$ mit den Ebenen $q$ und $p$ zusammenfallen und dessen 2 andere Ebenen $y$ und $z$ die Tangentenebenen sind, welche in den Durchdringungspunkten der Schnittlinie von $p = 0$ und $q = 0$ mit der Fläche $\psi = 0$ an dieselbe gezogen werden können. Die Flächengleichung lässt sich dann schreiben:

$$[x^2 - p(ax + by + cz + dp)]^2 = 4p^2(a_{11}x^2 + a_{44}p^2 + 2a_{14}xp + 2a_{23}yz).$$

Hieraus folgt zunächst: die Durchdringungspunkte der Geraden $x$, $p$ mit der Fläche $s^2 - 4\psi = 0$ oder dem Ebenenpaar $(by + cz)^2 - 8a_{23}yz = 0$ sind 3fache Punkte der Fläche. Die Rückkehrpunkte der Fläche liegen im Schnitt der Doppelgeraden mit der Fläche $\psi$. Die doppelt berührenden Kegel der Fläche folgen durch Nullsetzen der Determinante der Gleichung

$$a_{11}x^2 + a_{44}p^2 + 2a_{14}xp + 2a_{23}yz + \lambda x^2 - \lambda p(ax + by + cz + dp) + \lambda^2 p^2 = 0$$

aus der in $\lambda$ cubischen Gleichung

$$(a_{11} + \lambda)\left\{\lambda^2 \frac{bc}{2} - \lambda^2 a_{23} + \lambda d a_{23} - a_{23} \,.\, a_{44}\right\} + a_{23} \,.\, \left(a_{14} - \lambda \frac{a}{2}\right)^2 = 0,$$

woraus folgt, dass die Fläche 3 doppelt berührende Kegel besitzt, deren Spitzen durch die Gleichungen

---

*) Fortsetzung der Abhandlung Bd. III., p. 496. In der Ueberschrift der genannten Abhandlung muss es heissen „Doppelgeraden“ statt „Doppelpaaren“. Die Numerirung der Fälle schliesst sich an jene Abhandlung an.

$$x(a_{11}+\lambda)+p\left(a_{14}-\frac{\lambda a}{2}\right)=0$$
$$y\cdot a_{23}-p\cdot\frac{\lambda c}{2}=0$$
$$z\cdot a_{23}-p\cdot\frac{\lambda b}{2}=0$$

gegeben sind.

Jede Ebene des Büschels $q=\sigma p$ schneidet einen Kegelschnitt aus der Fläche, welcher durch den Complex der Gleichungen

$$(\sigma^2 p-s)^2-4\psi=0$$
$$q-\sigma p=0$$

gegeben ist. Jeder dieser Kegelschnitte geht durch die 3fachen Punkte der Fläche. So oft eine Ebene des Büschels die Fläche 2ter Ordnung $(\sigma^2 p-s)^2-4\psi=0$ berührt, zerfällt der Kegelschnitt in ein Geradenpaar. Dieses wird durch die in $\sigma$ biquadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a^2-4a_{11} & ab & ac & 4a_{14}-a(\sigma^2-d) & 1 \\ ab & b^2 & bc-4a_{23} & -b(\sigma^2-d) & 0 \\ ac & bc-4a_{23} & c^2 & -c(\sigma^2-d) & 0 \\ 4a_{14}-a(\sigma^2-d) & -b(\sigma^2-d) & -c(\sigma^2-d) & (\sigma^2-d)^2-4a_{44} & -\sigma \\ 1 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{vmatrix}=0$$

angezeigt. Die Fläche enthält daher 8 Gerade.

Jede Ebene schneidet aus der Fläche eine Curve 4ter Ordnung, welche sich selbst berührt; jede durch einen der 3fachen Punkte gehende Ebene schneidet aus der Fläche eine Curve 4ter Ordnung mit einem 3fachen Punkt und jede Doppeltangentenebene schneidet aus der Fläche ein Kegelschnittpaar, welches sich in einem Punkte berührt. Geht eine solche Doppeltangentenebene zugleich durch einen der 3fachen Punkte, so muss ein Zerfallen der Kegelschnitte eintreten.

Die 8 Geraden der Fläche müssen daher in 2 Gruppen zu 4 zerfallen, so dass die Geraden der ersten Gruppe durch den einen, die der zweiten durch den anderen 3fachen Punkt gehen.

Ich will die 4 dem einen 3fachen Punkt angehörigen Geraden mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, die des andern mit $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ bezeichnen, so dass $a_1b_1$, $a_2b_2$, $a_3b_3$, $a_4b_4$ die Paare sind, welche in der Kegelschnittschaar des Büschels $q=\sigma p$ auftreten.

Die Flächengleichung kann auf die Form gebracht werden

$$(q^2-ps+2\lambda p^2)^2=4p^2K$$

wo $K=0$ die Gleichung eines der doppelt berührenden Kegel. Wenn $A+2\varrho B+\varrho^2 C=0$ die Gleichung einer Tangentenebene desselben, so ist für den Schnitt dieser mit der Fläche $K=(B+\varrho C)^2$ und die Flächengleichung zerfällt in die Factoren

$$q^2 - ps + 2\lambda p^2 + 2p(B + \varrho C) = 0$$
$$q^2 - ps + 2\lambda p^2 - 2p(B + \varrho C) = 0.$$

Jeder derselben in Verbindung mit $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ liefert eine Kegelschnittschaar des Kegels. Jedes Geradenpaar, welches in einer dieser Schaaren auftritt, muss seinen Scheitel in einem der 3fachen Punkte haben. Die 8 Geraden der Fläche bilden daher nochmals 12 Paare, sodass immer 6 Paare in einem 3fachen Punkt einen gemeinsamen Scheitel besitzen. In jeder dieser Kegelschnittschaaren kommen 2 Paare vor, sodass die 4 Paare, die zu 2 conjugirten Schaaren gehören, alle 8 Geraden umfassen. Sind daher

$$a_1 b_1 \qquad c_2 d_2$$

die Geradenpaare einer Schaar, so werden

$$a_2 b_2 \qquad c_1 d_1$$

die der conjugirten Schaar sein.

Die Spitze des zugehörigen doppelt berührenden Kegels lässt sich dann auch leicht geometrisch finden, denn die Schnittlinie der Ebenen der Paare $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ trifft die Schnittlinie der Ebenen der Paare $c_1 d_1$ und $c_2 d_2$ in einem Punkt, welcher der gesuchte ist.

Um die Fläche auf eine Ebene eindeutig abzubilden, bediene ich mich zuerst eines der doppelt berührenden Kegel in Verbindung mit dem Ebenenbüschel $q = \sigma p$. Dann folgt die eindeutige Darstellung aus den Gleichungen:

$$\sigma^2 p - s + 2\lambda p + 2\mathsf{B} + 2\varrho C = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$
$$q - \sigma p = 0$$

oder mittelst $\tau$ homogen gemacht:

$$\sigma^2 p + \tau^2(2\lambda p - s + 2\mathsf{B}) + 2\varrho\tau C = 0$$
$$A\tau^2 + 2\varrho\tau\mathsf{B} + \varrho^2 C = 0$$
$$q\tau - \sigma p = 0.$$

Für $\tau = 0$ reduciren sich diese Gleichungen auf $\varrho^2 C = 0$, $\sigma p = 0$ und sind also erfüllt 1. wenn $C = 0$, $p = 0$

2. „ $C = 0$, $\sigma = 0$

3. „ $p = 0$, $\varrho = 0$.

Daraus folgt, die Gerade $\tau$ ist das Bild des Schnittpunktes des in $C$ liegenden Kegelschnittes mit der Doppelgeraden; der Doppelpunkt $\tau = 0$, $\varrho = 0$ ist das Bild der Doppelgeraden und der Doppelpunkt $\tau = 0$, $\sigma = 0$ ist das Bild des in $C$ liegenden Kegelschnittes.

Die bei der Abbildung benutzte Kegelschnittschaar des Kegels $K$ enthalte die Paare $a_1 b_1$, $c_2 d_2$. Denkt man sich $\varrho$ constant, dass die Tangentenebene das Paar $a_1 b_1$ enthält, dagegen $\sigma$ veränderlich, so

erhält man die unendlich vieldeutige Abbildung des einen 3fachen Punktes in eine Gerade ausgebreitet mit den festen Fundamentalpunkten $a_1 b_1$, welche durch den Doppelpunkt $\tau$, $\varrho$ geht. Ebenso bildet sich der andere 3fache Punkt als Gerade mit den festen Fundamentalpunkten $c_2$, $d_2$ ab, welche ebenfalls durch die Ecke $\tau$, $\varrho$ geht.

Die 4 Verbindungslinien dieser Fundamentalpunkte mit dem Doppelpunkt $\tau$, $\sigma$ geben die 4 anderen Geraden der Fläche. Bei der Abbildung des Schnittes der Ebene $p$ mit der Fläche muss ferner die Gerade $\tau$ doppelt gezählt werden, entsprechend den beiden zusammenfallenden Schnittpunkten des in $C$ liegenden Kegelschnitts mit den Doppelgeraden. Die Kegelschnittschaar des Büschels $q = \sigma p$ wird dargestellt durch den Strahlbüschel, dessen Scheitel die Ecke $\tau$, $\sigma$, vier Schaaren der doppelt berührenden Kegel durch 4 Kegelschnittschaaren, deren Gebilde durch die Doppelpunkte und je 2 der einfachen gehen, die beiden letzten endlich durch den Strahlbüschel, dessen Scheitel in $\tau$, $\varrho$ und durch den Curvenbüschel 3ter Ordnung, dessen Gebilde durch alle Fundamentalpunkte gehen und in der Ecke $\tau$, $\sigma$ einen Doppelpunkt besitzen.

Benutzt man bei der Abbildung 2 doppelt berührende Kegel, so werden die Abbildungsfunctionen aus denselben 3 Gleichungen gefunden, welche dieselbe Abbildungsmethode in den früheren Fällen ergab. Kommen in den benutzten Kegelschnittschaaren die Geradenpaare

$$\begin{array}{ll} a_1 b_1 & c_2 d_2 \\ a_1 c_1 & b_2 d_2 \end{array}$$

vor, so wird einmal der Fundamentalpunkt $a_1$ doppelt auftreten, weil die Geraden $b_1$ und $c_1$ der zum Schnitt kommenden Paare sich auf der Geraden $a_1$ schneiden, dann aber auch der Fundamentalpunkt $d_2$. Die zusammenfallenden Fundamentalpunkte sind dann die Bilder der 3fachen Punkte und zugleich je einer der sie treffenden Geraden. Die andern Geraden der Fläche sind dann die 4 Verbindungslinien der Doppelpunkte mit den zusammenfallenden Punkten und die beiden Kegelschnitte durch sämmtliche Fundamentalpunkte, wobei immer ein Punkt jedes Paars ausgelassen wird. Die beiden Doppelgeraden, welche in der Abbildung zusammen eine Curve 4ter Ordnung darstellen müssen, werden durch 2 unendlich nahe Kegelschnitte dargestellt, welche durch die Doppelpunkte und je einen Punkt jedes Punktepaars gehen.

Jede durch einen der 3fachen Punkte gelegte Gerade trifft die Fläche noch in einem Punkt. Verlängert man dieselbe bis zum Schnitt mit einer beliebigen Ebene, so wird jedem Punkt der Fläche ein Punkt der Ebene und umgekehrt entsprechen. Die Fläche kann daher von einem der 3fachen Punkte aus auf eine beliebige Ebene eindeutig

projicirt werden. Wähle ich ein Coordinatentetraeder so, dass die 4 Coordinatenebenen mit den Ebenen $p$, $q$ und den beiden Tangentenebenen $a$ und $b$ der Fläche $\vartheta = s^2 - 4\psi = 0$ in den 3fachen Punkten zusammenfallen, so lässt sich die Flächengleichung in die Form bringen:

$$0 = q^4 - 2pq^2(\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 a + \alpha_4 b) + p^2(a_{11}q^2 + 2a_{12}pq + a_{22}p^2 + 2a_{34}ab).$$

Betrachtet man die Fläche in der Nähe eines der 3fachen Punkte z. B. $p$, $q$, $a$, so geht dieselbe über in

$$-2pq^2\alpha_4 \,.\, b + 2p^2 a_{34} ab = 0$$

oder

$$p(a_{34}ap - \alpha_4 q^2) = 0.$$

Daraus folgt: der Kegel $a_{34}ap - \alpha_4 q^2$, welcher in diesem 3fachen Punkt die Fläche ringsum berührt, enthält zugleich die 4 Geraden dieser Gruppe und geht durch die beiden Doppelgeraden der Fläche.

Der Projectionspunkt sei der 3fache Punkt $p$, $q$, $a$ und die Projectionsebene gehe durch den andern $p$, $q$, $b$, und die Durchschnitte der Ebenen $p$, $q$, $a$ mit der Projectionsebene seien als die Seiten eines Coordinatendreiecks in derselben fixirt.

Bezeichne ich mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Dreieckscoordinaten, so sind die Abbildungsfunctionen sofort:

$$p = \xi N$$
$$q = \eta N$$
$$a = \zeta N$$
$$b = -M$$

wobei

$$N = 2\xi(a_{34}\xi\zeta - \alpha_4\eta^2)$$

$$M = \eta^4 - 2\eta^2\xi(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta) + \xi^2(a_{11}\eta^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^2).$$

Daraus ergiebt sich nun Folgendes. Die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts $a_{34}\xi\zeta - \alpha_4\eta^2 = 0$ mit den 4 Geraden

$$0 = \eta^4 - 2\eta^2\left(\alpha_1\xi^2 + \alpha_2\eta\xi + \frac{\alpha_3 \cdot \alpha_4}{a_{34}}\eta^2\right) + \xi^2(a_{11}\eta^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^4),$$

der Punkt $\xi$, $\eta$ ausgeschlossen, sind 4 einfache Fundamentalpunkte der Abbildung. Die beiden Doppelpunkte sind unendlich nahe gerückt und fallen in die Ecke $\eta$, $\xi$, sodass die Gerade $\xi$ zugleich die feste Tangentenrichtung der Bilder aller ebenen Schnitte darstellt. Der Kegelschnitt selbst ist das Bild des Projectionspunktes und die zusammenfallenden Doppelpunkte stellen die Doppelgeraden der Fläche und den andern 3fachen Punkt dar. Die 4 einfachen Fundamentalpunkte sind die Bilder der 4 Geraden, welche dem Projectionspunkt angehören und die 4 Verbindungslinien mit der Ecke $\xi$, $\eta$ sind die Bilder der 4 andern. Die 6 Kegelschnittschaaren der doppelt berührenden Kegel werden durch die 6 Kegelschnittschaaren abgebildet,

welche durch die Doppelpunkte und je 2 der einfachen Fundamentalpunkte gehen und die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $q = \sigma p$ ist der Strahlbüschel, dessen Scheitel die Ecke $\xi$, $\eta$. Das Bild jedes ebenen Schnittes der Fläche ist eine Curve $4^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und in der Ecke $\xi$, $\eta$ sich selbst berührt; enthält der Schnitt den Projectionspunkt, so ist die Abbildung eine Gerade durch keinen Fundamentalpunkt und enthält der ebene Schnitt eine Gerade des Projectionspunktes, so ist das Bild eine Gerade, welche den entsprechenden Fundamentalpunkt schneidet.

## VIII.

### Die Fläche besitzt noch einen einzelnen Knotenpunkt.

Eine solche Fläche wird durch die Gleichung dargestellt

$$(q^2 - ps)^2 = 4p^2\psi,$$

in welcher $\psi$ einen Kegel bedeutet, dessen Spitze auf der Fläche $q^2 - ps = 0$ liegt. Das Coordinatentetraeder sei so gewählt, dass die Ebenen $y$, $z$ mit den Tangentenebenen des Kegels $\psi$ zusammenfallen, deren Berührungsseiten durch die Rückkehrpunkte der Fläche gehen. Die Ebene $x$ enthalte die beiden Berührungsseiten und die $4^{\text{te}}$ Coordinatenebene falle mit $p$ zusammen. Dann ist die Flächengleichung

$$\left\{(a_1 x + b_1 p)^2 - p\,(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta p)\right\}^2 = 4p^2\,(yz - x^2)\,.$$

Die Bedingung, dass die Spitze des Kegels $\psi$ auf der Fläche $q^2 - ps = 0$ liegt, wird erfüllt, wenn $b_1{}^2 = \delta$. Mit Berücksichtigung dieses ist die Flächengleichung

$$\left\{a_1{}^2 x^2 - p\,[x\,(\alpha - 2a_1 b_1) + y\,.\,\beta + z\,.\,\gamma]\right\}^2 = 4p^2\,(yz - x^2)\,.$$

Die doppelt berührenden Kegel finden sich durch Nullsetzen der Determinante der Gleichung:

$$yz - x^2 + \lambda\left[a_1{}^2 x^2 - p\left(x\,(\alpha - 2a_1 b_1) + y\beta + z\gamma\right)\right] + \lambda^2 p^2 = 0\,.$$

Dieses führt zu einer Gleichung ersten Grades in $\lambda$:

$$(\lambda a_1{}^2 - 1)\,(\gamma\beta - 1) - \tfrac{1}{4}\,(\alpha - 2a_1 b_1)^2 = 0\,.$$

Daher besitzt die Fläche nur einen doppelt berührenden Kegel, dessen Spitze aus den Gleichungen

$$x\,(\lambda a_1{}^2 - 1) + p\,(\alpha - 2a_1 b_1) = 0$$
$$y + 2\gamma p = 0$$
$$z + 2\beta p = 0$$

gefunden wird.

Der Ebenenbüschel $x = \sigma p$ schneidet eine Kegelschnittschaar aus der Fläche, welche durch die Gleichungen

$$\{a_1^2\sigma^2 p - \sigma p\,(\alpha - 2a_1 b_1) - y\beta - z\gamma\}^2 - 4\,(yz - \sigma^2 p^2) = 0$$
$$x - \sigma p = 0$$

dargestellt wird. Stellt man die Bedingung des Berührens auf, so erhält man eine quadratische Gleichung in $\sigma$. Daraus folgt, dass in der Kegelschnittschaar des Büschels $x - \sigma p = 0$ 2 Geradenpaare auftreten. Als drittes Geradenpaar kann man den Schnitt der durch den Knotenpunkt und die Doppelgerade gehenden Ebenen hinzufügen. Es liegen daher 6 Gerade auf der Fläche. Die Schnittpunkte der Doppelgeraden $p$, $q$ mit der Fläche $s^2 - 4\psi = 0$ oder dem Ebenenpaar $y^2\beta^2 + z^2\gamma^2 - 4yz = 0$ sind 3fache Punkte der Fläche.

Die 6 Geraden der Fläche theilen sich ebenfalls in 2 Gruppen zu 3, sodass die 3 Geraden einer Gruppe durch einen der 3fachen Punkte gehen. Die Geraden des ersten 3fachen Punktes seien $a_1$, $b_1$, $c_1$, die des zweiten $a_2$, $b_2$, $c_2$. Es müssen hierbei $a_1$, $a_2$ doppelt gezählt werden, denn der Kegel, welcher im Knotenpunkt sich ringsum der Fläche anschliesst, berührt sie zugleich längs diesen Geraden. Es sind dann $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ die Geradenpaare, welche in der Schaar $q = \sigma p$ auftreten, ferner

$$\begin{array}{ll} a_1 a_1 & b_2 c_2 \\ a_2 a_2 & b_1 c_1 . \end{array}$$

die Geradenpaare des doppelt und

$$\begin{array}{ll} a_1 b_1 & a_2 c_2 \\ a_1 c_1 & a_1 b_1 \end{array}$$

die Geradenpaare des einfach berührenden Kegels. Die Schnittlinie der Ebenen der Paare $a_1 a_1$ und $b_1 c_1$ trifft die Schnittlinie der Ebenen der Paare $a_2 a_2$ und $b_2 c_2$ in der Spitze des doppelt berührenden Kegels.

Ist $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ eine Tangentenebene von $\psi$, so werden die Kegelschnittschaaren dieses Kegels dargestellt durch

$$q^2 - ps + 2p\,(B + \varrho C) = 0$$
$$q^2 - ps - 2p\,(B + \varrho C) = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0.$$

Bei Benutzung des Kegels $\psi$ und des Ebenenbüschels $q = \sigma p$ erfolgt dann die eindeutige Abbildung der Fläche aus den Gleichungen

$$\sigma^2 p - s - 2B - 2\varrho C = 0$$
$$q - \sigma p = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$

oder mittelst $\tau$ homogen gemacht

$$\sigma^2 p - (s + 2B)\,\tau^2 - 2\varrho\tau C = 0$$
$$q\tau - \sigma p = 0$$
$$A\tau^2 + 2\varrho\tau B + \varrho^2 C = 0\,.$$

Für $\tau = 0$ reduciren sich diese Gleichungen auf $\sigma^2 p = 0$, $\varrho^2 C = 0$, wesshalb die Ecken $\tau$, $\varrho$ und $\tau$, $\sigma$ und die Seite $\tau$ des Coordinatendreiecks dieselbe Bedeutung haben wie im vorigen Fall. Kommen in der benutzten Kegelschnittschaar von $\psi$ die Geradenpaare $a_1 b_1$ und $a_2 c_2$ vor, so werden die Bilder der 3fachen Punkte wieder gerade Linien mit den Fundamentalpunkten $a_1$, $b_1$ und $a_2$, $b_2$ sein, welche durch die Ecke $\tau$, $\varrho$ des Coordinatendreiecks gehen. Lässt man jetzt $\sigma$ constant der Ebene des Paares $a_1 a_2$ entsprechend, dagegen $\varrho$ veränderlich, so wird sich der Knotenpunkt unendlich vieldeutig als Gerade mit den Fundamentalpunkten $a_1$, $a_2$ ausbreiten, welche durch die andere Ecke des Coordinatendreiecks geht. Die 4 Fundamentalpunkte nebst den Verbindungslinien von $b_1$ und $b_2$ mit der Ecke $\tau$, $\sigma$ sind die 6 Geraden der Fläche. Die beiden Kegelschnittschaaren von $\psi$ sind der Strahlbüschel, dessen Scheitel in $\tau$, $\varrho$, und der Kegelschnittbüschel, dessen Gebilde durch die Doppelpunkte und die Fundamentalpunkte $b_1$, $b_2$ gehen.

Gebraucht man bei der Abbildung den Ebenenbüschel und eine Kegelschnittschaar des doppelt berührenden Kegels, so erhält man dieselben 3 Gleichungen zur Abbildung wie im vorigen Fall. Kommen in der Kegelschnittschaar des Kegels $K$ die Geradenpaare $a_1 \alpha_1$ und $b_2 c_2$ vor, so wird bei constant gedachtem $\varrho$ dem Paare $a_1 \alpha_1$ entsprechend der Fundamentalpunkt $a_1$ doppelt auftreten. Ausserdem werden sich $b_2$ und $c_2$ als einfache Fundamentalpunkte abbilden. Das zusammenfallende Punktenpaar $a_1$ stellt dann den Knotenpunkt der Fläche dar. Die 3 andern Geraden der Fläche sind dann die Verbindungslinien dieser 3 Fundamentalpunkte mit der Ecke $\tau$, $\sigma$ des Coordinatendreiecks. Die beiden Kegelschnittschaaren des Kegels $\psi$ sind die 2 Kegelschnittschaaren, deren Gebilde durch die Doppelpunkte, einen der zusammenfallenden Fundamentalpunkte und durch $b_2$ oder $c_2$ gehen.

Benutzt man endlich bei der Abbildung die beiden Kegel $\psi$ und $K$, so werden die Gleichungen, aus welchen sich die Abbildungsfunctionen ergeben, genau dieselben, wie bei früheren Fällen. Für die Anordnung der Fundamentalpunkte ergiebt sich noch Folgendes. Sind

$$\begin{matrix} a_1 \alpha_1 & b_2 c_2 \\ a_1 b_1 & a_2 c_2 \end{matrix}$$

die Geradenpaare der benutzten Kegelschnittschaaren, so werden die Fundamentalpunkte $a_1$ und $b_2$ doppelt auftreten; doch müssen dabei die zusammenfallenden Punkte $a_1$ mit einem der Doppelpunkte in der Abbildung in einer Geraden liegen. Diese Gerade ist dann das Bild des Knotenpunkts, wie dieses leicht daraus folgt, dass man sich die Ebene des Paares $a_1 \alpha_1$ fest, die Tangentenebene von $\psi$ veränderlich denkt. Die zusammenfallenden Fundamentalpunkte sind ausserdem

wieder die Bilder der 3 fachen Punkte. Die Doppelgeraden der Fläche werden durch 2 unendlich nahe Kegelschnitte abgebildet, welche durch die Doppelpunkte und je einen Punkt jeden Punktepaares gehen. Die 4 anderen Geraden der Fläche sind die Verbindungslinien von $b_2$ mit den Doppelpunkten und $a_1$ mit dem Doppelpunkte $\tau$, $\sigma$ und der Kegelschnitt durch alle Fundamentalpunkte, ausgenommen einen Punkt des Punktepaares $a_1$. Die beiden Kegelschnittschaaren von $\psi$ sind der Strahlbüschel, dessen Scheitel die Ecke $\tau$, $\sigma$ und der Kegelschnittbüschel, dessen Gebilde durch die Doppelpunkte und die beiden Punkte $b_2$ gehen. Endlich die beiden Schaaren von $K$ sind der Strahlbüschel, dessen Scheitel die Ecke $\tau$, $\varrho$ und der Curvenbüschel 3[ter] Ordnung, dessen Gebilde durch alle Fundamentalpunkte gehen und in der Ecke $\tau$, $\sigma$ einen Doppelpunkt besitzen.

Man kann endlich, wie im vorigen Falle, von einem der 3 fachen Punkte aus die Fläche auf eine Ebene eindeutig projiciren. Der Projectionspunkt sei der 3 fache Punkt $x$, $p$, $a$ und die Projectionsebene gehe durch den anderen $x$, $p$, $b$, wo $a$ und $b$ die früheren Bedeutungen besitzen. Die oben angegebene Form der Flächengleichung

$$[a_1^2 x^2 - p(\alpha_1 x + \beta y + \gamma z)]^2 = 4 p^2 (yz - x^2),$$

in welcher $\alpha_1 = \alpha - 2 a_1 b$, lässt sich zunächst schreiben:

$$a_1^2 x^2 - 2 a_1^2 x^2 p(\alpha_1 x + \beta y + \gamma z) = p^2 \{4(yz - x^2) - (\alpha_1 x + \beta y + \gamma z)^2\}.$$

Führe ich das Ebenenpaar $4yz - (\beta y + \gamma z)^2$ als Coordinatenebenenpaar $YZ$ ein, so wird die Flächengleichung

$$a_1^2 x^2 - 2 a_1^2 x^2 p(\alpha_1 x + \beta_1 Y + \gamma_1 Z) = p^2 \{Y.Z - x^2(4 + \alpha_1^2) - 2\alpha_1 x(\beta_1 Y + \gamma_1 Z)\}.$$

Die Tangentenebenen $a$ und $b$ der Fläche $s^2 - 4\psi = 0$ sind

$$a = Y - 2\alpha_1 \gamma_1 X = 0$$
$$b = Z - 2\alpha_1 \beta_1 X = 0.$$

Führe ich dieselben als Coordinatenebenen ein an Stelle von $Y$ und $Z$, so ist die endliche Form der Flächengleichung:

$$a_1^4 x^4 - 2 a_1^2 x^2 p(c_1 x + c_2 a + c_3 b) = p^2 (a_{11} x^2 + 2 a_{34} ab).$$

Fixire ich die Durchschnitte der Ebenen $x$, $p$, $a$ mit der Projectionsebene als Seiten eines Coordinatendreiecks und sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ Dreieckscoordinaten, so sind die Abbildungsfunctionen

$$p = \xi N$$
$$x = \eta N$$
$$a = \zeta N$$
$$b = M,$$

wo

$$N = 2\xi(a_{34}\xi\zeta + a_1^2 c_3 \eta^2)$$
$$M = a_1^4 \eta^4 - 2 a_1^2 \eta^2 \xi(c_1 \eta + c_2 \zeta) - \xi^2 \eta^2 a_{11}.$$

Es sind dann, wie im vorigen Falle, die Schnittpunkte des Kegelschnittes $a_{34}\xi\zeta + a_1{}^2 c_3 \eta^2 = 0$ mit den 4 Geraden:

$$a_1{}^4\eta^4 - 2\,a_1{}^2\eta^2\left(c_1\eta\xi - \frac{c_2 c_3}{a_{34}}\,\eta^2\right) - \xi^2\eta^2 a_{11} = 0$$

den Punkt $\xi$, $\eta$ ausgenommen, die 4 einfachen Fundamentalpunkte. Allein von diesen 4 Geraden fallen 2 mit der Dreiecksseite $\eta$ zusammen, weshalb auch 2 Fundamentalpunkte zusammenfallen. Dieselben stellen dann den Knotenpunkt der Fläche und eine diesem angehörigen Gerade dar, während die andere die Gerade $\eta$ selbst ist. Die Doppelgeraden und die 3 fachen Punkte bilden sich ab, wie unter Fall VII. bemerkt. Die Kegelschnittschaaren des Kegels $\psi$ sind durch die 2 Kegelschnittschaaren abgebildet, welche durch die Doppelpunkte, je einen der zusammenfallenden und je einen der einfachen Fundamentalpunkte, gehen; die des Kegels $K$ sind die Kegelschnittbüschel durch die Doppelpunkte und beziehungsweise die getrennten und zusammenfallenden Fundamentalpunkte. Die Bilder der durch den Knotenpunkt gehenden ebenen Schnitte der Flächen sind Curven 4ter Ordnung, welche in den zusammenfallenden Fundamentalpunkten noch einen Doppelpunkt besitzen.

## IX.

### Die Fläche besitzt ausserdem noch zwei einzelne Knotenpunkte.

Eine solche Fläche wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(q^2 - pl)^2 = 4p^2 st\,.$$

Die Durchdringungspunkte der Schnittlinie der Ebenen $s$ und $t$ mit der Fläche $q^2 - pl = 0$ sind die 2 Knotenpunkte der Fläche. Ich wähle das Coordinatentetraeder so, dass die Ebenen $y$, $z$, $p$ mit den Ebenen $s$, $t$, $p$ zusammenfallen. Die auf der Schnittlinie $y$, $z$ gelegene andere Ecke des Coordinatentetraeders sei harmonisch liegend mit den beiden Knotenpunkten und der Ecke $y$, $z$, $p$. Die 4te Coordinatenebene $x$ enthalte dann noch eine Doppelgerade. Dann ist die Gleichung der Fläche:

$$[(a_1 x + b_1 p)^2 - p\,(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta p)]^2 = 4\,p^2 yz\,,$$

wobei $2a_1 b_1 = \alpha$. Man kann dafür auch schreiben:

$$\left\{a_1{}^2 x^2 + p\,[p\,(b_1{}^2 - \delta) - \beta y - \gamma z]\right\}^2 = 4\,p^2 yz\,.$$

Die Schnittpunkte der Doppelgeraden $q$, $p$ mit der Fläche $l^2 - 4\,st = 0$ oder dem Ebenenpaare $(\beta y + \gamma z)^2 - 4\,yz = 0$ sind 3 fache Punkte der Fläche. Die Verbindungslinien der Knotenpunkte mit den 3 fachen Punkten geben 4 auf der Fläche liegende Gerade, wobei jede doppelt gezählt werden muss, denn die Kegel, welche in den Knotenpunkten die Fläche ringsum berühren, berühren sie zugleich in dieser

Geraden. Man sieht leicht ein, dass die Fläche ausser diesen 4 keine weiteren Geraden enthalten kann. Setzt man die Determinante der Gleichung

$$yz + \lambda\left[a_1^2x^2 + p\left\{p(b_1^2 - \delta) - \beta y - \gamma z\right\}\right] + \lambda^2p^2 = 0$$

gleich Null, so folgt der einzige doppelt berührende Kegel der Fläche dem Werthe von $\lambda$ entsprechend:

$$\lambda(4\gamma\beta - 1) + \delta - b_1^2 = 0$$

und die Coordinaten der Spitze aus

$$x = 0$$
$$y - 2\lambda\gamma p = 0$$
$$z - 2\lambda\beta p = 0.$$

Die Geraden, welche dem einen dreifachen Punkte angehören, seien $a_1$, $b_1$; die des anderen $a_2$, $b_2$, sodass $a_1$, $a_2$ sich im ersten, $b_1$ und $b_2$ sich im zweiten Knotenpunkt schneiden. Dann werden $a_1a_2$, $b_1b_2$ die Paare des Ebenenbüschels $q = \sigma p$ sein; dagegen $a_1b_1$, $a_2b_2$ die des Büschels $s = \varrho t$. Die Paare, welche in den Kegelschnittschaaren des doppelt berührenden Kegels auftreten, sind $a_1a_1$, $b_2b_2$ und $a_2a_2$, $b_1b_1$. Nach dieser Anordnung kann leicht die Spitze des doppelt berührenden Kegels geometrisch construirt werden, denn die Schnittlinie der Ebene der Paare $a_1a_1$ und $a_2a_2$ trifft die Schnittlinie der Ebenen der Paare $b_1b_1$ und $b_2b_2$ in dem gesuchten Punkte.

Benutze ich zur Abbildung den Ebenenbüschel $q = \sigma p$ und den doppelt berührenden Kegel, so folgt die Darstellung aus den 3 Gleichungen:

$$\sigma^2p - l + 2\lambda p \pm (B + \varrho C) = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2C = 0$$
$$q - \sigma p = 0.$$

Die Doppelgeraden und 3fachen Punkte der Fläche werden sich wie in den beiden vorigen Fällen abbilden. Von den 4 einfachen Fundamentalpunkten der Abbildung werden aber immer je 2 zusammenfallen, indem sich die Geraden $a_1$ und $b_2$ doppelt abbilden, wenn $a_1a_1$ und $b_2b_2$ die Paare der benutzten Kegelschnittschaar sind. Im anderen Falle werden $a_2$ und $b_1$ doppelt auftreten. Diese zusammenfallenden Fundamentalpunkte sind dann zugleich die Bilder der Knotenpunkte. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $s = \mu t$ ist die Kegelschnittschaar, deren Gebilde durch die Doppelpunkte und je einen der zusammenfallenden einfachen Fundamentalpunkte gehen. Die Schaaren des Kegels $K$ bilden sich wie im vorigen Falle ab.

Benutzt man bei der Abbildung die beiden Ebenenbüschel $q = \sigma p$ und $s = \mu^2t$, so folgt die Darstellung aus den 3 Gleichungen:

$$\sigma^2 p - l \pm 2\mu t = 0$$
$$s - \mu^2 t = 0$$
$$q - \sigma p = 0 .$$

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte der Abbildung sind dann die Bilder der 4 Geraden $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$; sie bilden die 4 Hauptecken eines vollständigen Vierecks, dessen 2 Nebenecken die Doppelpunkte der Abbildung. Während die Verbindungslinien von $a_1$ mit $b_1$ und $a_2$ mit $b_2$ die 3fachen Punkte darstellen, sind die Verbindungslinien von $a_1$ mit $a_2$ und $b_1$ mit $b_2$ die beiden Knotenpunkte der Fläche. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $q = \sigma p$ bildet sich ab, wie früher; die des Büschels $s = \mu^2 t$ ist der Strahlbüschel, dessen Scheitel die Ecke $\tau$, $\mu$ des Coordinatendreiecks und die beiden Schaaren von $K$ sind die 2 Kegelschnittbüschel durch die Doppelpunkte und beziehungsweise $a_1$, $b_2$ und $a_2$, $b_1$.

Benutzt man endlich zur Abbildung den Ebenenbüschel $s = \mu^2 t$, so erfolgt die eindeutige Darstellung aus den 3 Gleichungen

$$(B + \varrho C) \pm (\lambda p + \mu t) = 0$$
$$s - \mu^2 t = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$

Die Doppelpunkte $\tau$, $\varrho$ und $\tau$, $\mu$ der Abbildung sind die Bilder der in $\tau$ und $C$ liegenden Kegelschnitte; die Dreiecksseite $\tau$ stellt deren Schnitt dar, wenn $\tau$ die 3te homogene Coordinate. Sind $a_1 a_1$ und $b_2 b_2$ die Geradenpaare der benutzten Kegelschnittschaar des Kegels $K$, so werden sich die Geraden $a_1$ und $b_2$ doppelt abbilden, sodass diese zusammenfallenden Fundamentalpunkte mit der Ecke $\tau$, $\varrho$ in einer Geraden liegen. Diese beiden Geraden sind die Knotenpunkte der Fläche und die zusammenfallenden Fundamentalpunkte stellen die 3fachen Punkte dar. Die beiden Doppelgeraden werden durch 2 zusammenfallende Kegelschnitte dargestellt, welche durch die Doppelpunkte und je einen der zusammenfallenden Fundamentalpunkte gehen. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $s = \mu^2 t$ ist der Strahlbüschel, dessen Scheitel in der Ecke $\tau$, $\mu$. Die Schaaren des anderen Büschels und des doppelt berührenden Kegels bilden sich ab, wie im vorigen Falle. Die beiden letzten Geraden der Fläche sind die Verbindungslinien von $a_1$ und $b_2$ mit der Ecke $\tau$, $\mu$.

Um die Fläche auf eine Ebene eindeutig zu projiciren, denke ich mir die Flächengleichung

$$\{a_1^2 x^2 + p\,[p\,(b_1^2 - \delta) - \beta y - \gamma z]\}^2 = 4p^2 yz$$

zuerst auf die Form gebracht:

$$a_1^4 x^4 + 2a_1^2 x^2 p\,[p(b_1^2 - \delta) - \beta y - \gamma z] = p^2\,[4yz - \{p\,(b_1^2 - \delta) - \beta y - \gamma z\}^2]$$

und wenn ich das Ebenenpaar $4yz-(\beta y+\gamma z)^2=0$ als Coordinatenebenenpaar $Y.Z$ einführe:

$$a_1^4x^4+2a_1^2x^2p[p(b_1^2-\delta)-\beta_1 Y-\gamma_1 Z]$$
$$=p^2[YZ-p^2(b_1^2-\delta)^2+2p(b_1^2-\delta)(\beta_1 Y+\gamma_1 Z)].$$

Die Tangentenebenen der Fläche $t^2-4st=0$ in den Punkten $X$, $P$, $Y$ und $X$, $P$, $Z$ sind:

$$Y+2p(b_1^2-\delta)\gamma_1=A$$
$$Z+2p(b_1^2-\delta)\beta_1=B$$

und wenn ich dieselben als Coordinatenebenen für $Y$ und $Z$ einführe, so wird die Form der Flächengleichung:

$$a_1^4x^4+2a_1^2x^2p\{p(b_1^2-\delta)+4p\gamma_1\beta_1(b_1^2-\delta)-\beta_1 A-\gamma_1 B\}$$
$$=p^2\{AB-p^2(b_1^2-\delta)^2(1+4\gamma_1\beta_1)\}.$$

Sind wieder $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Dreieckscoordinaten eines Punktes der Ebene, so sind die Abbildungsfunctionen:

$$p=\xi N$$
$$x=\eta N$$
$$y=\zeta N$$
$$z=M.$$

wobei $\qquad N=\xi\{\xi\zeta+2a_1^2\gamma_1\eta^2\}:$

$$M=a_1^4\eta^4+2a_1^2\eta^2\xi^2(b_1^2-\delta)(1+4\gamma_1\beta_1)-2a_1^2\eta^2\xi\zeta\beta_1+\xi^4(b_1^2-\delta)^2(1+4\gamma_1\beta_1).$$

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte sind die Schnittpunkte des Kegelschnittes $\xi\zeta+2a_1^2\gamma_1\eta^2=0$ mit den 4 Geraden:

$$a_1^4\eta^4(1+4\gamma_1\beta_1)+2a_1^2\eta^2\xi^2(b_1^2-\delta)(1+4\gamma_1\beta_1)+\xi^4(b_1^2-\delta)^2(1+4\gamma_1\beta_1)=0.$$

Nach Weglassung des Factors $(1+4\gamma_1\beta_1)$ kann diese Gleichung in die Form

$$\{a_1^2\eta^2+\xi^2(b_1^2-\delta)\}^2=0$$

oder

$$(a_1\eta+\xi\sqrt{\delta-b_1^2})^2(a_1\eta-\xi\sqrt{\delta-b_1^2})^2=0$$

gesetzt werden. Die 4 einfachen Fundamentalpunkte der Abbildung fallen daher paarweise zusammen, nämlich in die Schnittpunkten des Linienpaares $(a_1\eta+\xi\sqrt{\delta-b_1^2})(a_1\eta-\xi\sqrt{\delta-b_1^2})=0$ mit dem Kegelschnitt $\xi\zeta+2a_1^2\gamma_1\eta^2=0$. Jedes zusammenfallende Punktepaar stellt einen Knotenpunkt der Fläche und eine diesen schneidende Gerade dar; die Verbindungslinien mit der Ecke $\xi$, $\eta$ sind dann die 2 anderen Geraden der Fläche. Die Doppelgeraden und 3fachen Punkte der Fläche bilden sich ab, wie in den anderen Fällen. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $s=\mu^2 t$ wird durch eine Kegelschnittschaar, deren Gebilde durch die Doppelpunkte und je einen Punkt jedes Punktepaares gehen, abgebildet und die beiden Schaaren

des doppelt berührenden Kegels durch 2 Kegelschnittschaaren durch die Doppelpunkte und je ein Punktepaar.

---

Ich werde jetzt zum Schluss eine kurze Uebersicht über die 14 speciellen Fälle geben, welche ich in meinen verschiedenen Abhandlungen auseinandergesetzt habe und zwar bei Zugrundelegung der Abbildungsfunctionen 4ter Ordnung mit 2 Doppelpunkten und 4 einfachen Fundamentalpunkten.

1. *Die Fläche 4ter Ordnung besitzt einen Knotenpunkt.*

Zwei der einfachen Fundamentalpunkte liegen mit einem der Doppelpunkte in einer Geraden, wenn der einfach und einer der doppelt berührenden Kegel zur Abbildung benutzt wird. —

Zwei der einfachen Fundamentalpunkte fallen zusammen, wenn 2 der drei doppelt berührenden Kegel zur Abbildung benutzt werden.

2. *Die Fläche 4ter Ordnung besitzt 2 Knotenpunkte, von denen jeder die Spitze eines die Fläche einfach berührenden Kegels ist.*

Drei der einfachen Fundamentalpunkte bilden mit den 2 Doppelpunkten zwei Geraden, sodass ein Fundamentalpunkt beiden Geraden gemeinsam ist, wenn die beiden einfach berührenden Kegel zur Abbildung benutzt werden.

Zwei der einfachen Fundamentalpunkte fallen zusammen und liegen mit einem der Doppelpunkte in einer Geraden, wenn ein einfach und der doppelt berührende Kegel benutzt werden.

3. *Voriger Fall, nur sind die Knotenpunkte nicht die Spitzen einfach berührender Kegel.*

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte liegen paarweise mit einem der Doppelpunkte in einer Geraden, wenn der Ebenenbüschel und einer der doppelt berührenden Kegel benutzt werden.

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte fallen paarweise zusammen, wenn 2 der drei doppelt berührenden Kegel benutzt werden.

4. *Die Fläche 4ter Ordnung besitzt drei Knotenpunkte.*

Von den 4 einfachen Fundamentalpunkten liegen 2 mal zwei mit dem einen und einmal zwei mit dem anderen Doppelpunkte in einer Geraden, wenn der Ebenenbüschel und der einfach berührende Kegel zur Abbildung benutzt werden.

Von den 4 einfachen Fundamentalpunkten liegen 2 mal zwei mit dem einen Doppelpunkte in einer Geraden und ausserdem fallen 2 derselben zusammen, wenn statt des einfach berührenden Kegels der doppelt berührende Kegel benutzt wird.

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte fallen paarweise zusammen, und eines dieser Punktepaare liegt mit dem einen Doppelpunkt in einer Geraden, wenn die beiden Kegel benutzt werden.

5. *Die Fläche $4^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt 4 Knotenpunkte.*

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte bilden die Nebenecken eines vollständigen Vierecks, dessen 2 Hauptecken die Doppelpunkte sind, wenn die beiden Ebenenbüschel benutzt werden.

Die 4 einfachen Fundamentalpunkte fallen paarweise zusammen und jedes Paar liegt mit einem der Doppelpunkte in einer Geraden, wenn ein Ebenenbüschel und der doppelt berührende Kegel zur Abbildung benutzt werden.

In diesen 5 Fällen ist das Bild des Doppelkegelschnittes der Fläche immer eine Curve $4^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und in jedem Doppelpunkte einen Doppelpunkt besitzt. Zwei zusammenfallende Fundamentalpunkte oder 2 mit einem Doppelpunkte auf einer Geraden liegende stellen immer einen Knotenpunkt der Fläche dar. —

Die folgenden 6 Fälle beziehen sich auf das Zerfallen der Doppelcurve in ein Linienpaar.

6. *Die Fläche besitzt keinen besonderen Knotenpunkt.*

Die eine Doppelgerade bildet sich als Doppelpunkt ab und ein Punkt derselben wird durch die Verbindungslinie der Doppelpunkte dargestellt; während das Bild der anderen eine Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung ist, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und im ersten Doppelpunkte einen Doppelpunkt besitzt. Es ist dabei bei der Abbildung einer der 4 doppelt berührenden Kegel und der Ebenenbüschel, dessen Achse eine der Doppelgeraden, benutzt worden.

Das Bild jeder Doppelgeraden ist ein Kegelschnitt durch die Doppelpunkte und je 2 der einfachen Fundamentalpunkte, wenn 2 der 4 doppelt berührenden Kegel benutzt worden sind.

7. *Die Fläche besitzt noch einen besonderen Knotenpunkt.*

Die Doppelgeraden bilden sich ab, wie im vorigen Falle bei Benutzung eines Ebenenbüschels und des einfach berührenden Kegels; es liegen aber 2 der einfachen Fundamentalpunkte mit dem $2^{\text{ten}}$ Doppelpunkte auf einer Geraden.

Wird statt des einfach berührenden ein doppelt berührender Kegel genommen, so fallen 2 der einfachen Fundamentalpunkte zusammen.

Werden der einfach und einer der 2 doppelt berührenden Kegel benutzt, so sind die Bilder der Doppelgeraden wieder Kegelschnitte, ausserdem liegen 2 einfache Fundamentalpunkte mit einem der Doppelpunkte in einer Geraden.

Werden endlich die beiden doppelt berührenden Kegel benutzt, so sind die Bilder der Doppelgeraden Kegelschnitte, ausserdem fallen 2 der einfachen Fundamentalpunkte zusammen.

8. *Die Fläche 4ter Ordnung besitzt noch 2 besondere Knotenpunkte, von welchen jeder die Spitze eines die Fläche einfach berührenden Kegels ist.*

Drei der 4 einfachen Fundamentalpunkte bilden mit den beiden Doppelpunkten 2 Gerade, sodass ein Punkt den beiden gemeinsam ist und die beiden Doppelgeraden bilden sich als Kegelschnitte durch die Doppelpunkte und je 2 der einfachen Fundamentalpunkte ab, wenn die beiden Kegel zur Abbildung benutzt worden sind.

Wird dagegen nur einer derselben in Verbindung mit einem Ebenenbüschel gebraucht, so bleibt die Anordnung der Fundamentalpunkte, wie im Fall 2. bemerkt. Der Doppelpunkt, welcher nicht mit den zusammenfallenden Fundamentalpunkten in einer Geraden liegt, nebst der Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte stellt die eine Doppelgerade, die ergänzende Curve 3ter Ordnung die andere Doppelgerade dar.

9. *Die beiden Knotenpunkte des vorigen Falles sind nicht die Spitzen einfach berührender Kegel.*

Benutzt man die beiden doppelt berührenden Kegel zur Abbildung, so ist die Anordnung der Fundamentalpunkte, wie in Fall 3. erwähnt. Das Bild jeder Doppelgeraden ist aber ein Kegelschnitt, welcher durch die Doppelpunkte und je eines der Punktepaare geht.

Wird statt eines der doppelt berührenden Kegel ein Ebenenbüschel, dessen Achse eine Doppelgerade, benutzt, so bilden sich die Doppelgeraden beziehungsweise als Doppelpunkt und Curve 3ter Ordnung ab.

Wird ein doppelt berührender Kegel und der Ebenenbüschel, dessen Achse keine Doppelgerade ist, zur Abbildung benutzt, so ist die Anordnung der Fundamentalpunkte wie im Falle 3.; die Bilder der Doppelgeraden sind wieder Kegelschnitte.

Tritt dann an Stelle des doppelt berührenden Kegels ein anderer Ebenenbüschel, so sind die Bilder der Doppelgeraden wieder beziehungsweise ein Doppelpunkt und Curve 3ter Ordnung.

10. *Die Fläche 4ter Ordnung besitzt 3 besondere Knotenpunkte.*

Die Anordnung der einfachen Fundamentalpunkte bleibt wie in Fall 4. angegeben, nur muss statt des doppelt berührenden Kegels bei der Abbildung der Ebenenbüschel substituirt werden, dessen Achse eine der Doppelgeraden. So oft der letztere benutzt wird, ist das Bild der einen Doppelgeraden ein Doppelpunkt in Verbindung mit einer Geraden und das Bild der anderen die erzeugende Curve 3ter Ordnung. Anderen Falles wird jede Doppelgerade durch einen Kegelschnitt dargestellt, welcher durch die Doppelpunkte und 2 der einfachen Fundamentalpunkte geht.

11. *Die Fläche* 4ter *Ordnung besitzt* 4 *besondere Knotenpunkte.*

Die Anordnung der Fundamentalpunkte bleibt wie in Fall 5., wenn nur für den einfach berührenden Kegel der Ebenenbüschel substituirt wird, dessen Achse eine Doppelgerade. Bei Benutzung der beiden anderen Ebenenbüschel zur Abbildung sind die Bilder der Doppelgeraden Kegelschnitte; im anderen Falle tritt wieder die bekannte Verschiedenheit ein. —

Die folgenden 3 Fälle beziehen sich auf das Zusammenfallen der beiden Doppelgeraden.

12. *Die Fläche* 4ter *Ordnung besitzt keinen weiteren Knotenpunkt mehr.*

Benutzt man einen der 3 doppelt berührenden Kegel und der Ebenenbüschel zur Abbildung, so liegen die 4 Fundamentalpunkte zweimal mit dem einen Doppelpunkte in einer Geraden. Der Doppelpunkt stellt jede Doppelgerade der Fläche und die Geraden der 3fachen Punkte dar.

Benutzt man 2 der 3 doppelt berührenden Kegel zur Abbildung, so fallen die 4 einfachen Fundamentalpunkte paarweise zusammen und die Bilder der Doppelgeraden sind 2 unendlich nahe Kegelschnitte.

Bei der eindeutigen Projection von einem der 3fachen Punkte auf eine Ebene liegen die 4 einfachen Fundamentalpunkte mit den zusammengefallenen Doppelpunkten auf einem Kegelschnitte. Die Doppelpunkte sind dann die Bilder der Doppelgeraden.

13. *Die Fläche* 4ter *Ordnung besitzt noch einen Knotenpunkt.*

Von den 4 einfachen Fundamentalpunkten liegen 2mal zwei mit dem einen und einmal zwei mit dem anderen Doppelpunkte in einer Geraden, wenn der Ebenenbüschel und der einfach berührende Kegel $\psi$ benutzt worden sind. Der erste Doppelpunkt ist wieder das Bild der Doppelgeraden.

Wird das Ebenenbüschel und der doppelt berührende Kegel benutzt, so liegen von den 4 einfachen Fundamentalpunkten 2mal zwei mit dem einen Doppelpunkte in einer Geraden, ausserdem fallen 2 derselben zusammen. Der Doppelpunkt ist das Bild der Doppelgeraden.

Werden die beiden Kegel zur Abbildung benutzt, so fallen die 4 einfachen Fundamentalpunkte paarweise zusammen, und liegt dabei eines dieser Paare mit einem der Doppelpunkte in einer Geraden. Die Bilder der Doppelgeraden sind zusammenfallende Kegelschnitte.

Endlich bei der eindeutigen Projection von einem der 3fachen Punkte auf eine Ebene liegen die Fundamentalpunkte auf einem Kegelschnitt, 2 der einfachen sind ebenfalls zusammengefallen.

14. *Die Fläche* 4ter *Ordnung besitzt noch* 2 *besondere Knotenpunkte.*

Bei Benutzung des doppelt berührenden Kegels und des Ebenenbüschels, dessen Achse eine Doppelgerade, zur Abbildung, sind die 4

Fundamentalpunkte paarweise zusammengefallen, sodass jedes Paar mit dem einen Doppelpunkte in einer Geraden liegt. Letzterer ist das Bild der Doppelgeraden. Die Geraden sind die Bilder der 3 fachen Punkte, die zusammenfallenden Fundamentalpunkte sind die Bilder der Knotenpunkte.

Gebraucht man den anderen Ebenenbüschel zur Abbildung, so ist die Anordnung der Fundamentalpunkte dieselbe. Es sind aber jetzt die Geraden die Bilder der Knotenpunkte und die zusammenfallenden Fundamentalpunkte stellen die 3 fachen Punkte dar. Die Doppelgeraden werden durch unendlich nahe Kegelschnitte abgebildet.

Werden die beiden Ebenenbüschel zur Abbildung benutzt, so bilden die 4 einfachen Fundamentalpunkte die Hauptecken eines vollständigen Vierecks, dessen 2 Nebenecken die beiden Doppelpunkte der Abbildung. Der eine Doppelpunkt ist das Bild der Doppelgeraden.

Bei der eindeutigen Projection von einem der 3 fachen Punkte auf eine Ebene fallen die 4 einfachen Fundamentalpunkte paarweise zusammen und die drei Punktepaare der Abbildung liegen auf einem Kegelschnitte.

# Notiz über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend.

Von Paul du Bois-Reymond in Freiburg i. Br.

---

In Cauchy's Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique findet sich S. 131 der Satz aufgestellt, dass die Summe einer convergenten Reihe, deren einzelne Glieder stetige Functionen von einer Variabeln $x$ sind, ebenfalls eine stetige Function dieser Variabeln sein müsse. Dass diese Behauptung, so allgemein ausgesprochen, unrichtig ist, lehren die physikalischen Reihen, und ihr ist auch schon Abel entgegengetreten, indem er als Beispiel einer trotz der Stetigkeit ihrer Glieder unstetigen Reihe diese: $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots$ anführte (Crelle's Journ. I, pag. 316 Anm.). Gleichwohl müssen zwischen der Stetigkeit der Glieder einer Reihe und der Stetigkeit ihrer Summe Beziehungen stattfinden, und es sind deren auch schon z. B. gerade bei trigonometrischen Reihen aufgedeckt worden, während der folgende Satz meines Wissens noch nicht mitgetheilt worden ist:

*Wenn in der unendlichen Reihe $w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots$ die $\mu$ von $x$ unabhängig sind und die Reihe $\mu_1 + \mu_2 + \cdots$ absolut convergirt, wenn ferner die Grössen $w_1 = w_1(x)$, $w_2 = w_2(x)$, $\cdots$ im Intervalle $x = a$ bis $x = b$ für jeden endlichen Index stetige Functionen des Argumentes $x$ sind, wenn endlich keine dieser Functionen incl. $w_\infty$ für einen dem Intervall $x = a$ bis $x = b$ angehörigen Werth von $x$ [unter $w_p(x)$ stets $\lim_{\varepsilon=0} w_p(x \pm \varepsilon)$ verstanden] unendlich wird, so ist die Summe der Reihe $w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots$ eine im Intervall $x = a$ bis $x = b$ stetige Function von $x$.*

*Beweis.* Wir setzen $U_n(x) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots w_n\mu_n$, und nehmen (unbeschadet der Allgemeinheit des Beweises) die $\mu$ positiv an.

Zum Ausgangspunkt des Beweises nehmen wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} U_n(x+\varepsilon) - U_n(x) = {} & \Delta w_1\mu_1 + \Delta w_2\mu_2 + \cdots \Delta w_m\mu_m \\ & + w_{m+1}(x+\varepsilon)\mu_{m+1} + w_{m+2}(x+\varepsilon)\mu_{m+2} + \cdots w_n(x+\varepsilon)\mu_n \\ & - \{w_{m+1}(x)\mu_{m+1} + w_{m+2}(x)\mu_{m+2} + \cdots w_n(x)\mu_n\}, \end{aligned}$$

$$\Delta w_p = w_p(x+\varepsilon) - w_p(x).$$

Es sei $\Delta W_m$ ein gewisser mittlerer Werth unter den Differenzen: $\Delta w_1, \Delta w_2 \,..\, \Delta w_m$, der aber keiner von ihnen gleich zu sein braucht, ebenso $W^{(1)}_{mn}$ ein mittlerer Werth unter den Grössen $w_{m+1}(x+\varepsilon), \ldots w_n(x+\varepsilon)$ und $W_{mn}$ ein mittlerer Werth unter den Grössen $w_{m+1}(x), \ldots . w_n(x)$, so können wir schreiben:

$$U_n(x+\varepsilon) - U_n(x) = \Delta W_m(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_m)$$
$$+ (W^{(1)}_{mn} - W_{mn})(\mu_{m+1} + \mu_{m+2} + \cdots \mu_n).$$

Lassen wir jetzt $n$ unendlich werden, so werden $W^{(1)}_{m\infty}$, $W_{m\infty}$ endliche, für jeden Werth von $x$ vollkommen bestimmte Grössen und man hat:

$$U_\infty(x+\varepsilon) - U_\infty(x) = \Delta W_m(\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_m)$$
$$+ (W^{(1)}_{m\infty} - W_{m\infty})(\mu_{m+1} + \mu_{m+2} + \cdots \text{in inf}).$$

Die Function $U_\infty(x)$ ist stetig überall, wo $U_\infty(x \pm 0) - U_\infty(x)$ Null ist. Wir lassen in der vorstehenden Gleichung $\varepsilon$ verschwinden. Es verschwindet alsdann $\Delta W_m$ und wir finden:

$$U_\infty(x+0) - U_\infty(x) = (\mu_{m+1} + \mu_{m+2} + \cdots)\{\lim_{\varepsilon=0} W^{(1)}_{m\infty} - W_{m\infty}\},$$

da wir a priori nicht wissen können, ob die Grössen $\lim_{\varepsilon=0} W^{(1)}_{m\infty}$ und $W_{m\infty}$ einander gleich sind. Da sie aber endlich sind, so wird die rechte Seite der vorstehenden Gleichung um so kleiner, je grösser $m$, und kann durch Vergrösserung von $m$ kleiner *gemacht* werden als jede noch so kleine vorgelegte Grösse. Mithin *ist* die linke Seite, welche $m$ nicht enthält, kleiner als jede noch so kleine vorgelegte Grösse, also ist sie Null. Q. E. D.

*Beispiele.* Die Reihen deren $p^{\text{te}}$ Glieder sind:

$$\frac{x}{\left(x^2p - \frac{x^2}{2} + 1\right)^2 - \frac{x^4}{4}}, \quad \frac{x}{x^2p^2 + xp(2-x) + 1 - x}$$

werden keine stetigen Functionen von $x$ zu sein brauchen, obschon ihre Glieder es sind und ihre Summe für jeden Werth von $x$ endlich und bestimmt ist, wie bekannte Convergenzregeln lehren. Denn giebt man diesen $p^{\text{ten}}$ Gliedern die Formen:

$$\frac{1}{p^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2 + \frac{1-\frac{x^2}{2}}{p}\right)^2 - \frac{x^4}{4p^2}}, \quad \frac{1}{p^2}\cdot\frac{x}{x^2 + \frac{x(2-x)}{p} + \frac{1-x}{p^2}}$$

in denen $\mu_p$ durch $\frac{1}{p^2}$ und $w_p$ durch die Coefficienten von $\frac{1}{p^2}$ vertreten ist, so werden diese Coefficienten für $p = \infty$ beide gleich $\frac{1}{x}$. Bei $x = 0$ ist also eine sprungweise Werthänderung der Summe jener Reihen möglich. Und in der That, wenn man die $p^{\text{ten}}$ Glieder in die Differenzen auflöst:

$$\frac{xp}{1+x^2p} - \frac{x(p-1)}{1+x^2(p-1)} \quad , \quad \frac{xp}{1+xp} - \frac{x(p-1)}{1+x(p-1)} \, ,$$

welche von $p = 1$ bis $p = n$ summirt $\frac{nx}{1+x^2n}$ , $\frac{xn}{1+xn}$ geben, so sieht man sofort, dass ihre Summe für $n = \infty$ bei $x = 0$ unstetig ist.

Die Reihe

$$\frac{\sin x}{1^\mu} + \frac{\sin 2x}{2^\mu} + \cdots$$

wird dagegen nach dem obigen Satze, wenn $\mu > 1$, für jeden Werth von $x$ stetig sein müssen, da die Reihe $\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \cdots$ für $\mu > 1$ convergirt.

Freiburg i. Br.

# Preisaufgabe

## der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1874.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1871).

---

Das Problem der elektrischen Vertheilung auf einem Conductor von gegebener Gestalt ist durch die bisher in Anwendung gebrachten Methoden nur in verhältnissmässig wenigen Fällen zur definitiven Lösung gelangt oder einer solchen zugänglich geworden. Um die genannten Methoden ihres speciellen Characters zu entkleiden und wo möglich auf ein allgemeineres Niveau zu erheben, scheint es zunächst wünschenswerth, wesentlich neue Fälle in den Kreis der Untersuchungen hineinzuziehen. Demgemäss stellt die Gesellschaft folgende Preisaufgabe:

*Auf einem Rotationskörper, dessen Meridian durch die Lemniscate (Cassini'sche Curve):*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$$

*dargestellt ist, soll die Vertheilung der Elektricität unter dem Einflusse gegebener äusserer Kräfte ermittelt werden.*

Die Beantwortung des Specialfalles $a = b$ würde durch die Methode der reciproken Radien (Methode der sphärischen Spiegelung) auf den Fall eines Hyperboloids reducirbar, und für die Erlangung des Preises *unzureichend* sein. (Preis 60 Ducaten.)

---

Die Preisbewerbungsschriften sind in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen *deutlich* geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der auswendig dasselbe Motto trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem Monat November des Jahres 1874; die Adresse ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April bekannt gemacht.

---

# Ueber trigonometrische Reihen.

Von Cantor in Halle a. d. S.

---

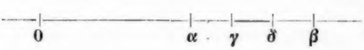
Im 72. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik leite ich einen Satz her, welcher zum Gegenstande hat das Unendlichkleinwerden der Coefficienten trigonometrischer Reihen unter gewissen Voraussetzungen. Ich möchte eine Darstellung des dazu erforderlichen Beweises geben, welche vielleicht in Bezug auf Uebersichtlichkeit und Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen wird. In der Reihe der Sätze, welche ich im Folgenden ableiten werde, ist es der letzte, um den es sich hier handelt, während die übrigen als Hülfssätze auftreten.

I. „*Ist* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ *eine gegebene unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen, welche nur an die Bedingungen gebunden ist, dass:*

$$x_2 \geqq k x_1, \quad x_3 \geqq k^2 x_2, \quad x_n \geqq k^{n-1} x_{n-1}, \ldots .$$

*wo* $k > 1$ *ist, so giebt es Zahlengrössen* $\Omega$, *welche eine solche Beziehung zur Zahlenreihe* $x_1, x_2, \cdots$ *haben, dass das Product* $x_n \Omega$ *sich von einer ungeraden ganzen Zahl* $2y_n + 1$ *um eine Grösse* $\Theta_n$ *unterscheidet, welche unendlich klein wird, wenn man* $n$ *ins Unendliche wachsen lässt, und zwar kann die Zahlengrösse* $\Omega$ *innerhalb eines willkührlich vorgegebenen Intervalles* $(\alpha \,.\,.\, \beta)$ *gefunden werden.*“

*Beweis:* Ich will die Grösse des Intervalles $(\alpha \,.\,.\, \beta)$ mit $i$ bezeichnen und dasselbe im Positiven voraussetzen, was erlaubt ist, da, wenn eine Zahlengrösse $\Omega$ die behauptete Eigenschaft hat, auch $-\Omega$ dieselbe Eigenschaft behält, wenn nur statt $2y_n + 1$ die Zahl $-(2y_n + 1)$ genommen wird. Man theile das Intervall in drei gleiche Theile; seien $\gamma$ und $\delta$ die Theilpunkte, so dass: $\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{i}{3}$.




Sei $x_\nu$ die erste der Zahlen $x_n$, welche grösser ist, als die grösste der beiden Grössen $\frac{3}{(k-1)\,i}$ und $\frac{6}{i}$.

Wir nehmen die ungerade Zahl $2y_\nu + 1$ so an, dass der Bruch $\frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ in das Intervall $\gamma\delta$ fällt; dies ist möglich, weil $x_\nu > \frac{6}{i}$; als-

dann denken wir uns die ungeraden Zahlen $2y_{\nu+1}+1$, $2y_{\nu+2}+1$, ...... so bestimmt, dass:

$$
(\mathrm{A})\quad
\begin{aligned}
&\left(2y_{\nu+1}+1-(2y_\nu+1)\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}\right)\leqq 1\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left(2y_{n+1}+1-(2y_n+1)\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\leqq 1\text{*)}.
\end{aligned}
$$

Ich füge noch hinzu, dass, wenn hierbei irgend wo eine Zweideutigkeit für die Zahl $2y_n+1$ eintreten sollte, stets die kleinere Zahl genommen werden soll; alsdann ist durch das Bedingungssystem (A) eine Reihe ungerader Zahlen $2y_n+1$, von $n=\nu$ an, eindeutig definirt; für kleinere Werthe von $n$ setze man der Gleichförmigkeit wegen für $2y_n+1$ irgend welche ungerade Zahlen fest.

Die Zahlen $x_n$ und $y_n$ bestimmen nun eine unendliche Reihe von Brüchen:

$$
(\mathrm{A})\qquad \frac{2y_1+1}{x_1},\quad \frac{2y_2+1}{x_2},\;\ldots\ldots\; \frac{2y_n+1}{x_n},\;\ldots\ldots
$$

welche sich mit wachsendem $n$ einer bestimmten Grenze $\Omega$ nähern; denn wegen des Bedingungssystems (Á) und da die Reihe $\frac{1}{x_\nu}+\frac{1}{x_{\nu+1}}+\cdots\cdots$ convergent ist, sieht man leicht, dass die Differenz:

$$
\frac{2y_{n+m}+1}{x_{n+m}}-\frac{2y_n+1}{x_n}
$$

unendlich klein wird, wenn, was auch $m$ sei, $n$ unendlich gross wird.

Aus (A) ergiebt sich nun, wenn $n\geqq\nu$, für $\Omega$ die Relation:

$$
\left(\Omega-\frac{2y_n+1}{x_n}\right)\leqq\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_{n+2}}+\cdots\cdots
$$

oder:

$$
(\Omega x_n-2y_n-1)\leqq\frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}+\cdots\cdots;
$$

es ist aber:

$$
\frac{x_n}{x_{n+1}}\leqq\frac{1}{k^n},\quad \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\leqq\frac{1}{k^{n+1}},\;\ldots\ldots
$$

Daraus folgt:

$$
(\Omega x_n-2y_n-1)\leqq\frac{1}{k^n}+\frac{1}{k^{2n+1}}+\frac{1}{k^{3n+3}}+\cdots
$$

und umsomehr:

$$
(\mathrm{B})\qquad (\Omega x_n-2y_n-1)<\frac{1}{k^n-1}.
$$

Hieraus ersieht man, dass, da $k>1$, die Differenz $\Theta_n=x_n\Omega-2y_n-1$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, und es ist somit der erste Theil des Satzes bewiesen.

---

*) Unter $(z)$ verstehe ich immer den absoluten Werth der Grösse $z$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die hier gefundene Zahlengrösse $\Omega$ im Intervalle $(\alpha \,..\, \beta)$ liegt; dies ergiebt sich aus (B), wenn man darin $n = \nu$ setzt; man hat:

$$\left(\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right) < \frac{1}{x_\nu (k^\nu - 1)}$$

und umsomehr:

$$\left(\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right) < \frac{1}{x_\nu (k - 1)}.$$

Es war aber $x_\nu$ so angenommen, dass: $\frac{1}{x_\nu (k-1)} < \frac{i}{3}$; man hat also:

$$\text{(C)} \qquad \left(\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right) < \frac{i}{3}.$$

Der Bruch $\frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ liegt, wie zu Anfang festgesetzt wurde, im Intervalle $(\gamma \,..\, \delta)$; die Grösse $\Omega$ liegt also wegen (C) jedenfalls im Intervalle $(\alpha \,..\, \beta)$.

II. „*Ist eine unendliche Grössenreihe:*

$$c_1, \quad c_2, \; \ldots, \; c_n, \; \ldots$$

*so beschaffen, dass man aus jeder in ihr enthaltenen unendlichen Reihe:*

$$c_{\nu_1}, \quad c_{\nu_2}, \; \ldots, \; c_{\nu_n}, \; \ldots,$$

*eine neue Grössenreihe:*

$$c_{\nu_{\mu_1}}, \quad c_{\nu_{\mu_2}}, \; \ldots, \; c_{\nu_{\mu_n}}, \; \ldots\ldots$$

*ausheben kann, deren Glieder* $c_{\nu_{\mu_n}}$ *mit wachsendem* $n$ *unendlich klein werden, so werden auch die Glieder* $c_n$ *der ursprünglichen Reihe mit wachsendem* $n$ *unendlich klein.*“

*Beweis.* Ist $\varepsilon$ eine beliebig angenommene positive Grösse, so ist die Anzahl der Glieder in der Reihe $c_n$, welche ihrem absoluten Betrage nach grösser als $\varepsilon$ sind, endlich; denn würde sie unendlich sein, so hätte man eine in der ersten enthaltene unendliche Reihe $c_{\nu_n}$, deren Glieder sämmtlich grösser wären als $\varepsilon$, aus welcher sich daher keine Grössenreihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ ausheben liesse, deren Glieder mit wachsendem $n$ unendlich klein würden.

Wenn aber in einer Reihe $c_n$ die Anzahl der Glieder, welche grösser als eine willkürlich angenommene Grösse $\varepsilon$ sind, endlich ist, so heisst dies nichts anders als, dass $\lim c_n = 0$ für $n = \infty$.

III. „*Wenn für jeden Werth von* $x$ *zwischen* 0 *und* $\frac{i}{2}$ (*wo* $i$ *eine beliebige positive Grösse ist*):

$$\lim c_n \sin nx = 0, \qquad \textit{so ist:}$$

$$\lim c_n = 0.\text{“}$$

*Beweis.* Sei $c_{\nu_n}$ irgend eine in der Reihe $c_n$ enthaltene unendliche Reihe; dann will ich zeigen, dass sich aus der Reihe $c_{\nu_n}$ eine neue Reihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ ausheben lässt, so dass $\lim c_{\nu_{\mu_n}} = 0$ für $n = \infty$.

Die Reihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ werde so aus $c_{\nu_n}$ gehoben, dass, bei irgend einer festgenommenen Zahl $k > 1$, stets:

(1) $$\nu_{\mu_n} \geqq k^{n-1}\,\nu_{\mu_{n-1}}.$$

Eine solche Aushebung ist immer möglich.

Man bestimme nun nach I. eine Zahlengrösse $\Omega$ im Intervalle $\left(0\,.\,.\,\frac{i}{\pi}\right)$ so, dass:

$$\Omega\nu_{\mu_n} - (2y_n + 1) = \Theta_n$$

mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, wobei $y_n$ eine ganze Zahl ist.

Die Zahlengrösse $\Omega' = \Omega\frac{\pi}{2}$ (wo unter $\pi$ die Verhältnisszahl des Umfangs zum Durchmesser beim Kreise ist), liegt alsdann im Intervalle $\left(0\,.\,.\,.\,\frac{i}{2}\right)$ und es wird:

(2) $$\Omega'\nu_{\mu_n} - \frac{\pi}{2}(2y_n + 1) = \Theta'_n$$

mit wachsendem $n$ unendlich klein.

Wenden wir nun die Voraussetzung, welche dem Satze zu Grunde liegt (dass nämlich:

$$\lim c_n \sin nx = 0$$

für jeden Werth von $x$ im Intervalle $\left(0\,.\,.\,\frac{i}{2}\right)$), auf den Fall $x = \Omega'$ an, so hat man:

$$\lim c_n \sin n\Omega' = 0$$

und daher auch:

$$\lim c_{\nu_{\mu_n}} \sin \nu_{\mu_n}\Omega' = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Wegen (2) kann man hier $\sin \nu_{\mu_n}\Omega'$ durch $\pm \cos \Theta'_n$ ersetzen und man hat also:

(3) $$\lim c_{\nu_{\mu_n}} \cos \Theta'_n = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Da nun aber $\Theta'_n$ mit wachsendem $n$ unendlich klein wird, so folgt ohne Weiteres aus (3):

$$\lim c_{\nu_{\mu_n}} = 0 \text{ für } n = \infty.$$

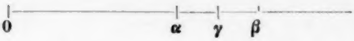
Mit Zuhülfenahme des Satzes II. schliesst man nun, dass:

$$\lim c_n = 0 \text{ für } n = \infty.$$

IV. „*Wenn für jeden reellen Werth von $x$ zwischen gegebenen Grenzen $\alpha\,.\,.\,\beta$ die Bedingung erfüllt ist:*

$$\lim\,(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0,$$

*so ist sowohl* $\lim a_n = 0$, *wie* $\lim b_n = 0$."




*Beweis.* Sei $\gamma$ der in der Mitte zwischen $\alpha\,..\,\beta$ gelegene Werth; die Grösse des Intervalles will ich hier wieder $i$ nennen. Setzen wir:

$$a_n \cos n\gamma - b_n \sin n\gamma = c_n$$
$$a_n \sin n\gamma + b_n \cos n\gamma = d_n \quad \text{so ist:}$$
$$a_n = c_n \cos n\gamma + d_n \sin n\gamma$$
$$b_n = -c_n \sin n\gamma + d_n \cos n\gamma.$$

Wenn wir nun zeigen könnten, dass $\lim c_n = 0$, $\lim d_n = 0$, so würde daraus folgen, dass $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$. Es ist aber wegen der Voraussetzung, welche dem Satze zu Grunde liegt, wenn man sie auf $x = \gamma$ anwendet:

$$\lim d_n = 0$$

und es verbleibt daher nur noch zu beweisen, dass $\lim c_n = 0$.

Dies geschieht auf folgende Weise.

Man hat für jeden positiven Werth von $x < \frac{i}{2}$ die beiden Relationen:

$$\lim\big(a_n \sin n(\gamma + x) + b_n \cos n(\gamma + x)\big) = 0$$
$$\lim\big(a_n \sin n(\gamma - x) + b_n \cos n(\gamma - x)\big) = 0,$$

aus welchen durch Subtraction (wenn man ausserdem durch 2 dividirt) hervorgeht:

$$\lim c_n \sin nx = 0 \text{ für } n = \infty,$$

wenn $x$ irgend ein positiver Werth, kleiner als $\frac{i}{2}$ ist. Wegen des Satzes III. ist also:

$$\lim c_n = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

Berlin, den 21. April 1871.

# Zur Theorie der ternären cubischen Formen.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Für die Theorie einer ternären cubischen Form $f$ ist durch Einführung der Conjugirten $P_f$ ein Dualismus begründet worden, der in ungleich einfacherer Weise als das aus der Geometrie bekannte Princip der Reciprocität gestattet, von jedem Satze in Punktcoordinaten sofort zu einem entsprechenden in Liniencoordinaten überzugehen. Dieser Dualismus ist jedoch nur dann endgiltig hergestellt, wenn sämmtliche Formen eines vollständigen Systems von $f$, wie z. B. des von Gordan Bd. I. dieser Annalen S. 90—121 gegebenen, für $P_f$ oder allgemeiner für $\varkappa P_f - \lambda R_f$ als cubische Grundfunction gebildet sind. Ich habe mich daher dieser Arbeit unterzogen, und theile im Folgenden die Ergebnisse derselben mit.

Die hierher gehörigen, von Aronhold in Borchardt's Journal Bd. 55, S. 199 ohne Beweis aufgestellten Formeln habe ich bereits an anderer Stelle*) entwickelt. Des Zusammenhangs wegen ist diese Entwickelung hier (§ 2.) in vereinfachter Weise wiedergegeben.

In den beiden letzten Paragraphen wird im Anschluss an das Vorhergehende das Nöthigste über das Formensystem der Function $kS_f - lT_f$ und über die Auffindung von Relationen zwischen den Covarianten u. s. w. von $f$ gesagt werden.

## § 1.

### Definitionen.

Wir definiren zunächst das vollständige System der Fundamentalfunction $f$, wie es dieser Abhandlung zu Grunde gelegt ist. Die 34 Formen desselben, theils mit den von Gordan gewählten identisch, theils möglichst einfache Combinationen derselben sind die folgenden.**)

*) Habilitationsschrift: Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. Stuttgart 1869.

**) Die hier angewandte Bezeichnungsweise ist die Aronhold'sche mit den Modificationen, die Clebsch und Gordan in Bd. I. dieser Annalen, S. 156 ff. eingeführt haben. Auch der abgekürzten Schreibweise der Differentialquotienten ist durchgehends dieselbe Bedeutung beizulegen, die sie am letzten Orte hat.

| | |
|---|---|
| 0te Ord. | $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = u_x;$ |
| 1te „ | $f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = a_x^3 = b_x^3 = \cdots;$ |
| 2te „ | $\Theta = a_x b_x (abu)^2;$ |
| 3te „ | $\mathsf{B} = \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad \Delta = 6 \Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33} = \alpha_x^3,$ <br> $S_f = (abc)(abu)(acu)(bcu) = u_s^3;$ |
| 4te „ | $N = \frac{2}{3} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3, \quad \mathsf{H} = a_x \alpha_x (a\alpha u)^2, \quad S = \frac{1}{6} a_s^3,$ <br> $F = (abu)^2 (cdu)^2 (bcu)(adu);$ |
| 5te „ | $\mathsf{B}' = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad L = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - S f u_x,$ <br> $L' = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial S_f}{\partial u_i} - T_f u_x, \quad T_f = a_s b_s (abu)^2 = u_t^3;$ |
| 6te „ | $\mathsf{E} = \Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad \mathsf{Z} = \Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3,$ <br> $\mathsf{K} = \alpha_x \beta_x (\alpha\beta u)^2, \quad T = \frac{1}{6} a_t^3;$ |
| 7te „ | $\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3, \quad \mathsf{B}'' = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3,$ <br> $M = \Sigma \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial u_i} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - 2(2Tf - S\Delta) u_x,$ <br> $M' = \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial T_f}{\partial u_i} - S \,.\, S_f u_x;$ |
| 8te „ | $\mathsf{E}' = \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3, \quad N' = \frac{2}{3} \Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3;$ <br> $\mathsf{Z}' = \Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 + \frac{3}{4} N' u_x,$ <br> $\psi = -\frac{3}{2} \sum_i \sum_\varkappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_i \partial u_\varkappa} \Delta_i \Delta_\varkappa - 2Tf^2 + 3Sf\Delta;$ |
| 9te „ | $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3, \quad \Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial u_2} x_3, \quad \mathsf{B}''' = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3;$ |
| 10te „ | $\mathsf{E}'' = \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3, \quad \mathsf{Z}'' = \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3;$ |
| 11te „ | $\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3;$ |
| 12te „ | $\Omega = \frac{1}{9} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad \Pi = \frac{1}{9} \Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} \frac{\partial F}{\partial u_3}.$ |

In dieser Tafel sind die schon von Clebsch und Gordan in der eben citirten Arbeit (siehe Anm. auf voriger Seite) angewandten Benennungen vollständig beibehalten. Von den Formen $\mathsf{B}$, $\mathsf{B}'$, $\mathsf{B}''$, $\mathsf{B}'''$, sowie $\mathsf{Z}$, $\mathsf{Z}'$, $\mathsf{Z}''$ und $\mathsf{E}$, $\mathsf{E}'$, $\mathsf{E}''$ wird später gezeigt werden, dass sie folgende Gleichungen befriedigen:

$$\mathsf{B}_{\varkappa f - \lambda \Delta} = \varkappa^3 \mathsf{B} - 3\varkappa^2 \lambda \mathsf{B}' + 3\varkappa\lambda^2 \mathsf{B}'' - \lambda^3 \mathsf{B}'''$$
$$\mathsf{E}_{\varkappa f - \lambda \Delta} = G(\varkappa\lambda)(\varkappa^2 \mathsf{E} - 2\varkappa\lambda \mathsf{E}' + \lambda^2 \mathsf{E}'')$$
$$\mathsf{Z}_{\varkappa f - \lambda \Delta} = G(\varkappa\lambda)(\varkappa^2 \mathsf{Z} - 2\varkappa\lambda \mathsf{Z}' + \lambda^2 \mathsf{Z}'').$$

Für die vier noch übrigen Formen

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3, \quad \Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3, \quad \Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}x_3 \text{ und } \Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}x_3$$

besondere Zeichen zu wählen, lag kein Bedürfniss vor.

## § 2.

## Bildung von $S$, $T$, $S_f$, $T_f$, $\Delta$, $P_f$ und $R_f$ für $\varkappa P_f - \lambda R_f$ als Grundform.

Als Ausgangspunkt für sämmtliche aufzustellende Bildungen dienen uns die von Aronhold (Borchardt's Journal, Band 55, S. 188) bewiesenen Gleichungen:

(1) $$\Delta_P = C' S_f = C(TP_f - SR_f)$$

(2) $$S_P = K.\Delta,$$

worin $C$ und $K$ constante, nur von den Coefficienten der Form $f$ abhängige Factoren bedeuten.

Aus der Formel (2) ergiebt sich leicht bis auf einen Zahlenfactor der Werth von $S_p$. Ist nämlich $\chi$ eine beliebige Invariante der Form $f$ und von der Ordnung $\gamma$ in den Coefficienten derselben, so bestehen (Borchardt's Journal, Bd. 73, S. 178) die beiden Beziehungen:

(3) $$6R\chi_P = 6R.\Sigma!\frac{\partial \chi_p}{\partial p_{\varkappa\lambda\mu}}x_\varkappa x_\lambda x_\mu = \Sigma!\frac{\partial \chi_p}{\partial a_{\varkappa\lambda\mu}}b_{\varkappa\lambda\mu}\cdot f - \gamma\chi_P\Delta$$
$$= \delta(\chi_P)\cdot f - \gamma\chi_P.\Delta,$$

($3_a$) $$6R\chi_{\varkappa P - \lambda R} = -\left(\frac{\partial \chi_{\varkappa p - \lambda r}}{\partial \varkappa}\Delta + \frac{\partial \chi_{\varkappa p - \lambda r}}{\partial \lambda}f\right).^{*)}$$

Hält man die Formel (3) für $\chi = S$ mit (2) zusammen, so sieht man, dass

$$\delta(S_p) = 0,$$

und dass daher $S_p$ bis auf einen numerischen Factor $\alpha$ gleich einer Potenz von $R$ ist, d. h. dass

(4) $$S_p = \alpha R^3.$$

Indem man in dieser Gleichung $f$ durch $\varkappa f - \lambda\Delta$, also $P_f$ durch $G^2(\varkappa\lambda)(\varkappa P_f - \lambda R_f)$ u. s. w. ersetzt, bekommt man

($4_a$) $$S_{\varkappa p - \lambda r} = \alpha R^3 G(\varkappa\lambda),$$

und hieraus mit Rücksicht auf (3) und ($3_a$):

(5) $$S_P = -\alpha R^2\Delta^{**)},$$

*) Wie oben bemerkt, gebrauchen wir die Bezeichnungsweise von Clebsch und Gordan; man hat deshalb, um von Aronhold'schen Formeln zu den unserigen überzugehen, in den ersteren $a$ durch $\varkappa$, $b$ durch $-\lambda$, $R$ durch $-R$ und $R_f$ durch $-R_f$ zu ersetzen.

**) Man erinnere sich, dass $S_f = \frac{1}{2}\Sigma!\frac{\partial S}{\partial a_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$.

$$(5_a) \qquad S_{\varkappa P - \lambda R} = -\alpha R^2 \left(\Delta G_1(\varkappa\lambda) + f G_2(\varkappa\lambda)\right).$$

Um den Factor $C$ in (1) zu bestimmen, stellen wir folgende Erwägungen an. Bedeutet $\varphi$ irgend eine Form von $f$ und von der $m^{ten}$ Ordnung in den Coefficienten, so wird $(\delta\varphi)_P$ erhalten, wenn man in $\Sigma!\,\frac{\partial\varphi}{\partial a_{\varkappa\lambda\mu}}\,b_{\varkappa\lambda\mu}$ an Stelle von $a_{\varkappa\lambda\mu} : p_{\varkappa\lambda\mu}$ und somit nach (1) an Stelle von $b_{\varkappa\lambda\mu} : C(Tp_{\varkappa\lambda\mu} - Sr_{\varkappa\lambda\mu})$ treten lässt. Man hat demnach:

$$(6) \qquad (\delta\varphi)_P = C\left(T\Sigma!\,\frac{\partial\varphi_P}{dp_{\varkappa\lambda\mu}}\,p_{\varkappa\lambda\mu} - S\Sigma!\,\frac{\partial\varphi_P}{\partial p_{\varkappa\lambda\mu}}\,r_{\varkappa\lambda\mu}\right)$$
$$= C\left(mT\varphi_P - S\delta(\varphi_P)\right).$$

Für $\varphi = \Delta$ folgt hieraus mit Beziehung auf den Werth von $S_p$:

$$3\alpha R^3 P_f = -C\left[(3RC - ST\delta C)P_f - S^2\delta C R_f\right],$$

oder durch Vergleichung der Coefficienten von $P_f$ und $R_f$ auf beiden Seiten:

$$\delta C = 0 \quad \text{und} \quad C = \left(\pm\sqrt{-\alpha}\right) R.$$

Bezeichnen wir in diesem Ausdruck von $C$ die Wurzel $\sqrt{-\alpha}$, mit dem richtigen Vorzeichen versehen, kurz durch $\beta$, so nimmt jetzt (1) diese Gestalt an:

$$(7) \qquad \Delta_P = \beta R(TP_f - SR_f) = -2R^2 S_f,$$

da der noch unbestimmte Zahlenfactor $\beta$ durch die specielle Annahme $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ ohne Mühe gleich $-2$ (und beiläufig auch $\alpha = -\beta^2 = -4$) gefunden wird.

Durch den Uebergang von $f$ zu $\varkappa f - \lambda\Delta$ erhält man aus der letzten Formel (7) die allgemeinere:

$$(7_a) \qquad \Delta_{\varkappa P - \lambda R} = -2R\left(R_f \,.\, S_1(\varkappa\lambda) + P_f S_2(\varkappa\lambda)\right).$$

In derselben Weise, in der wir aus dem Werthe von $\Delta_P$ für irgend eine Form $\varphi$ von der Ordnung $m$ in den Coefficienten die Relation

$$(8) \qquad (\delta\varphi)_P = -2R\left(mT\varphi_P - S\delta(\varphi_P)\right)$$

abgeleitet haben, folgt aus dem Ausdruck von $\Delta_{\varkappa P - \lambda R}$:

$$(8_a) \qquad (\delta\varphi)_{\varkappa P - \lambda R} = 2R\left(\frac{\partial\varphi_{\varkappa P - \lambda R}}{\partial\lambda}\,S_1(\varkappa\lambda) - \frac{\partial\varphi_{\varkappa P - \lambda R}}{\partial\varkappa}\,S_2(\varkappa\lambda)\right).$$

Für $\varphi = S$ erhält man nach dieser Gleichung:

$$(9) \qquad T_{\varkappa p - \lambda r} = -8R^4 T(\varkappa\lambda),$$

und hieraus nach $(3_a)$ sofort:

$$(10) \qquad T_{\varkappa P - \lambda R} = 8R^3\left(\Delta T_1(\varkappa\lambda) + f T_2(\varkappa\lambda)\right).$$

Aus den nunmehr bekannten Werthen von $S_{\varkappa p - \lambda r}$, $T_{\varkappa p - \lambda r}$ etc. findet man alsdann:

$$
\begin{aligned}
(11)\quad P_{\varkappa P-\lambda R} &= T_{\varkappa p-\lambda r}\, S_{\varkappa P-\lambda R} - S_{\varkappa p-\lambda r}\, T_{\varkappa P-\lambda R}\\
&= 32\, R^6 \left\{ G(\varkappa\lambda)\left(\Delta T_1(\varkappa\lambda) + f T_2(\varkappa\lambda)\right)\right.\\
&\qquad \left. - T(\varkappa\lambda)\left(\Delta G_2(\varkappa\lambda) + f G_1(\varkappa\lambda)\right)\right\} {}^{*)}\\
&= 32\, R^6 \left(G_1(\varkappa\lambda)\, T_2(\varkappa\lambda) - G_2(\varkappa\lambda)\, T_1(\varkappa\lambda)\right)(\varkappa f - \lambda\Delta)\\
&= -\, 32\, R^6 S^2(\varkappa\lambda)\,(\varkappa f - \lambda\Delta)\,.
\end{aligned}
$$

Mit Rücksicht auf diese Formel folgt nach der Gleichung $(8_a)$ für $\varphi = P_f$ die weitere:

$$
(12)\quad R_{\varkappa P-\lambda R} = 64\, R^7 S^2(\varkappa\lambda)\left(S_1(\varkappa\lambda)\,\Delta + S_2(\varkappa\lambda) f\right).{}^{**)}
$$

Der letzte Ausdruck konnte auch noch in anderer Weise abgeleitet werden. Es ist nämlich:

$$
\begin{aligned}
(13)\quad R_{\varkappa P-\lambda R} = S^3_{\varkappa p-\lambda r} - T^2_{\varkappa p-\lambda r} &= -\,64\, R^8\left(G^3(\varkappa\lambda) R + T^2(\varkappa\lambda)\right)\\
&= -\,64\, R^8 S^3(\varkappa\lambda)\,.
\end{aligned}
$$

Mit Beziehung auf diese Gleichung wäre dann aus $(3_a)$ für $\chi = R$ sofort wieder (12) hervorgegangen.

## § 3.

## Vorbereitende Formeln.

Wir werden im Folgenden äusserst häufig ein System von Hülfsformeln nöthig haben, das wir hier im Voraus zusammenstellen, um nachher den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen.

Wenn $\varphi$ irgend eine Form der Grundfunction $f$ von der Ordnung $m$ in den Coefficienten bedeutet und

$$
(1)\quad \varphi_{\varkappa f-\lambda\Delta} = \varphi(\varkappa\lambda) = \varkappa^m\varphi - m\varkappa^{m-1}\lambda\varphi' + \binom{m}{2}\varkappa^{m-2}\lambda^2\varphi'' - \binom{m}{3}\varkappa^{m-3}\lambda^3\varphi''' + \cdots
$$

gesetzt wird, so ist (Borchardt's Journal, Bd. 73, S. 175):

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} = \varphi'(\varkappa\lambda) = \varphi_1(\varkappa\lambda)\, G_2(\varkappa\lambda) - \varphi_2(\varkappa\lambda)\, G_1(\varkappa\lambda)\,,\\
&\varphi''(\varkappa\lambda) = \varphi_{11}(\varkappa\lambda)\, G_2^{\,2}(\varkappa\lambda) - 2\,\varphi_{12}(\varkappa\lambda)\, G_1(\varkappa\lambda)\, G_2(\varkappa\lambda) + \varphi_{22}(\varkappa\lambda)\, G_1^{\,2}(\varkappa\lambda)\\
&\varphi'''(\varkappa\lambda) = \varphi_{111}(\varkappa\lambda)\, G_2^{\,3}(\varkappa\lambda) - 3\,\varphi_{112}(\varkappa\lambda)\, G_2^{\,2}(\varkappa\lambda)\, G_1(\varkappa\lambda)\\
&\qquad + 3\,\varphi_{122}(\varkappa\lambda)\, G_2^{\,2}(\varkappa\lambda)\, G_1(\varkappa\lambda) - \varphi_{222}(\varkappa\lambda)\, G_1^{\,3}(\varkappa\lambda)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Functionen $\varphi'(\varkappa\lambda)$, $\varphi''(\varkappa\lambda)$ etc. sind der mannichfaltigsten

---

*) Für irgend drei binäre Formen $u$, $v$, $w$ von $\varkappa$ und $\lambda$ besteht die evidente Gleichung:

$$
(u_1 v_2 - u_2 v_1)\, w = (u_1 w_2 - u_2 w_1)\, v - (v_1 w_2 - v_2 w_1)\, u\,.
$$

Aus der Annahme $u = \varkappa f - \lambda\Delta$, $v = G(\varkappa\lambda)$, $w = T(\varkappa\lambda)$ folgt unmittelbar die oben benutzte Relation.

**) Demnach ist in dem Ausdrucke von $R_{\varkappa P-\lambda R}$, der Bd. I. dieser Annalen, S. 83 angegeben ist, statt des numerischen Factors 8 die Zahl 16 zu setzen.

Umgestaltungen fähig. Da für irgend zwei binäre Formen $v$ und $w$ von $\varkappa$ und $\lambda$ die Gleichung besteht:

$$(3) \quad v_{11}w_2^2 - 2v_{12}w_1w_2 + v_{22}w_1^2 = -v(w_{11}w_{22} - w_{12}^2) + w[w, v]^2, \text{*)}$$

so bekommt man für $w = G(\varkappa\lambda)$ und $v = \varphi(\varkappa\lambda)$:

$$(4) \qquad \varphi''(\varkappa\lambda) - S(\varkappa\lambda)\varphi(\varkappa\lambda) = G(\varkappa\lambda)\,[G(\varkappa\lambda), \varphi(\varkappa\lambda)]^2.$$

Da ferner irgend drei binäre Formen $u$, $v$, $w$ durch die Identität verbunden sind:

$$(5) \qquad (u_1v_2 - u_2v_1)w = v(u_1w_2 - u_2w_1) - u(v_1w_2 - v_2w_1),$$

so folgt für

$$u = S(\varkappa\lambda), \qquad v = G(\varkappa\lambda), \qquad w = \varphi(\varkappa\lambda):$$

$$(6) \qquad T(\varkappa\lambda)\varphi(\varkappa\lambda) - S(\varkappa\lambda)\varphi'(\varkappa\lambda) = G(\varkappa\lambda)\,[S(\varkappa\lambda), \varphi(\varkappa\lambda)].$$

Ersetzt man in der Formel

$$(7) \quad 2[u, v]\,[w, v] = u\big([v, w]^2 v - [v, v]^2 w\big) - v\big([u, w]^2 v - [u, v]^2 w\big) \text{**)}$$

$u$ durch $S(\varkappa\lambda)$, $v$ durch $G(\varkappa\lambda)$ und $w$ durch $\varphi(\varkappa\lambda)$, und bedenkt, dass durch diese Substitution $(u, v)^2$ identisch verschwindet, so folgt

$$\begin{aligned} 2\,T(\varkappa\lambda)\varphi'(\varkappa\lambda) &= S(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda), G(\varkappa\lambda)]^2 \\ &+ S^2(\varkappa\lambda)\varphi(\varkappa\lambda) - G^2(\varkappa\lambda)\,[S(\varkappa\lambda), \varphi(\varkappa\lambda)], \end{aligned}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (4):

$$(8) \quad S^2(\varkappa\lambda)\varphi(\varkappa\lambda) - 2T(\varkappa\lambda)\varphi'(\varkappa\lambda) + S(\varkappa\lambda)\varphi''(\varkappa\lambda) = G^2(\varkappa\lambda)\,[S(\varkappa\lambda), \varphi(\varkappa\lambda)]^2.$$

Substituirt man dagegen in (7) $T(\varkappa\lambda)$ für $u$, $G(\varkappa\lambda)$ für $v$ und $\varphi(\varkappa\lambda)$ für $w$, so erhält man:

$$(9) \quad T(\varkappa\lambda)\varphi''(\varkappa\lambda) - 2S^2(\varkappa\lambda)\varphi'(\varkappa\lambda) + S(\varkappa\lambda)T(\varkappa\lambda)\varphi(\varkappa\lambda) = G^2(\varkappa\lambda)\,[T(\varkappa\lambda), \varphi(\varkappa\lambda)]^2.$$

Um zu einer Umformung für $\varphi'''(\varkappa\lambda)$ zu gelangen, wenden wir die für zwei beliebige binäre Formen $u$ und $v$ bestehende Relation an:

$$\begin{aligned} (10) \qquad & v_{111}u_2^3 - 3v_{112}u_2^2u_1 + 3v_{221}u_2u_1^2 - v_{222}u_1^3 \\ & = [v, u]^3 u^2 + 2u\,[\Delta, v] - [v, u]\,\Delta \text{***)}, \end{aligned}$$

---

*) Wir werden im Folgenden häufig von der Bezeichnungsweise Gordan's Gebrauch machen, wonach:

$$v_1w_2 - v_2w_1 = [v, w], \qquad v_{11}w_{22} - 2v_{12}w_{12} + v_{22}w_{11} = [v, w]^2 \text{ etc.}$$

**) Bedeuten $u$, $v$, $w$ und $t$ irgend vier binäre Formen von $\varkappa$ und $\lambda$, so geht der Ausdruck $2(u_1v_2 - u_2v_1)(w_1t_2 - w_2t_1)$ vermöge Ersetzung von $u_i$ durch $u_{1i}\varkappa + u_{2i}\lambda$, von $v_i$ durch $v_{1i}\varkappa + v_{2i}\lambda$ etc. über in:

$$2[u, v]\,[w, t] = \begin{vmatrix} u_{11} & v_{11} & -\lambda^2 \\ -2u_{12} & -2v_{12} & -2\varkappa\lambda \\ u_{22} & v_{22} & -\varkappa^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_{22} & t_{22} & -\varkappa^2 \\ w_{12} & t_{12} & \varkappa\lambda \\ w_{11} & t_{11} & -\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [u, w]^2 & [u, t]^2 & u \\ [v, w]^2 & [v, t]^2 & v \\ w & t & 0 \end{vmatrix}.$$

***) Diese Formel und die in (3) aufgestellte gehören einem Systeme von Recursionsformeln an, das als eine Verallgemeinerung des von Clebsch in Bd. III. dieser Annalen, S. 265 mitgetheilten zu betrachten ist, und das wie dieses vermittelst Principien abgeleitet werden kann, auf die ich an anderer Stelle zurückkommen werde.

in welcher $u_{11} u_{22} - u_{12}^2$ kurz mit $\Delta$ bezeichnet worden ist. Für $v = \varphi(\varkappa\lambda)$ und $u = G(\varkappa\lambda)$ folgt hieraus unmittelbar:

$$(11)\qquad \varphi'''(\varkappa\lambda) - S(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)] \\ = 2\,G(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda) + G^2(\varkappa\lambda)]\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^3,$$

Alle diese Formeln haben wir einzeln abgeleitet, um folgendes allgemeine Theorem, das sie sämmtlich als specielle Fälle in sich enthält und überaus einfach bewiesen werden kann, in ein klareres Licht zu stellen:

*Die Formen* $[\varphi(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^{\mu}_{\varkappa=1\ \lambda=0}$, $[\varphi(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]^{\mu}_{\varkappa=1\ \lambda=0}$ *und* $[\varphi(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^{\nu}_{\varkappa=1\ \lambda=0}$ *gehen, gebildet für* $\varkappa f - \lambda\Delta$ *als cubische Grundform, beziehungsweise über in* $G^{\mu-1}(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^{\mu}$, $G^{\mu}(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]^{\mu}$ *und* $G^{\mu}(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^{\nu}$; $\mu \leqq 4$ *und* $\nu \leqq 6$.

Wenn nämlich irgend zwei simultane Covarianten in ihren Graden und Anfangsgliedern übereinstimmen, so sind dieselben identisch.*) Beispielsweise sind

$$\left\{[\varphi(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^{\nu}_{\varkappa=1\ \lambda=0}\right\}_{\varkappa f - \lambda\Delta} \quad \text{und} \quad [\varphi(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^{\nu}\,G^{\nu}(\varkappa\lambda)$$

zwei solche gleichgradige simultane Covarianten von $G(\varkappa\lambda)$ und $\varphi(\varkappa\lambda)$ mit denselben Anfangsgliedern, weshalb sie selbst miteinander zusammenfallen.

Im Späteren wird namentlich noch der besondere Fall $\nu = 3$ zur Anwendung kommen, wonach

$$(12)\qquad T(\varkappa\lambda)\,\varphi'''(\varkappa\lambda) - 3S^2(\varkappa\lambda)\,\varphi''(\varkappa\lambda) + 3S(\varkappa\lambda)\,T(\varkappa\lambda)\,\varphi'(\varkappa\lambda) - T^2(\varkappa\lambda)\,\varphi(\varkappa\lambda) \\ = -\,G^3(\varkappa\lambda)\,[\varphi(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^3.$$

## § 4.

## Berechnung der Formen Θ, H, K für $\varkappa P_f - \lambda R_f$ als cubische Grundform.

Nach der Definition von Θ, H und K ist

$$(1)\qquad \Theta_{\varkappa f - \lambda\Delta} = \Theta(\varkappa\lambda) = \varkappa^2\Theta - 2\varkappa\lambda \mathrm{H} + \lambda^2 \mathrm{K},$$

und daher nach § 3., 2:

$$(2)\qquad \mathrm{H}(\varkappa\lambda) = \Theta_1(\varkappa\lambda)\,G_2(\varkappa\lambda) - \Theta_2(\varkappa\lambda)\,G_1(\varkappa\lambda),$$

$$(3)\qquad \mathrm{K}(\varkappa\lambda) = \Theta_{11}(\varkappa\lambda)\,G_2^2(\varkappa\lambda) - 2\,\Theta_{12}(\varkappa\lambda)\,G_2(\varkappa\lambda)\,G_1(\varkappa\lambda) + \Theta_{22}(\varkappa\lambda)\,G_1^2(\varkappa\lambda) \\ = \Theta G_2^2(\varkappa\lambda) + 2\,\mathrm{H}\,G_2(\varkappa\lambda)\,G_1(\varkappa\lambda) + \mathrm{K}\,G_1^2(\varkappa\lambda).$$

---

*) Der Beweis, den Hermite in Crelle's Journal Bd. 52, S. 7—8 für einen speciellen Fall gegeben, gilt offenbar allgemein für irgend welche simultane Systeme.

Um die Bildung dieser Formen für $\varkappa P_f - \lambda R_f$ durchzuführen, erinnern wir an die zweite Definition von $\mathsf{H}$ durch die Gleichung:

$$(4)\qquad \mathsf{H} = \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - S u_x{}^2.$$

Vermittelst mehrmaliger Anwendung des $\delta$-Prozesses erhält man aus dieser Formel successive die weiteren:

$$(5)\qquad \mathsf{K} + 3S\Theta = \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - 4 T u_x{}^2,$$

$$(6)\qquad T\Theta = \tfrac{1}{18}\Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + \frac{S}{2}(\mathsf{H} - S u_x{}^2),$$

$$(7)\qquad S\Theta = \tfrac{1}{18}\Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \tfrac{1}{18}\Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - T u_x{}^2,$$

von denen die letzte durch Weghebung des Factors $S$ bereits auf ihre einfachste Form gebracht worden ist. Ersetzt man in (7) und (5) $f$ durch $P_f$, so folgen aus ihnen wegen der Werthe von $S_p$, $S_P$ etc.:

$$(9)\qquad \Theta_P = -R\left(\tfrac{1}{3}\Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \tfrac{1}{3}\Sigma \frac{\partial \Delta}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i}\right) = -R(\mathsf{K} - S\Theta)$$

$$(10)\qquad \mathsf{H}_P = \tfrac{1}{2}(\delta\Theta)_P = -2R^2(\mathsf{K}T - 2\mathsf{H}S^2 + \Theta S T)\ (\S\ 2.,\ 8)$$

$$(11)\qquad \mathsf{K}_P = 4R^4(\mathsf{K} + 3S\Theta).$$

Behufs des Uebergangs zu den Formeln für $\varkappa P_f - \lambda R_f$ als Grundform lassen wir in den letzten Gleichungen $\varkappa f - \lambda\Delta$ an Stelle von $f$ treten und erhalten dann nach (4) und (9) in § 3. für $\varphi(\varkappa\lambda) = \Theta(\varkappa\lambda)$:

$$(9_a)\qquad \Theta_{\varkappa P - \lambda R} = -R\,[\Theta(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^2$$

$$(10_a)\qquad \mathsf{H}_{\varkappa P - \lambda R} = -2R^2\,[\Theta(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^2$$

$$\mathsf{K}_{\varkappa P - \lambda R} = 4R^4\{G(\varkappa\lambda)\,[\Theta(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^2 + 4S(\varkappa\lambda)\,\Theta(\varkappa\lambda)\}.\text{*)}$$

## § 5.

## Betrachtung von $F$, $\psi$, $N$, $N'$, $\Omega$, $\Pi$, $L$, $M$ etc.

Gerade wie eine neue Darstellungsweise von $S\Theta$ zum Werthe von $\Theta_P$ führte, so werden wir zur Bildung von $F_P$ durch Aufstellung eines zweiten Ausdrucks für $SF$ gelangen.**) Setzen wir symbolisch $\Theta = \Theta_x{}^2$, so ist nach der Definition von $F$:

$$F = (abu)^2\,(\Theta a u)\,(\Theta b u).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2S$ und ersetzt das symbolische Produkt $2S(\Theta a u)(\Theta b u)$ durch den Werth, welcher vermit-

---

*) Diese Formeln sind zuerst ohne Beweis von Clebsch und Gordan in der schon öfter citirten Abhandlung aufgestellt worden.

**) Eine andere Ableitung von $F_P$ und $\psi_P$ ist in § 7. meiner Habilitationsschrift gegeben.

telst Differentiation der Relation (7) in § 4. sich ergiebt, so bekommt man:

$$2\,SF = (abu)^2 u_t^2 c_t (cau)\,(cbu) + (abu)^2\,(\alpha a u)\,(\alpha b u)\,u_s^2\,\alpha_s\,.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Formel lässt sich ersetzen durch

$$\tfrac{1}{3}\,(abu)\,(cau)\,(cbu)\,u_t^2\,\{(abu)\,c_t - (cbu)\,a_t + (cau)\,b_t\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(abu)\,(cau)\,(cbu)\,(abc)\,u_t^3 = \tfrac{1}{3}\,S_f\,T_f\,.$$

Das zweite Glied ist gleich

$$u_s^2\,(\alpha a u)\,(\alpha b u)\,(abu)\,\{(\alpha b u)\,a_s + (a\alpha u)\,b_s + (ab\alpha)\,u_s\}\,,$$

d. h. gleich einer Summe, deren dritter Term mit $S_f\,T_f$ übereinstimmt, während jeder der beiden ersten den Werth $-\,(abu)^2\,a_{s_1}\,b_s\,u_s^2\,u_{s_1}$ hat. Hiernach bekommt man für $2\,SF$ die Formel:

(1) $$2SF = \tfrac{1}{3}S_f T_f - \tfrac{1}{3}\,\Sigma\Sigma\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,\frac{\partial S_f}{\partial u_i}\,\frac{\partial S_f}{\partial u_\varkappa}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung wieder $f$ durch $P_f$, so ergiebt sich nach den Ausdrücken von $S_P$, $T_P$, $\Theta_P$ und $\Sigma\Sigma\,\frac{\partial^2 \mathsf{K}}{\partial u_i\,\partial u_\varkappa}\,\Delta_i\,\Delta_\varkappa$ *) und nach der Definition von $\psi$ die Relation:

(2) $$3\,F_P = -\,4\,R^2\,\{S\psi + 2\,(T\Delta^2 - 2\,S^2 f\Delta + STf^2)\}\,,$$

und hieraus vermöge § 3., 9 für $\varphi\,(\varkappa\lambda) = \varkappa^2 f^2 - 2\,\varkappa\lambda\Delta f + \lambda^2\Delta^2$:

($2_a$) $$3\,F_{\varkappa P - \lambda R} = -\,4\,R^2\{S(\varkappa\lambda)\,\psi + 2\,(T_{11}(\varkappa\lambda)\,\Delta^2 + 2\,T_{12}(\varkappa\lambda)\,\Delta f + T_{22}(\varkappa\lambda)\,f^2)\}.\text{**)}$$

Indem man in (2) $P_f$ an Stelle von $f$ treten lässt, erhält man:

(3) $$\psi_P = 16\,R^4 S^2\,\{3\,RF + (STS_f^2 - 2\,S^2 S_f T_f + TT_f^2)\} = 16\,R^4 S^2\,\Phi\,,$$

und somit auch:

($3_a$) $$\psi_{\varkappa P - \lambda R} = 16\,R^4 S^2\,(\varkappa\lambda)\,.\,\Phi\,,$$

da $$\Phi_{\varkappa f - \lambda \Delta} = \Phi\,G^1\,(\varkappa\lambda).\text{***)}$$

In gleicher Weise, als $\psi$ und $F$ (oder richtiger $\Phi$) einander dualistisch entsprechen, ist dies auch mit $\Omega$ und $\Pi$, sowie mit $N$ und $N'$ der Fall. Man findet unmittelbar nach der Definition der 4 letzteren Formen:

---

*) Dieser letztere findet sich durch Darstellung in Determinantenform identisch mit $\frac{3}{4}\,\Delta\,.\,\Delta_\Delta = 2\,\Delta\,(S^2 f - \tfrac{2}{3}\,T\Delta)$.

**) Auf diese Form lässt sich die Gleichung (IX) von Aronhold in Borchardt's Journal Bd. 55, S. 191, bringen; übrigens ist in derselben durch einen Druckfehler auf der linken Seite der Factor $G^2$ ausgelassen.

***) In Bd. I. dieser Annalen, S. 57, Z. 1 v. u. ist also $6\,RF$ durch $3\,RF$ zu ersetzen, indem $3\,\delta F$ nicht den Werth $2\,S_f^2$, sondern $4\,S_f^2$ besitzt. Demnach ist auch an Stelle des von Aronhold auf Seite 187 seiner Abhandlung gegebenen Ausdrucks für $3\,F_{\varkappa f - \lambda\Delta}$ der folgende zu schreiben:

$$3\,F_{\varkappa f - \lambda\Delta} = 3\,G\,(\varkappa\lambda)\,F - 4\,(\varkappa^3 + 2\,T\lambda^3)\,\lambda S_f^2 + 12\,\lambda^2\,(\varkappa^2 + S\lambda^2)\,S_f T_f - 12\,\varkappa\lambda^3 T_f^2.$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} N_P &= -\ \ 2\,R^2 S N' \\ N'_P &= \ \ 32\,R^5 S^2 N \\ \Omega_P &= \ \ 96\,R^7 S^3 \Pi \\ \Pi_P &= -\tfrac{128}{3}\,R^7 S^3 \Omega \end{aligned}$$

und indem man hierin $\varkappa f - \lambda\Delta$ an Stelle von $f$ setzt:

$$(4_a)\qquad \begin{aligned} N_{\varkappa P - \lambda R} &= -\ \ 2\,R^2 S\,(\varkappa\lambda)\,N', \\ N'_{\varkappa P - \lambda R} &= \ \ 32\,R^5 S^2 (\varkappa\lambda)\,N, \\ \Omega_{\varkappa P - \lambda R} &= \ \ 96\,R^7 S^3 (\varkappa\lambda)\,\Pi, \\ \Pi_{\varkappa P - \lambda R} &= -\tfrac{128}{3}\,R^7 S^3 (\varkappa\lambda)\,\Omega\,. \end{aligned}$$

Wenn auch nicht selbst Combinanten, so doch enge mit solchen zusammenhängend sind die Formen $L$, $L'$, $M$, $M'$ und $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$ und $\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$, deren Behandlung deshalb hier angeschlossen werden möge.

Auf dem Wege, der von Clebsch und Gordan auf Seite 85 in Bd. I. dieser Annalen angegeben ist, erhält man:

$$(5)\qquad \begin{aligned} L_P &= -8\,R^3 S L', \\ M_P &= \ \ 2\,TRL_P + 16\,R^4 S^2 M' = -16\,R^4 S\,(TL' - SM')\,. \end{aligned}$$

Indem wir in diesen beiden Formeln $P_f$ an die Stelle von $f$ treten lassen, ergiebt sich weiter:

$$(6)\qquad \begin{aligned} L'_P &= 4\,R^3 S L \\ M'_P &= 8\,R^4 S\,(TL - SM)\,. \end{aligned}$$

Durch den bekannten Uebergang von $f$ zu $\varkappa f - \lambda\Delta$ bekommt man aus (5) und (6) nach § 3. (6) die verallgemeinerten Formeln:

$$(5_a)\qquad \begin{aligned} L_{\varkappa P - \lambda R} &= -\ \ 8\,R^3 S\,(\varkappa\lambda)\,(\varkappa L' - \lambda M') \\ M_{\varkappa P - \lambda R} &= \ \ 16\,R^4 S\,(\varkappa\lambda)\,\big(S_1(\varkappa\lambda)\,M' + S_2(\varkappa\lambda)\,L'\big) \end{aligned}$$

$$(6_a)\qquad \begin{aligned} L'_{\varkappa P - \lambda R} &= \ \ 4\,R^3 S\,(\varkappa L - \lambda M) \\ M'_{\varkappa P - \lambda R} &= -\ \ 8\,R^4 S\,(\varkappa\lambda)\,\big(S_1(\varkappa\lambda)\,M + S_2(\varkappa\lambda)\,L\big)\,. \end{aligned}$$

Nicht minder leicht ist die Bildung von $\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3$ etc.

Mit Berücksichtigung der obigen Werthe für $S_P$ und $F_P$ findet man:

$$(7)\qquad \left(\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3\right)_P = -16\,R^4 S\Big(\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} u_3 - 6\,N(Tf - S\Delta)\Big),$$

und hieraus nach § 2. (8), da

$$\delta\left(\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3\right) = 3\,\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2} x_3:$$

$$(8)\quad \left(\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}x_3\right)_P = 32R^5 S\left\{T\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3 - S^2\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3 + 6RfN\right\}.$$

Vermöge des Uebergangs von $f$ zu $\varkappa f - \lambda\Delta$ erhalten wir:

$$(7_a)\quad \left(\Sigma \pm \frac{\partial S_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}x_3\right)_{\varkappa P - \lambda R} = -16R^5 S(\varkappa\lambda)\left\{G_2(\varkappa\lambda)\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3\right.$$
$$\left. + G_1(\varkappa\lambda)\,\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3 + 6N\left(\Delta S_1(\varkappa\lambda) + fS_2(\varkappa\lambda)\right)\right\}.$$

$$(8_a)\quad \left(\Sigma \pm \frac{\partial T_f}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}x_3\right)_{\varkappa P - \lambda R} = -32R^5 S(\varkappa\lambda)\left\{T_2(\varkappa\lambda)\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3\right.$$
$$\left. + T_1(\varkappa\lambda)\,\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3 - 6RG(\varkappa\lambda)(\varkappa f - \lambda\Delta)N\right\}.$$

Aus den Werthen von $\psi_{\varkappa P - \lambda R}$ und $\Delta_{\varkappa P - \lambda R}$ folgen endlich unmittelbar die den letzten Formeln dualistisch gegenüberstehenden:

$$(9)\quad \left(\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3\right)_{\varkappa P - \lambda R}$$
$$= 16R^4 S^2(\varkappa\lambda)\left\{\varkappa\Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}x_3 - \lambda\Sigma \pm \frac{\partial R_f}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}x_3\right\}$$

$$(10)\quad \left(\Sigma \pm \frac{\partial \Delta}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}u_3\right)_{\varkappa P - \lambda R}$$
$$= -32R^5 S^2(\varkappa\lambda)\left\{S_1(\varkappa\lambda)\,\Sigma \pm \frac{\partial R_f}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}x_3 + S_2(\varkappa\lambda)\,\Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}x_3\right\}.$$

worin man die Zwischenformen rechter Hand leicht durch solche des vollständigen Systems — allerdings auf Kosten der Eleganz und Symmetrie — ausdrücken könnte.

## § 6.

## Ueber die Formen $\mathsf{B}^{(i)}$.

Der Definition von $\mathsf{B}$ gemäss ist:

$$\mathsf{B}_{\varkappa f - \lambda \Delta} = \mathsf{B}(\varkappa\lambda) = \varkappa^3\mathsf{B} - \varkappa^2\lambda\left(2\,\mathsf{B}' + \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}u_3\right)$$
$$+ \varkappa\lambda^2\left(2\,\Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}u_3 + \mathsf{B}''\right) - \lambda^3\mathsf{B}'''.$$

Von der hier auftretenden Functionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}u_3$ lässt sich leicht zeigen, dass sie mit $\mathsf{B}'$ identisch ist. Man hat:

$$\mathsf{B}' = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}u_3 = 3\,a_x(\alpha b u)(a\alpha u)^2 b_x^2 + 3\,\alpha_x b_x^2(a b u)(a\alpha u)^2.$$

Wendet man auf den Factor $(\alpha b u)\,a_x$ im ersten Terme der rechten Seite die bekannte Grundidentität für symbolische Rechnung an, so bekommt man, da jedes symbolische Produkt mit einem Factor von der Form $(a\alpha u)(a\alpha v)(a\alpha w)$ identisch verschwindet*):

*) Da $(a\alpha u)^3 = 0$, so folgt durch wiederholte Differentiation, dass für beliebige $u_i$, $v_i$ und $w_i$ auch $(a\alpha u)(a\alpha v)(a\alpha w) = 0$.

$$\mathsf{B}' = 6\alpha_x b_x^2 (a b u)(a \alpha u)^2 = 6\alpha_x b_x (a b u)(a \alpha u) \cdot \{(b \alpha u) a_x + (a b u)\alpha_x + (a \alpha b) u_x\}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung ändert durch die Vertauschung von $a$ mit $b$ sein Zeichen, verschwindet also; das zweite Glied stimmt mit $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3$ überein, und das dritte ist wieder Null, da

$$(a \alpha b)(a \alpha u)(a b u) b_x \alpha_x = (a \alpha b)(a \alpha u) b_x \{(\alpha b u) a_x + (a \alpha u) b_x + (a b \alpha) u_x\},$$

d. h. gleich einer Summe, deren sämmtliche Terme verschwinden, der erste, weil er bei der Vertauschung von $a$ mit $b$ sein Zeichen ändert, die beiden letzten, weil ein jeder derselben einen Factor von der Form $(a \alpha u)^2 (a \alpha v)$ enthält. Aus der so erwiesenen Gleichung

$$(1) \qquad \mathsf{B}' = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3$$

folgt vermittelst des $\delta$-Prozesses:

$$(2) \qquad \mathsf{B}'' = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3,$$

und der Werth von $\mathsf{B}(\varkappa\lambda)$ nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(3) \qquad \mathsf{B}(\varkappa\lambda) = \varkappa^3 \mathsf{B} - 3\varkappa^2\lambda \mathsf{B}' + 3\varkappa\lambda^2 \mathsf{B}'' - \lambda^3 \mathsf{B}'''.$$

Die Ausdrücke $\mathsf{B}'_{\varkappa f - \lambda \Delta} = \mathsf{B}'(\varkappa\lambda)$, $\mathsf{B}''(\varkappa\lambda)$ und $\mathsf{B}'''(\varkappa\lambda)$ stehen also zu $\mathsf{B}(\varkappa\lambda)$ in demselben Verhältnisse, wie die Functionen $\varphi'(\varkappa\lambda)$, $\varphi''(\varkappa\lambda)$ und $\varphi'''(\varkappa\lambda)$ zu $\varphi(\varkappa\lambda)$ in § 3., (2). Indem man die $\mathsf{B}^{(i)}$ auch für die Grundform $\varkappa P_f - \lambda R_f$ zu berechnen sucht, gelangt man zu Ausdrücken wie $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3$, $\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3$ etc., die also vorher zu untersuchen sind.

Da für beliebige $v_i$:

$$(4) \qquad \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} v_i = -4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & v_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & v_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

so ist speciell:

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = -4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 - \frac{\partial S_f}{\partial u_3} x_2 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \frac{\partial S_f}{\partial u_3} x_1 - \frac{\partial S_f}{\partial u_1} x_3 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \frac{\partial S_f}{\partial u_1} x_2 - \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante rechts nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, so zeigt sich $u_x$ multiplicirt in die Produkte aus den einzelnen Determinanten der unvollständigen Systeme:

$$\begin{vmatrix} f_{1,\varkappa+1} & f_{2,\varkappa+1} & f_{3,\varkappa+1} \\ f_{1,\varkappa+2} & f_{2,\varkappa+2} & f_{3,\varkappa+2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial S_f}{\partial u_1} & \frac{\partial S_f}{\partial u_2} & \frac{\partial S_f}{\partial u_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix},$$

und man hat also:

$$(5) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = 4 \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i} f_{i1} & \Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i} f_{i2} & \Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i} f_{i3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\mathsf{B}' \quad [\S\ 4,\ (4)].$$

In ganz derselben Weise folgt nach (4):

$$(6) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 = 4 \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i} f_{i1} & \Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i} f_{i2} & \Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i} f_{i3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

$$= S\mathsf{B} + \mathsf{B}'' \quad [\S\ 4.,\ (5) \text{ und } (7)].$$

Durch wiederholte Anwendung des $\delta$-Prozesses erhält man aus (5) und (6) mit Leichtigkeit die weitern Formeln:

$$(7) \quad \begin{cases} 2\,\Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = 3S\mathsf{B} + \mathsf{B}'' \\ \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial u_1} \frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3 = 3S\mathsf{B}' - \mathsf{B}''' \\ 2\,\Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 = \mathsf{B}''' - S\mathsf{B}' + 4T\mathsf{B} \\ \Sigma \pm \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial u_1} \frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 = 4T\mathsf{B}' - 2S\mathsf{B}''. \end{cases}$$

Die Bildung von $\mathsf{B}_P$, $\mathsf{B}'_P$ etc. lässt sich nunmehr ohne Mühe ausführen. Es ist:

$$(8) \quad \begin{cases} \mathsf{B}_P = & R\left\{\Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_1} \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial u_2} x_3 - S\,\Sigma \pm \frac{\partial P_f}{\partial u_1} \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} x_3\right\} \\ \quad\;\; = & R\,(T\mathsf{B}''' - 3S^2\mathsf{B}'' + 3ST\mathsf{B}' - T^2\mathsf{B}) - R^2\mathsf{B}, \\ \mathsf{B}'_P = & \left(\Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3\right)_P = -2R^3(\mathsf{B}''' - S\mathsf{B}'), \\ \mathsf{B}''_P = & -4R^3\mathsf{B}_P - 16R^4S\,(S\mathsf{B}'' - 2T\mathsf{B}' + S^2\mathsf{B}) \\ \mathsf{B}'''_P = & 8R^6\,(\mathsf{B}''' - 3S\mathsf{B}'). \end{cases}$$

Indem man in diesen Gleichungen $\varkappa f - \lambda\Delta$ an Stelle von $f$ treten lässt, gehen dieselben nach den Formeln des § 3. unmittelbar in die folgenden über:

$$(8_a) \quad \begin{cases} \mathsf{B}_{\varkappa P - \lambda R} = & -R\left\{[\mathsf{B}(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^3 + R\mathsf{B}(\varkappa\lambda)\right\} \\ \mathsf{B}'_{\varkappa P - \lambda R} = & -2R^3\left\{G(\varkappa\lambda)[\mathsf{B}(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^3 + 2\,[\mathsf{B}(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]\right\} \\ \mathsf{B}''_{\varkappa P - \lambda R} = & 4R^4G(\varkappa\lambda)\left\{[\mathsf{B}(\varkappa\lambda),\ T(\varkappa\lambda)]^3 - R\mathsf{B}(\varkappa\lambda)\right\} \\ & \qquad - 16R^4S(\varkappa\lambda)\,[S(\varkappa\lambda),\ \mathsf{B}(\varkappa\lambda)]^2 \\ \mathsf{B}'''_{\varkappa P - \lambda R} = & 8R^6\left\{G^2(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{B}(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^3 - 2T(\varkappa\lambda)\,\mathsf{B}(\varkappa\lambda)\right\}. \end{cases}$$

## § 7.

## Betrachtung der Formen $\mathsf{E}^{(i)}$ und $\mathsf{Z}^{(i)}$.

Mit Rücksicht auf den bekannten Werth von $L_{\varkappa f-\lambda\Delta}$ hat man sofort:

$$\mathsf{E}_{\varkappa f-\lambda\Delta}=G(\varkappa\lambda)\left(\varkappa^2\mathsf{E}-\varkappa\lambda\left(\mathsf{E}'+\Sigma\pm\frac{\partial L}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}u_3\right)+\lambda^2\mathsf{E}''\right).$$

Da aber vermittelst der Formeln (1) und (2) im vorigen Paragraphen leicht gezeigt wird, dass

$$(1)\qquad \mathsf{E}'=\Sigma\pm\frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}u_3=\Sigma\pm\frac{\partial L}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}u_3,$$

so wird der Ausdruck von $\mathsf{E}_{\varkappa f-\lambda\Delta}$ folgender:

$$(2)\qquad \mathsf{E}_{\varkappa f-\lambda\Delta}=G(\varkappa\lambda)\,(\varkappa^2\mathsf{E}-2\varkappa\lambda\mathsf{E}'+\lambda^2\mathsf{E}'')=G(\varkappa\lambda)\,\mathsf{E}(\varkappa\lambda),$$

woraus dann unmittelbar die weiteren fliessen:

$$(3)\quad \mathsf{E}'_{\varkappa f-\lambda\Delta}=G(\varkappa\lambda)\left\{\mathsf{E}_1(\varkappa\lambda)G_2(\varkappa\lambda)-\mathsf{E}_2(\varkappa\lambda)\,G_1(\varkappa\lambda)\right\}=G(\varkappa\lambda)\,\mathsf{E}'(\varkappa\lambda).$$

$$(4)\quad \mathsf{E}''_{\varkappa f-\lambda\Delta}=G(\varkappa\lambda)\left\{\mathsf{E}_{11}(\varkappa\lambda)G_2^{\,2}(\varkappa\lambda)-2\mathsf{E}_{12}(\varkappa\lambda)G_2(\varkappa\lambda)G_1(\varkappa\lambda)+\mathsf{E}_{22}(\varkappa\lambda)G_1^{\,2}(\varkappa\lambda)\right\}$$
$$=G(\varkappa\lambda)\,\mathsf{E}''(\varkappa\lambda).$$

Mit diesem Systeme hängen aufs engste die Formeln für $\mathsf{Z}_{\varkappa P-\lambda R}$, $\mathsf{Z}'_{\varkappa P-\lambda R}$ etc. zusammen. Dieselben ergeben sich durch genauere Betrachtung der Functionaldeterminanten, die aus der evidenten Zwischenform $u_x$, aus $S_f$ (oder $T_f$) und aus $L$ (oder $M$) sich bilden lassen. Vermöge der Gleichungen (5)—(7) des vorigen Paragraphen findet man nach einer kleinen Rechnung:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\Sigma\pm\frac{\partial L}{\partial u_1}\frac{\partial S_f}{\partial u_2}x_3&=\tfrac{1}{2}\mathsf{E}'+\tfrac{4}{3}SNu_x,\\ \Sigma\pm\frac{\partial L}{\partial u_1}\frac{\partial T_f}{\partial u_2}x_3&=\tfrac{1}{4}\mathsf{E}''+\tfrac{1}{4}S\mathsf{E}+\tfrac{4}{3}TNu_x,\end{aligned}$$

und indem man auf diese Beziehungen den $\delta$-Prozess anwendet:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\Sigma\pm\frac{\partial M}{\partial u_1}\frac{\partial S_f}{\partial u_2}x_3&=-\tfrac{1}{4}\mathsf{E}''+\tfrac{3}{4}S\mathsf{E}+\tfrac{4}{3}TNu_x\\ \Sigma\pm\frac{\partial M}{\partial u_1}\frac{\partial T_f}{\partial u_2}x_3&=-\tfrac{1}{2}S\mathsf{E}'+T\mathsf{E}+\tfrac{4}{3}S^2Nu_x^{\,2}.\end{aligned}$$

Hiernach sind die Werthe von $\mathsf{Z}_P$, $\mathsf{Z}_{P'}$ etc. diese:

$$(7)\qquad \begin{aligned}\mathsf{Z}_P&=4R^3S\left\{T\Sigma\pm\frac{\partial L}{\partial u_1}\frac{\partial S_f}{\partial u_2}x_3-S\Sigma\pm\frac{\partial L}{\partial u_1}\frac{\partial T_f}{\partial u_2}x_3\right\}\\ &=-R^3S\left\{S\mathsf{E}''-2T\mathsf{E}'+S^2\mathsf{E}\right\}\\ \mathsf{Z}'_P&=-4R^5S\mathsf{E}'^{*)}\\ \mathsf{Z}''_P&=4R^6S\,(S\mathsf{E}''-2T\mathsf{E}'+S^2\mathsf{E})-8R^6S^2\,(\mathsf{E}''-S\mathsf{E}).\end{aligned}$$

---

*) Man findet nämlich die beiden Ausdrücke:

$$\left(\Sigma\pm\frac{\partial L'}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}u_3\right)_P=-4\mathsf{E}'R^5S-\frac{32}{3}R^5S^2N$$

Lässt man in diesem System $\varkappa f - \lambda\Delta$ an Stelle von $f$ treten, so geht dasselbe mit Rücksicht auf (8) in § 3. für

über in: $\quad \varphi(\varkappa\lambda) = \mathsf{E}(\varkappa\lambda),\ \varphi'(\varkappa\lambda) = \mathsf{E}'(\varkappa\lambda)$ etc.

$$(7_a)\begin{cases} \mathsf{Z}_{\varkappa P - \lambda R} = -R^3 S(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{E}(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]^2, \\ \mathsf{Z}'_{\varkappa P - \lambda R} = -4R^5 S(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{E}(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)], \\ \mathsf{Z}''_{\varkappa P - \lambda R} = -4R^6 S(\varkappa\lambda)\,\{G(\varkappa\lambda)[\mathsf{E}(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]^2 - 2S(\varkappa\lambda)[\mathsf{E}(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)]^2\}. \end{cases}$$

Die Formeln für $\mathsf{E}_{\varkappa P - \lambda R}$, $\mathsf{E}'_{\varkappa P - \lambda R}$ etc. erhält man durch den bekannten Uebergang von $f$ zu $P_f$. Wir schicken zunächst die Werthe von $\mathsf{Z}_{\varkappa f - \lambda\Delta}$, $\mathsf{Z}'_{\varkappa f - \lambda\Delta}$ etc. voraus, die sich wegen

$$\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 - \tfrac{3}{2} N' u_x \text{ (vgl. Anm. auf dieser Seite)}$$

folgendermassen gestalten:

$$(8)\quad \begin{aligned} \mathsf{Z}_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G(\varkappa\lambda)\,(\varkappa^2\mathsf{Z} - 2\varkappa\lambda\mathsf{Z}' + \lambda^2\mathsf{Z}'') = G(\varkappa\lambda)\,\mathsf{Z}(\varkappa\lambda) \\ \mathsf{Z}'_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G(\varkappa\lambda)\,\big(\mathsf{Z}_1(\varkappa\lambda)\,G_2(\varkappa\lambda) - \mathsf{Z}_2(\varkappa\lambda)\,G_1(\varkappa\lambda)\big) = G(\varkappa\lambda)\,\mathsf{Z}'(\varkappa\lambda) \\ \mathsf{Z}''_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G(\varkappa\lambda)\,\big(\mathsf{Z}G_2{}^2(\varkappa\lambda) + 2\mathsf{Z}'G_2(\varkappa\lambda)G_1(\varkappa\lambda) + \mathsf{Z}''G_1{}^2(\varkappa\lambda)\big) = G(\varkappa\lambda)\,\mathsf{Z}''(\varkappa\lambda). \end{aligned}$$

Lässt man jetzt in den Ausdrücken für

$$\Sigma \pm \frac{\partial L}{\partial u_1}\frac{\partial T_f}{\partial u_2} x_3 \text{ und } \Sigma \pm \frac{\partial M}{\partial u_1}\frac{\partial S_f}{\partial u_2} x_3$$

— vgl. (5) und (6) — $P_f$ an Stelle von $f$ treten, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\mathsf{E}''_P + \tfrac{1}{4}S_p\mathsf{E}_P &= -64R^6 S\,(T\mathsf{Z}' - S^2\mathsf{Z}) \\ -\tfrac{1}{4}\mathsf{E}''_P + \tfrac{3}{4}S_p\mathsf{E}_P &= \phantom{-}64R^6 S\,(S\mathsf{Z}'' - T\mathsf{Z}'). \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach $\mathsf{E}_P$ und $\mathsf{E}''_P$, und indem man überdiess in der zweiten Formel des Systemes (7) $f$ durch $P_f$ ersetzt, folgt endlich:

$$(8)\quad \begin{aligned} \mathsf{E}_P &= -16R^3 S\,(S\mathsf{Z}'' - 2T\mathsf{Z} + S^2\mathsf{Z}) \\ \mathsf{E}'_P &= -64R^5 S\mathsf{Z}' \\ \mathsf{E}''_P &= 64R^6 S\,(S\mathsf{Z}'' - 2T\mathsf{Z}' + S^2\mathsf{Z}) - 128R^6 S^2\,(\mathsf{Z}'' - S\mathsf{Z}), \end{aligned}$$

oder verallgemeinert:

$$(8_a)\quad \begin{aligned} \mathsf{E}_{\varkappa P - \lambda R} &= -16R^3 S(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{Z}(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]^2 \\ \mathsf{E}'_{\varkappa P - \lambda R} &= -64R^5 S(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{Z}(\varkappa\lambda),\ G(\varkappa\lambda)] \\ \mathsf{E}''_{\varkappa P - \lambda R} &= 64R^6 S(\varkappa\lambda)\,\{G(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{Z}(\varkappa\lambda),\ S(\varkappa\lambda)]^2 - 2S(\varkappa\lambda)\,[\mathsf{Z}\varkappa\lambda,\ G\varkappa\lambda]^2\}. \end{aligned}$$

---

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_3\right)_P = -4\mathsf{E}R^5 S + \frac{32}{3} R^5 S^2 N$$

und hieraus

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3\right)_P = \left(\Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_3\right)_P - \frac{64}{3} R^5 S^2 N.$$

Ersetzt man hierin $f$ durch $P_f$, so folgt

$$\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 - \frac{3}{2} N' u_x \quad \text{oder}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial L'}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 + \Sigma \pm \frac{\partial M'}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_3 = 2\mathsf{Z}'.$$

## § 8.

### Ueber das Formensystem der Contravariante $kS_f - lT_f$.

Die in den früheren Paragraphen gefundenen Resultate lassen sich leicht auf den Fall übertragen, wenn an Stelle von $\varkappa P_f - \lambda R_f$ die zugehörige Form $kS_f - lT_f$ zu Grunde gelegt wird*).

Da

$$\varkappa P_f - \lambda R_f = (\varkappa T - \lambda S^2) S_f - (\varkappa S - \lambda T) T_f,$$

so braucht man bloss:

$$(1) \qquad \varkappa T - \lambda S^2 = k \qquad \varkappa S - \lambda T = l,$$

oder aufgelöst:

$$(1_a) \qquad lT - kS = R\lambda \qquad lS^2 - kT = R\varkappa$$

zu setzen, um sofort aus einer Formel für $\varphi_{\varkappa P_f - \lambda R_f}$ eine andere für $\varphi_{kS_f - lT_f}$ zu erhalten. Durch die linearen Substitutionen ($1_a$) gehen $G(\varkappa\lambda)$, $S(\varkappa\lambda)$ und $T(\varkappa\lambda)$ in die folgenden Ausdrücke über:

$$G(\varkappa\lambda) = -\frac{1}{R^3}\{k^4(T^2+3S^3) - 16k^3l\,.\,TS^2 + 6k^2l^2(S^3+3T^2)S$$
$$- 8l^3k\,.\,T(S^3+T^2) + l^4(5T^2-S^3)S^3\} = -\frac{1}{R^3}\Gamma(kl),$$

$$S(\varkappa\lambda) = -\frac{1}{R^2}\{k^4\,.\,3S - 4k^3l\,T - 6k^2l^2S^2 + 12l^3k\,.\,ST$$
$$- l^4(S^3+3T^2)\} = -\frac{1}{R^2}\Sigma(kl),$$

$$T(\varkappa\lambda) = \frac{1}{R^4}\{k^6T\,.\,(T^2-9S^3) + 6k^5l(5T^2+3S^3)S^2$$
$$- 15k^4l^2(3T^2+5S^3)TS + 20k^3l^3(T^2+7S^3)T^2$$
$$- 30k^2l^4(5T^2+2S^3)TS^2 + 6kl^5(6T^4+T^2S^3+S^6)S$$
$$+ l^6(5S^3T^2 - 8T^4 - 5S^6)T\} = \frac{1}{R^4}\mathrm{T}(kl).$$

Es lässt sich leicht beweisen, dass $\Gamma(kl)$ und $\mathrm{T}(kl)$ zu $\Sigma(kl)$ in demselben Verhältnisse stehen, als $S(\varkappa\lambda)$ und $T(\varkappa\lambda)$ zu $G(\varkappa\lambda)$. Nach dem Satze, dass durch eine lineare Transformation sich die Hesse'sche Determinante nur um das Quadrat des Substitutionsmodulus ändert, hat man nämlich**)

$$\frac{1}{R^4}\{\Sigma_{11}(kl)\,\Sigma_{22}(kl) - \Sigma_{12}{}^2(kl)\} = \frac{1}{R^2}S_{11}(\varkappa\lambda)\,S_{22}(\varkappa\lambda) - S_{12}{}^2(\varkappa\lambda)$$
$$= \frac{1}{R}G(\varkappa\lambda) = -\frac{1}{R^4}\Gamma(kl),$$

oder

*) Vgl. Cayley in den Philosoph. Transact. Vol. 146 und 151.

**) Die ursprüngliche Function ist im vorliegenden Falle $S(\varkappa\lambda)$, die linear transformirte $-\frac{1}{R^2}\Sigma(kl)$, die Substitutionsdeterminante $\frac{1}{R}$.

(3) $$\Gamma(kl) = -\left\{\Sigma_{11}(kl)\,\Sigma_{22}(kl) - \Sigma_{12}{}^2(kl)\right\}.$$

Da ferner die Fundamentaldeterminante irgend zweier Formen von $\varkappa$ und $\lambda$ sich durch die linearen Transformationen $(1_a)$ — abgesehen von dem Substitutionsmodul — reproducirt, so ist*)

$$\frac{1}{R^5}\left(\Sigma_1(kl)\,\Gamma_2(kl) - \Sigma_2(kl)\,\Gamma_1(kl)\right) = \frac{1}{R}\left(S_1(\varkappa\lambda)G_2(\varkappa\lambda) - S_2(\varkappa\lambda)G_1(\varkappa\lambda)\right)$$
$$= \frac{1}{R}\,T(\varkappa\lambda) = \frac{1}{R^5}\,\mathrm{T}(kl),$$

oder

(4) $$\mathrm{T}(kl) = \Sigma_1(kl)\,\Gamma_2(kl) - \Sigma_2(kl)\,\Gamma_1(kl).$$

Vermittelst der Formeln (2) ist die Bildung der Invarianten $S$, $T$, $R$, sowie sämmtlicher in § 5. behandelter Combinanten für die Grundform $kS_f - lT_f$ geleistet. Auch für die übrigen Formen in § 2. und die meisten in § 5. ist die Uebertragung äusserst einfach, wofern man nur von der eben erwähnten Eigenschaft der Functionaldeterminanten Gebrauch macht, sich bei einer linearen Transformation bloss um den Modulus der Substitution zu ändern.

Beispielsweise haben wir zur Berechnung von $\Delta_{kS_f - lT_f}$ nach § 2., $(7_a)$ den Ausdruck $P_f\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda} + R_f\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}$ durch die Substitutionen $(1_a)$ zu transformiren. Es ist aber**)

$$-\frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial\Sigma(kl)}{\partial l}\,\frac{\partial(kS_f - lT_f)}{\partial k} - \frac{\partial\Sigma(kl)}{\partial k}\,\frac{\partial(kS_f - lT_f)}{\partial l}\right\}$$
$$= \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\,\frac{\partial(\varkappa P_f - \lambda R_f)}{\partial\varkappa} - \frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}\,\frac{\partial(\varkappa P_f - \lambda R_f)}{\partial\lambda}\right\},$$

und somit:

(5) $$\Delta_{kS_f - lT_f} = 2(\Sigma_2(kl)\,S_f + \Sigma_1(kl)\,T_f).$$

Bedeutend mehr Rechnung jedoch erfordert diese Methode der Uebertragung bei $F$, $\Theta$, $\mathrm{H}$ etc., überhaupt bei all den Formen $\varphi$, deren $\varphi_{\varkappa P_f - \lambda R_f}$ noch durch andere simultane Covarianten als durch Fundamentaldeterminanten sich ausdrücken.

Zur Bildung von $F_{kS_f - lT_f}$ wäre z. B. die Transformation von

$$\Delta^2 T_{11}(\varkappa\lambda) + 2\Delta f T_{12}(\varkappa\lambda) + f^2 T_{22}(\varkappa\lambda) = [(\varkappa f - \lambda\Delta)^2,\ T(\varkappa\lambda)]^2$$

durch die Substitutionen $(1_a)$ nöthig. Nach der Fundamentaleigenschaft der Covarianten gelangt man hiedurch zu dem Ausdrucke

$$\mathrm{T}_{11}(kl)(T\Delta - S^2 f)^2 + 2\,\mathrm{T}_{12}(kl)(S\Delta - Tf)(T\Delta - S^2 f) + \mathrm{T}_{22}(kl)(S\Delta - Tf)^2,$$

---

*) Als die Originalformen sind $S(\varkappa\lambda)$ und $G(\varkappa\lambda)$, als die linear transformirten $-\frac{1}{R^2}\,\Sigma(kl)$ und $-\frac{1}{R^3}\,\Gamma(kl)$ zu betrachten.

**) Die ursprünglichen Formen sind jetzt $\varkappa P_f - \lambda R_f$ und $S(\varkappa\lambda)$, welche durch die Substitution $(1^a)$ in $kS_f - lT_f$ und $-\frac{1}{R^2}\,\Sigma(kl)$ übergehen.

aus dem zur endgiltigen Berechnung von $F_{kS_f-lT_f}$ der Factor $R$ auszuscheiden wäre. Noch höhere Potenzen der Discriminante wären bei anderen Formen abzusondern, so dass es besser sein wird, dieselben direkt durch andere Hilfsmittel zu berechnen.

Um wieder ein Beispiel anzuführen, so hat man:

$$\Theta_{kS_f-lT_f} = k^2 (ss_1x)^2 u_s u_{s_1} - 2kl (stx)^2 u_s u_t + l^2 (tt_1x)^2 u_t u_{t_1}.$$

Aus der Formel für $\mathsf{K}_P$ ergiebt sich mit Rücksicht auf den Werth von $\Delta_P$ sofort:

$$(ss_1x)^2 u_s u_{s_1} = \mathsf{K} + 3S\Theta,$$

und hieraus durch den $\delta$ Prozess:

$$(stx)^2 u_s u_t = 2S\mathsf{H} + 2T\Theta$$
$$(tt_1x)^2 u_t u_{t_1} = 4T\mathsf{H} - S(\mathsf{K} - S\Theta),$$

so dass man hat:

$$(6)\quad \Theta_{kS_f-lT_f} = \Theta(3Sk^2 - 4Tkl - S^2l^2) + 2\mathsf{H}(-2Skl + 2Tl^2) + \mathsf{K}(k^2 - Sl^2).$$

Diese Formel befolgt nicht, wie die entsprechende für $\Theta_{\varkappa P-\lambda R}$, eine einfache Regel. Das Gleiche tritt bei der Bildung von höheren Formen für $kS_f - lT_f$ ein; immer scheint mit der Ausscheidung der nöthigen Potenz von $R$ die Gesetzmässigkeit zu verschwinden.

Wir führen daher für diese Functionen die Rechnung, als von geringerem theoretischen Interesse, nicht mehr durch, bemerken übrigens, dass sich die auf die Formen $\mathsf{B}^{(i)}$, $\mathsf{Z}^{(i)}$ und $\mathsf{E}^{(i)}$ bezügliche unmittelbar an die Werthe von $\mathsf{B}_P'''$, $\mathsf{Z}_P'''$ und $\mathsf{E}_P'''$ anknüpfen lässt, und dass in Folge des Ausdrucks von $\Delta_{kS_f-lT_f}$ auch für die Grundfunction $kS_f - lT_f$ ein Theorem, analog dem in § 2., $(8_a)$ enthaltenen, existirt.

## § 9.

## Ueber die Bildung von Relationen zwischen den Formen von $f$.

Bei näherer Betrachtung des in § 1. aufgestellten vollständigen Systems zeigt sich, dass jede alternirende (windschiefe) Form desselben die Functionaldeterminante zweier anderer Formen und der evidenten Zwischenform ist*). Will man also die Quadrate und Produkte dieser alternirenden Formen durch directe darstellen, so hat man bloss die Quadrate und Produkte solcher Functionaldeterminanten zu bilden. Es kann diess dem bekannten Multiplicationstheorem gemäss geschehen, wofern die eine Functionaldeterminante nach den $u_i$ und die andere

---

*) $\Omega$ und $\Pi$ stimmen nach Clebsch und Gordan bis auf Zahlenfactoren mit $\Sigma \pm \dfrac{\partial L}{\partial u_1} \dfrac{\partial M}{\partial u_2} x_3$ und $\Sigma \pm \dfrac{\partial L'}{\partial x_1} \dfrac{\partial M'}{\partial x_2} u_3$ überein.

nach den $x_i$ gebildet ist Der letztere Fall wird im allgemeinen wirklich stattfinden, da wir im Verlaufe der früheren Paragraphen die meisten windschiefen Formen zum Behufe ihrer Bildung für $\varkappa P_f - \lambda R_f$ auf solch doppelte Weise ausgedrückt haben. In der hier angegebenen Art sind z. B. von Clebsch und Gordan $\Omega^2$ und $\Omega N$ durch directe Covarianten ausgedrückt worden. Für Formen, die diese zweifache Darstellungsweise nicht zulassen, muss die eben dargelegte Methode durch andere ersetzt werden. Wenigstens sehr oft leistet diesen Ersatz eine allgemeine Formel, vermöge deren das Quadrat der Functionaldeterminante von irgend zwei ternären Formen $v$, $w$ und der evidenten Zwischenform $u_x$ durch die Producte und Potenzen dieser letzteren selbst ausgedrückt wird. Der Weg, zu derselben zu gelangen, ist im Principe schon von Clebsch in Bd. 63 des Borchardt'schen Journals S. 102 gezeigt worden.

Wenn $W$ eine beliebige homogene Function der drei Variabeln $x_i$ bedeutet, so werden wir im Folgenden nach Vorgang von Clebsch den Coefficienten von $w_{ik}$ in der Determinante $\Sigma \pm w_{11} w_{22} w_{33}$ kurz mit $W_{ik}$ und

$$\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & a_1 & b_1 & c_1 & . \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & a_2 & b_2 & c_2 & . \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & a_3 & b_3 & c_3 & . \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b & c & . \, . \\ \alpha & \beta & \gamma & . \, . \end{pmatrix}_w$$

bezeichnen.

Nach dieser Definition ist für beliebige Werthe der $u_i$ und $a_i$:

$$(\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2 = -\begin{pmatrix} w & a & u \\ w & a & u \end{pmatrix}_w .$$

Indem man in der Determinante rechter Hand die Elemente $w_i$ der vierten Horizontal- und der vierten Verticalreihe zerstört, geht diese Gleichung über in:

$$(1) \quad (\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2 = w \,.\begin{pmatrix} a & u \\ a & u \end{pmatrix}_w + a_x^2 \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}_w - 2 a_x u_x \begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix}_w + u_x^2 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}_w .$$

Ersetzt man hierin die $w_i$ durch die Differentialquotienten $v_i$ einer andern beliebigen homogenen Function $v$, während man an Stelle der $a_i$ die $w_i$ treten lässt, so bekommt man

$$(2) \quad (\Sigma \pm v_1 w_2 u_3)^2 = v \,.\begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v + w^2 \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} - 2 w \,.\, u_x \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}_v + u_x^2 \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix}_v .$$

Die Determinante $\begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v$ stimmt mit $(\Sigma \pm w_1 a_2 u_3)^2$ überein, wenn man nach der Quadrirung $a_i a_k = v_{ik}$ annimmt. Durch diese Substitution geht aber $a_i a_x$ in $v_i$, $a_x^2$ in $v$ und $\begin{pmatrix} a & u \\ a & u \end{pmatrix}_w$ in

$(w_{22}v_{33}+w_{33}v_{22}-2w_{23}v_{23})\,u_1{}^2+2(w_{13}v_{12}+w_{12}v_{13}-w_{11}v_{23}-w_{23}v_{11})\,u_3u_2+\cdots$
d. h. in $-2P_1$ über, wenn wir mit $2P_1$ den Coefficienten von $\lambda$ in $\binom{u}{w}_{v+\lambda w}$ bezeichnen; es wird so aus (1):

$$(3)\quad \begin{pmatrix} w & u \\ w & u \end{pmatrix}_v = -v\binom{u}{u}_w - 2P_1 w - 2u_x\binom{v}{u}_w - u_x^2\,\Sigma\Sigma W_{ik}\,v_{ik},$$

und somit aus (2):

$$(4)\quad (\Sigma \pm v_1 w_2 u_3)^2 = v^2\binom{u}{u}_w - 2v.wP_1 + w^2\binom{u}{u}_v - 2u_x\left\{v\binom{v}{u}_w + w\binom{w}{u}_v\right\}$$
$$-u_x^2\left\{v\,.\,\Sigma\Sigma W_{ik}\,v_{ik} + \Sigma\Sigma V_{ik}\,w_iw_k\right\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung sich bei der Vertauschung von $v$ mit $w$ nicht ändert, so muss das gleiche auch auf der rechten stattfinden, und es kann also in derselben

$$(5)\quad v\Sigma\Sigma W_{ik}v_{ik} + \Sigma\Sigma V_{ik}w_iw_k = w\Sigma\Sigma V_{ik}w_{ik} + \Sigma\Sigma W_{ik}v_iv_k{}^{*})$$

gesetzt werden.

Nimmt man beispielsweise in (4) für $v$ die ternäre cubische Grundform $f$ und für $w$ ihre Determinante $\Delta$, so folgt sofort

$$(6)\quad N^2 = -18\,(\mathsf{K}f^2 - 2\mathsf{H}f\Delta + \Theta\Delta^2) + 6u_x\,(2(\Delta L - fM) + \psi u_x$$

und durch Uebergang von $f$ zu $P_f$:

$$(7)\quad N'^2 = 18\left\{\mathsf{K}SS_f{}^2 - 4\mathsf{H}P_fS_f + \Theta\,(S^2S_f{}^2 - 4TS_fT_f + ST_f{}^2)\right\}$$
$$+ 24u_x\left(2(L'R_f - M'P_f) + \Phi u_x\right).$$

Die Gleichung (4) wird zwar das gesuchte Resultat nicht stets so direkt liefern, wie in dem eben behandelten Beispiele für $N$; immerhin aber liefert sie die nöthige Grundlage, von der aus die Entwicklung der aufzustellenden Relation keine principiellen Schwierigkeiten mehr darbietet.

Ueberdiess kann man durch Anwendung des $\delta$-Processes die Anzahl der bereits bekannten Formeln bedeutend vermehren und vermittelst der in dieser Arbeit gegebene Resultate zu jeder Formel sofort die ihr dualistisch entsprechende auffinden.

---

*) Siehe Hesse in Crelles Journal Bd. 52. S. 100. Auch die Formeln (3) und (4) können als Verallgemeinerungen der Resultate betrachtet werden, die Hesse im 41. Bde. des citirten Journals S. 292 gegeben hat.

Tübingen, Ende März 1871.

# Ueber einige allgemeine Theoreme aus der neueren Algebra.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Die grosse Analogie, die zwischen der Theorie der binären biquadratischen und ternären cubischen Formen besteht, hat ihren Grund in einigen allgemeinen Sätzen, die hier entwickelt werden sollen.

Es sei

$$f=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^p=ax_1^p+pbx_1^{p-1}x_2+\binom{p}{2}cx_1^{p-2}x_2^2+\cdots$$

eine beliebig gegebene Grundform $p^{\text{ten}}$ Grades von irgend einer Anzahl Variabeln und

$$\Delta=\alpha x_1^p+p\beta x_1^{p-2}x_2+\binom{p}{2}\gamma x_1^{p-2}x_2^2+\cdots.$$

eine Covariante derselben von gleichem Grade und von der Ordnung $m$ in den Coefficienten. Ferner bestehe die Relation

$$\delta\Delta=\frac{\partial\Delta}{\partial a}\alpha+\frac{\partial\Delta}{\partial b}\beta+\frac{\partial\Delta}{\partial c}\gamma+\cdots=mSf, \tag{1}$$

mit $S$ eine gewisse Invariante von $f$ bezeichnet.

Das erste der oben erwähnten Theoreme sagt dann aus, dass

$$\Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial G}{\partial\lambda}f+\frac{\partial G}{\partial\varkappa}\Delta\right), \tag{2}$$

worin $G$ eine rationale ganze Function $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades der beliebigen Constanten $\varkappa$ und $\lambda$ bedeutet.

*Beweis.* Enthält irgend eine Form $\varphi$ die Coefficienten von $f$ in der Ordnung $q$, und setzt man

$$\varphi_{\varkappa f-\lambda\Delta}=\varphi(\varkappa\lambda)=\varkappa^q\varphi-q\varkappa^{q-1}\lambda\varphi'+\binom{q}{2}\varkappa^{q-2}\lambda^2\varphi''-\cdots, \tag{3}$$

so sind je drei aufeinanderfolgende $\varphi^{(i)}$ nach ihrem bekannten Bildungsgesetz und nach (1) durch die Recursionsformel verbunden

$$(q-k)\,\varphi^{(k+1)}=\delta\varphi^{(k)}-mkS\varphi^{(k-1)}\ ^{*}). \tag{4}$$

Für $\varphi=\Delta$ ergiebt sich hiernach sofort, dass $\Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}$ von der Gestalt:

$$\Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}=Bf+A\Delta. \tag{5}$$

---

*) Für $k=0$ und $k=q$ hat man also

$$\delta\varphi=q\varphi' \quad\text{und}\quad \delta\varphi^{(q)}=mqS\varphi^{(q-1)}.$$

In bekannter Weise leitet man aus dieser Gleichung die weitere ab:

$$(6)\qquad (\delta\varphi)_{\varkappa f-\lambda\Delta} = B\frac{\partial\varphi(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial\varphi(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}.$$

Setzt man hierin $\varphi = \Delta$, so folgt wegen (1) und (5):

$$(7)\qquad mS(\varkappa\lambda)(\varkappa f - \lambda\Delta) = f\left(B\frac{\partial B}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right) + \Delta\left(B\frac{\partial A}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial A}{\partial\lambda}\right).$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten von $f$ und $\Delta$ auf beiden Seiten bekommt man dann:

$$mS(\varkappa\lambda)\varkappa = B\frac{\partial B}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial B}{\partial\lambda},$$

$$-mS(\varkappa\lambda)\lambda = B\frac{\partial A}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial A}{\partial\lambda},$$

und durch Elimination von $S(\varkappa\lambda)$:

$$B\left(\frac{\partial A}{\partial\varkappa}\varkappa + \frac{\partial B}{\partial\varkappa}\lambda\right) - A\left(\frac{\partial A}{\partial\lambda}\varkappa + \frac{\partial B}{\partial\lambda}\lambda\right) = 0.$$

Diese Relation kann, $\varkappa A + \lambda B$ durch $G$ bezeichnet, auch geschrieben werden:

$$B\frac{\partial G}{\partial\varkappa} - A\frac{\partial G}{\partial\lambda} = 0.$$

Da überdiess

$$\varkappa\frac{\partial G}{\partial\varkappa} + \lambda\frac{\partial G}{\partial\lambda} = (m+1)\,G,$$

so erhalten wir durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen nach $\frac{\partial G}{\partial\varkappa}$ und $\frac{\partial G}{\partial\lambda}$ die zu erweisenden Ausdrücke

$$B = \frac{1}{m+1}\frac{\partial G}{\partial\lambda} = G_2 \qquad A = \frac{1}{m+1}\frac{\partial G}{\partial\varkappa} = G_1.$$

An die Existenz der Function $G(\varkappa\lambda)$ lassen sich weitere Schlüsse in ganz derselben Weise knüpfen, wie dies bereits in der Theorie der binären biquadratischen und ternären cubischen Formen geschehen ist.

Zunächst folgt mit Benutzung der Werthe von $B$ und $A$ aus (7)

$$(8)\qquad S(\varkappa\lambda) = -(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)$$

und aus (6)

$$\varphi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} = \varphi_1(\varkappa\lambda)\,G_2 - \varphi_2(\varkappa\lambda)\,G_1.$$

Die letzte Formel lässt sich in folgender Weise erweitern. Sind $\mu$ und $\nu$ beliebige Constanten, so hat man wie in (3):

$$(9)\qquad \varphi_{\mu f-\nu\Delta} = \varphi(\mu\nu) = \mu^q\varphi - q\mu^{q-1}\nu\varphi' + \binom{q}{2}\mu^{q-2}\nu^2\varphi'' - \cdots$$

Wir führen in dieser Gleichung für die Veränderlichen $\mu$ und $\nu$ zwei neue $\varrho$ und $\sigma$ durch die linearen Substitutionen ein:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \mu &= \varrho\varkappa - G_2\sigma \\ \nu &= \varrho\lambda + G_1\sigma. \end{aligned}$$

Da $\mu f - \nu\Delta = \varrho(\varkappa f - \lambda\Delta) - \sigma\Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}$, so wird durch diese Transformation $\varphi_{\mu f-\nu\Delta}$ gleich dem Werthe von $\varphi_{\varrho f-\sigma\Delta}$, wenn darin

die Coefficienten von $\varkappa f - \lambda \Delta$ an die Stelle derer von $f$ treten, d. h. $\varphi(\mu\nu)$ geht über in den Ausdruck

$$(11)\quad \varrho^q \varphi_{\varkappa f - \lambda \Delta} - q \varrho^{q-1} \sigma \varphi'_{\varkappa f - \lambda \Delta} + \binom{q}{2} \varrho^{q-2} \sigma^2 \varphi''_{\varkappa f - \lambda \Delta} - \binom{q}{3} \varrho^{q-3} \sigma^3 \varphi'''_{\varkappa f - \lambda \Delta} \cdots$$

Die rechte Seite der Gleichung (9) dagegen wird identisch mit

$$(12)\quad \varrho^q \varphi(\varkappa\lambda) - q \varrho^{q-1} \sigma \varphi'(\varkappa\lambda) + \binom{q}{2} \varrho^{q-2} \sigma^2 \varphi''(\varkappa\lambda) - \binom{q}{3} \varrho^{q-3} \sigma^3 \varphi'''(\varkappa\lambda) + \cdots,$$

wofern wir der Kürze wegen setzen:

$$(13)\quad \begin{aligned} \varphi'(\varkappa\lambda) &= \varphi_1(\varkappa\lambda)\, G_2 - \varphi_2(\varkappa\lambda)\, G_1, \\ \varphi''(\varkappa\lambda) &= \varphi_{11}(\varkappa\lambda)\, G_2^2 - 2\varphi_{12}(\varkappa\lambda)\, G_2 G_1 + \varphi_{22}(\varkappa\lambda)\, G_1^2, \\ \varphi'''(\varkappa\lambda) &= \varphi_{111}(\varkappa\lambda)\, G_2^3 - 3\varphi_{112}(\varkappa\lambda)\, G_2^2 G_1 + 3\varphi_{122}(\varkappa\lambda)\, G_2 G_1^2 - \varphi_{222}(\varkappa\lambda)\, G_1^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Vergleicht man jetzt die Coefficienten der für alle Werthe von $\varrho$ und $\sigma$ identischen Functionen (11) und (12), so zeigt sich, dass $\varphi'(\varkappa\lambda)$, $\varphi''(\varkappa\lambda)$, $\varphi'''(\varkappa\lambda)$ ... in den Gleichungen (12) dieselbe Bedeutung wie $\varphi'_{\varkappa f - \lambda \Delta}$, $\varphi''_{\varkappa f - \lambda \Delta}$, $\varphi'''_{\varkappa f - \lambda \Delta}$ ... haben.

Wenn insbesondere $\varphi'$, d. h. $\delta\varphi$ verschwindet, so muss nach der ersten der Relationen (13) $\varphi$ selbst von der Gestalt sein:

$$(14)\quad \varphi(\varkappa\lambda) = \varphi \,.\, G^n.$$

Diese Gleichung dient wieder ihrerseits dazu, das System (3) und (14) zu verallgemeinern.

Es seien nämlich $\Phi$, $\Phi'$, $\Phi''$ ... $\Phi^{(q)}$ eine Anzahl Formen von $f$, die zu je dreien durch dieselbe Recursionsformel (4) verbunden sein mögen, wie $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ ... $\varphi^{(q)}$*). Setzen wir

$$\Phi \varphi^{(q)} - q \Phi' \varphi^{(q-1)} + \binom{q}{2} \Phi'' \varphi^{(q-2)} \cdots + (-1)^q\, \Phi^{(q)} \varphi = X,$$

so ist offenbar

$$\delta X = 0,$$

und daher nach (14)

$$(15)\quad X_{\varkappa f - \lambda \Delta} = X \,.\, G^{r+1},$$

wenn $(m+1)(r+1) - mq$ die Ordnung von $\Phi$ bedeutet.

Eine zweite Gleichung für $X$ ergiebt sich aus der Erwägung, dass $X$ eine simultane Invariante von $\varphi(\mu, \nu)$ in (9) und von dem Ausdruck

$$\Phi(\mu\nu) = \mu^q \Phi - q \mu^{q-1} \nu \Phi' + \binom{q}{2} \mu^{q-2} \nu^2 \Phi'' - \cdots$$

ist. Transformiren wir die Functionen $\varphi(\mu, \nu)$ und $\Phi(\mu, \nu)$ durch die Substitutionen (10), so ist also nach der Fundamentaleigenschaft der Invarianten:

---

*) $\Phi$ braucht nicht von der Ordnung $q$ zu sein, wie wir dies von $\varphi$ ausdrücklich voraussetzten und der Einfachheit halber fernerhin voraussetzen wollen.

$$(16)\quad \Phi(\varkappa\lambda)\varphi^{(q)}(\varkappa\lambda) - q\Phi'(\varkappa\lambda)\varphi^{(q-1)}(\varkappa\lambda) + \binom{q}{2}\Phi''(\varkappa\lambda)\varphi^{(q-2)}(\varkappa\lambda)\cdots = X.G^q,$$

wenn $\Phi'(\varkappa\lambda)$, $\Phi''(\varkappa\lambda)$ etc. die Bedeutung haben:

$$(17)\quad \begin{aligned} \Phi'(\varkappa\lambda) &= \Phi_1(\varkappa\lambda)\,G_2 - \Phi_2(\varkappa\lambda)\,G_1 \\ \Phi''(\varkappa\lambda) &= \Phi_{11}(\varkappa\lambda)\,G_2^2 - 2\Phi_{12}(\varkappa\lambda)\,G_2G_1 + \Phi_{22}(\varkappa\lambda)\,G_1^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Combination der Formeln (15) und (16) folgt nunmehr:

$$(20)\quad \begin{aligned} &\left(\Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta} - G^{r+1-q}.\Phi(\varkappa\lambda)\right)\varphi^{(q)}(\varkappa\lambda) - q\left(\Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} - G^{r+1-q}.\Phi'(\varkappa\lambda)\right)\varphi^{(q-1)}(\varkappa\lambda) \\ &+ \binom{q}{2}\left(\Phi''_{\varkappa f-\lambda\Delta} - G^{r+1-q}.\Phi''(\varkappa\lambda)\right)\varphi^{(q-2)}(\varkappa\lambda) - \cdots = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist $\varphi$ eine beliebige ganze homogene Function $q^{\text{ter}}$ Ordnung der Coefficienten von $f$, während $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$ u. s. w. ihre Definition durch die Identität (3) finden. Ersetzt man $\varphi$ successive durch $(q+1)$ verschiedene solche Ausdrücke, so gehen aus (20) eben so viele Gleichungen hervor, die in Bezug auf die Grössen

$$\Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta} - G^{r+1-q}\,\Phi(\varkappa\lambda),\ \Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} - G^{r+1-q}\,\Phi'(\varkappa\lambda),\ \ldots\Phi^{(q)}_{\varkappa f-\lambda\Delta} - G^{r+1-q}\,\Phi^{(q)}(\varkappa\lambda)$$

linear und homogen sind. Da man offenbar $(q+1)$ Functionen $\varphi$ so wählen kann, dass die Determinante dieser linearen Gleichungen nicht verschwindet*), so müssen die Unbekannten derselben gleich Null sein, d. h. es müssen die Relationen bestehen:

$$(21)\quad \begin{aligned} \Phi_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^{r+1-q}\,\Phi(\varkappa\lambda) \\ \Phi'_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^{r+1-q}\,\Phi'(\varkappa\lambda) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Phi^{(q)}_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^{r+1-q}\,\Phi^{(q)}(\varkappa\lambda). \end{aligned}$$

Im speciellen Falle zweier Functionen $\Phi$, $\Phi'$ geben die Recursionsformeln (4)

---

*) Für die $(q+1)$ verschiedenen Functionen $\varphi$ kann man z. B.

$$f^q(y_1, y_2\cdots y_n)\quad,\quad f^q(z_1, z_2\cdots z_n)\quad,\quad f^q(t_1, t_2\cdots t_n)\cdots,$$

d. h. die Ausdrücke nehmen, die sich ergeben, wenn man in der $q^{\text{ten}}$ Potenz von $f$ das System der Variabeln $x_i$ durch irgend $(q+1)$ von einander verschiedene $y_i$, $z_i$, $t_i$ u. s. w. ersetzt. Damit die oben erwähnte Determinante nicht verschwinde, genügt es die ganz willkürlichen $y_i$, $z_i$, $t_i\cdots$ so zu bestimmen, dass die Determinante $(q+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\begin{vmatrix} f^q(y) & f^{q-1}(y)\,\Delta(y) & \cdots & \Delta^q(y) \\ f^q(z) & f^{q-1}(z)\,\Delta(z) & \cdots & \Delta^q(z) \\ f^q(t) & f^{q-1}(t)\,\Delta(t) & \cdots & \Delta^q(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \left(f(y)\,\Delta(z) - f(z)\,\Delta(y)\right)\left(f(z)\,\Delta(t) - f(t)\,\Delta(z)\right)\left(f(t)\,\Delta(y) - f(y)\,\Delta(t)\right)\cdots$$

von Null verschieden ist.

(22) $$\delta\Phi = \Phi' \qquad \delta\Phi' = mS\Phi.$$

und die Gleichungen (21)

(22$_a$) $$\begin{aligned} \Phi_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G^r(\varkappa\Phi - \lambda\Phi') \\ \Phi'_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G^r(G_1\Phi' + G_2\Phi), \end{aligned}$$

wenn $\Phi$ die Coefficienten von $f$ in der Ordnung $(m+1)r+1$ enthält. Für ternäre cubische Formen sind die Relationen (22$_a$) bereits von den Herren Clebsch und Gordan in Bd. I. dieser Annalen, Seite 60 Anmerkung, ausgesprochen worden.

Die lineare Substitution (10) dient auch noch zum Beweise vieler anderer Theoreme. Beispielsweise möge hier vermittelst derselben zum Schlusse ein Satz abgeleitet werden, der als die wahre Quelle der in § 3. der vorhergehenden Abhandlung gegebenen Formeln anzusehen ist.

Es sei $\chi$ eine beliebige ganze homogene Function $n^{\text{ter}}$ Ordnung der Coefficienten von $f$, und man setze nach Analogie des Früheren:

(23) $$\chi_{\mu f - \nu\Delta} = \chi(\mu\nu) = \mu^n\chi - n\mu^{n-1}\nu\chi' + \binom{n}{2}\mu^{n-2}\nu^2\chi'' - \cdots$$

Wendet man auf $\varphi(\mu\nu)$ in (9) und auf $\chi(\mu\nu)$ die Transformation (10) an, so geht $\varphi(\mu\nu)$ in den Ausdruck (11) und $\chi(\mu\nu)$ in

$$[\chi(\varrho,\sigma)]_{\varkappa f - \lambda\Delta} = \varrho^n\chi_{\varkappa f - \lambda\Delta} - n\varrho^{n-1}\sigma\chi'_{\varkappa f - \lambda\Delta} + \binom{n}{2}\varrho^{n-2}\sigma^2\chi''_{\varkappa f - \lambda\Delta} - \cdots$$

über. Für die simultane Covariante $(\varphi(\mu\nu), \chi(\mu\nu))^s$ *) hat man daher

$$(\varphi(\mu\nu), \chi(\mu\nu))^s\, G^s(\varkappa\lambda) = ([\varphi(\varrho,\sigma)]_{\varkappa f - \lambda\Delta}, [\chi(\varrho\sigma)]_{\varkappa f - \lambda\Delta})^s,$$

wo die Uebereinanderschiebung rechts in Bezug auf die Variabeln $\varrho$ und $\sigma$ zu bilden ist. Durch die Annahme $\varrho = 1$, $\sigma = 0$ wird die linke Seite der letzten Gleichung identisch mit $(\varphi(\varkappa\lambda), G(\varkappa\lambda))^s$, während die rechte Seite den Werth $[(\varphi(\varrho,\sigma), \chi(\varrho,\sigma))^s_{\varrho=1,\,\sigma=0}]_{\varkappa f - \lambda\Delta}$ annimmt.

In Worten:

*Die Function* $(\varphi(\varrho,\sigma), \chi(\varrho,\sigma))^s_{\varrho=1,\,\sigma=0}$, *gebildet für* $\varkappa f - \lambda\Delta$, *stimmt mit* $(\varphi(\varkappa\lambda), \chi(\varkappa\lambda))^s \cdot G^s(\varkappa\lambda)$ *überein.*

*) Es ist darunter im Gordan'schen Sinn die $s^{\text{te}}$ Uebereinanderschiebung der binären Formen $\varphi(\mu\nu)$ und $\chi(\mu\nu)$ verstanden; $s$ kann natürlich jede ganze Zahl sein, welche die kleinere der beiden Zahlen $p$ und $q$ nicht übersteigt.

Tübingen, im April 1871.

# Resultanten von Covarianten.

Von Paul Gordan in Giessen.

---

Die Invarianten einer binären Form

$$f \left(\text{symbolisch } (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n = b_x^n \ldots\right)$$

sind ganze Functionen ihrer Fundamental-Invarianten; in den meisten Fällen hält es jedoch sehr schwer, sie als solche darzustellen. — Es ist mir in einigen wenigen Fällen gelungen, Resultanten von Covarianten durch einfachere Formen auszudrücken. Hierbei sei es gestattet, einige abkürzende Bezeichnungen einzuführen. Differentiirt man die Form $f$ mehrmals nach den Variabeln $x$ und ersetzt man die Incremente durch neue Variabeln $y$, dann gelangt man zu dem Ausdruck $a_x^{n-\varkappa} a_y^{\varkappa}$, welchen ich durch $f_{y^\varkappa}$ bezeichnen und die $\varkappa^{\text{te}}$ Polare von $f$ nennen will. — Die Resultante zweier Formen $f$ und $\varphi$ soll, *abgesehen von numerischen Factoren*, durch $R(f, \varphi)$ und die Discriminante von $f$ durch $D(f)$ bezeichnet werden.

1ster Satz.

*Es seien $f$ und $\varphi$ zwei Formen $n^{\text{ten}}$ Grades, $y$ und $z$ beliebige Grössen und*

$$y_1 f + y_2 \varphi = \psi, \qquad z_1 f + z_2 \varphi = \chi,$$

*dann hat die Resultante der Formen $\psi$ und $\chi$ den Werth:*

$$\text{(I)} \qquad R(\psi, \chi) = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^n R(f, \varphi) = (yz)^n R(f, \varphi).$$

Beweis.

Aus den beiden Formeln:

$$y_1 f + y_2 \varphi = \psi \quad \text{und} \quad z_2 \psi - y_2 \chi = (yz) f$$

ergeben sich die Gleichungen:

$$y_2^n R(f, \varphi) = R(f, \psi) \quad \text{und} \quad y_2^n R(\psi, \chi) = (yz)^n R(f, \psi),$$

aus denen die gesuchte Beziehung hervorgeht.

Hat die Gleichung $f = 0$ eine Doppelwurzel $x$, dann wird die Discriminante $D(f) = 0$. Für diese Doppelwurzel verschwinden die Differentalquotienten $f_1$ und $f_2$ von $f$ [deren Resultante $D(f)$ ist] und die Polare $f_y$. Ist ferner $t = (f, \psi)$ die Functionaldeterminante von $f$ mit einer beliebigen Form $\psi$ und:

$$\varphi = (ff)^2 = a_x^{n-2} b_x^{n-2} (ab)^2$$

die Hesse'sche Form von $f$, dann genügt unsere Doppelwurzel $x$ noch den 3 Gleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \varphi \cdot (xy)^2 = 2f \cdot f_{y^2} - 2 f_y \cdot f_y$$

$$\text{(III)} \qquad \varphi_y \cdot (xy)^2 = f \cdot f_{y^3} - f_y \cdot f_{y^2}$$

$$\text{(IV)} \qquad t \cdot (xy) = f \cdot \psi_y - \psi \cdot f_y .$$

Hieraus kann man den Schluss ziehen, dass die Resultanten:

$$R(f, f_y); \qquad R(f, t); \qquad R(f, \varphi)$$

und die Discriminante $D(\varphi)$ die Discriminante $D(f)$ zum Factor besitzen. Im Folgenden sollen die übrigen Factoren dieser Formen aufgesucht werden.

2ter Satz.

*Die Resultante der Formen $f$ und $f_y$ hat den Werth:*

$$\text{(V)} \qquad R(f, f_y) = D(f) \cdot f(y) .$$

Beweis.

Aus der Gleichung:

$$f \cdot (yz) = f_y \cdot (xz) - f_z (xy)$$

folgt die Formel:

$$R(f, f_y) \cdot (yz)^{n-1} = R(f_y, f_z) \cdot f(y) .$$

Da ferner nach F. (I):

$$R(f_y, f_z) = (yz)^{n-1} D(f)$$

ist, so erhält man die obige Beziehung.

3ter Satz.

*Die Resultante der Functionaldeterminante $t = (f, \psi)$ und der Form $f$ hat den Werth:*

$$\text{(VI)} \qquad R(t, f) = R(f, \psi) D(f) .$$

Beweis folgt aus Formel (IV) und Formel (V).

4ter Satz.

*Die Resultante der Hesse'schen Form $\varphi$ mit der Form $f$ hat den Werth:*

$$\text{(VII)} \qquad R(f, \varphi) = D^2(f) .$$

Beweis.

Aus der Formel (II): $\varphi \cdot (xy)^2 = f \cdot f_{y^2} - f_y \cdot f_y$ ergiebt sich die Gleichung:

$$R(f, \varphi) f^2(y) = R^2(f, f_y) ,$$

aus welcher man mit Hülfe von Formel (V) die gesuchte Relation ableiten kann.

5[ter] Satz.

*Ist t die Functionaldeterminante der Form f mit ihrer Hesse'schen Form φ, dann hat die Resultante von t und f den Werth:*

(VIII) $$R(t,f) = D^3(f).$$

Beweis folgt aus den Formeln (VI) und (VII).

Für die Discriminante der Hesse'schen Form, welche (s. oben) gleichfalls den Factor $D(f)$ besitzt, giebt es keinen allgemeinen Ausdruck in einfachen Invarianten. Indess kann man, wenn die Form $f$ den Grad 4 oder 5 hat, noch den anderen Factor bestimmen. Bezeichnet man die Covarianten:

$$(ff)^4 = i \qquad (ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2\,a_x^{n-4}\,b_x^{n-4}\,c_x^{n-4} = j$$

durch $i$ und $j$, dann kann man die Formel ableiten:

(IX) $$(\varphi\varphi)^2 = \frac{j}{3}\,f - \frac{1}{2\,.\,2n-5}\,i\varphi\,.$$

Aus ihr folgt die Relation [s. Formel (VII)]:

(X) $$D^2(\varphi) = R(\varphi, j)\,D^2(f),$$

welche zeigt, dass $R(\varphi, j)$ das Quadrat des 2[ten] Factors von $D(\varphi)$ ist.

Für $n = 4$ ist $j$ constant, $\varphi$ vom 4[ten] Grade also $R(\varphi, j) = j^4$ und

$$D(\varphi) = j^2\,.\,D(f)\,.$$

Ist die Form $f$ vom 5[ten] Grade und besitzt die Hesse'sche Form $\varphi$ eine Doppelwurzel $x$, dann genügt dieselbe der Gleichung (IX), also einer der beiden Formeln:

$$f = 0 \quad \text{oder} \quad j = 0\,.$$

Im ersteren Falle besitzen $f$ und $\varphi$ eine gemeinsame Wurzel, derselbe ist bereits oben erledigt.

Genügt die Doppelwurzel $x$ von $\varphi$ der Gleichung $j = 0$, dann verschwindet die Resultante $R(\varphi, j)$, sowie (für die Doppelwurzel) die Differentialquotienten von $j$ [s. Formel (III)] und daher die Discriminante $D(j) = C$. Hieraus kann man den Schluss ziehen, dass die Resultante $R(\varphi, j)$ den Factor $C$ und, da sie ein volles Quadrat ist, den Factor $C^2$ besitzt. Nun haben aber die Invarianten $R(\varphi, j)$ und $C^2$ in den Coefficienten von $f$ denselben Grad, nämlich 24, folglich kann man

$$R(\varphi, j) = C^2$$

setzen. Die Discriminante der Hesse'schen Form hat daher den Werth:

(XI) $$D(\varphi) = C\,.\,D(f)\,.$$

Giessen, im März 1871.

# Ueber eine Fläche der vierten Ordnung.

Von C. Hierholzer in Carlsruhe.

In einer Abhandlung über Kegelschnitte im Raume (Math. Annalen, Bd. II, p. 582) habe ich gezeigt, dass der Ort der Spitze eines Kegels zweiter Ordnung, welcher durch 6 gegebene Punkte geht, eine Fläche der vierten Ordnung ist, welche die 6 Punkte als Doppelpunkte und ihre 15 Verbindungslinien enthält. Diese Fläche, welche in der genannten Abhandlung nur so weit betrachtet wurde, als es für jenen Zweck erforderlich war, ist Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Wenn wir mit $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ die Coordinaten eines Punktes, bezogen auf ein beliebiges Tetraeder, mit $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$, $x_4^{(i)}$ $(i = 1, 2 \ldots 6)$ die Coordinaten der 6 gegebenen Punkte bezeichnen, und unter $(\varkappa\lambda\mu)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{(\varkappa)} & x_2^{(\varkappa)} & x_3^{(\varkappa)} & x_4^{(\varkappa)} \\ x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} & x_4^{(\lambda)} \\ x_1^{(\mu)} & x_2^{(\mu)} & x_3^{(\mu)} & x_4^{(\mu)} \end{vmatrix}$$

verstehen, so kann die Gleichung der Fläche vierter Ordnung, wie ich a. a. O. gezeigt habe, in die Form gebracht werden:

$$(1) \qquad (123)\,(145)\,(625)\,(634) - (125)\,(134)\,(623)\,(645) = 0,$$

aus welcher die Existenz der Doppelpunkte und ihrer Verbindungslinien auf der Fläche sofort ersichtlich ist. Nun enthält die Gleichung einer Fläche der vierten Ordnung:

$$F = \Sigma a_{k,\,l,\,m,\,n}\, x_k\, x_l\, x_m\, x_n = 0 \qquad (k, l, m, n = 1, 2, 3, 4)$$

35 homogen eingehende Constanten, während 6 Doppelpunkte und ihre 15 Verbindungslinien $6 \,.\, 4 + 15 = 39$ lineare homogene Bedingungsgleichungen zwischen diesen Constanten liefern. Die Fläche ist also durch ihre Singularitäten überbestimmt. Die 24 Gleichungen, welche das Vorhandensein der 6 Doppelpunkte ausdrücken, sind von einander unabhängig. Von den 15 übrigen Gleichungen, welche von den Verbindungslinien der Doppelpunkte herrühren, müssen also 5 eine Folge

der 10 übrigen und der 24 ersten Gleichungen sein, oder geometrisch gesprochen, es müssen 5 von den die Doppelpunkte verbindenden geraden Linien auf der Fläche eine Folge der 6 Doppelpunkte und der 10 übrigen Verbindungslinien sein.

Wir werden von diesem Satze einen directen Beweis geben, indem wir die Gleichung einer Fläche der vierten Ordnung aufstellen, welche 5 Doppelpunkte mit ihren 10 Verbindungslinien und noch einen weiteren Doppelpunkt enthält. Die Anzahl dieser Bedingungen ist gleich der Anzahl der Constanten in der Gleichung $F=0$. Es wird sich zeigen, dass die so bestimmte Fläche vierter Ordnung die Verbindungslinien des 6. Doppelpunktes mit den 5 übrigen von selbst enthält.

Wir wählen als Ecken des Coordinaten-Tetraeders vier von den Doppelpunkten, deren Verbindungslinien auf der Fläche liegen sollen. Dadurch verschwinden von den 35 Coefficienten der Gleichung $F=0$ diejenigen von

$$\begin{array}{cccc} x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^3 x_3 & x_1^3 x_4 \\ x_2^3 x_1 & x_2^4 & x_2^3 x_3 & x_2^3 x_4 \\ x_3^3 x_1 & x_3^3 x_2 & x_3^4 & x_3^3 x_4 \\ x_4^3 x_1 & x_4^3 x_2 & x_4^3 x_3 & x_4^4 \end{array}$$

$$x_1^2 x_2^2 \quad x_1^2 x_3^2 \quad x_1^2 x_4^2 \quad x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_4^2 \quad x_3^2 x_4^2,$$

und die Gleichung lässt sich in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} & x_2 x_3 x_4 (u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + u_{14} x_4) + x_3 x_4 x_1 (u_{21} x_1 + u_{23} x_3 + u_{24} x_4) \\ & + x_4 x_1 x_2 (u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + u_{34} x_4) + x_1 x_2 x_3 (u_{41} x_1 + u_{42} x_2 + u_{43} x_4) \\ & \qquad + c x_1 x_2 x_3 x_4 = 0, \end{aligned}$$

wenn wir mit $u_{ik}$ $\left(i,\ k=1,2,3,4,\ k \gtrless i\right)$ und $c$ die noch übrig bleibenden Coefficienten bezeichnen.

Verstehen wir unter $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ die linearen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} u_1 &= \quad 0 \quad + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + u_{14} x_4 \\ u_2 &= u_{21} x_1 + \quad 0 \quad + u_{23} x_3 + u_{24} x_4 \\ u_3 &= u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + \quad 0 \quad + u_{34} x_4 \\ u_4 &= u_{41} x_1 + u_{42} x_2 + u_{43} x_3 + \quad 0, \end{aligned}$$

so ist:

$$F = x_1 x_2 x_3 x_4 \left(\frac{u_1}{x_1} + \frac{u_2}{x_2} + \frac{u_3}{x_3} + \frac{u_4}{x_4} + c\right) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der Fläche vierter Ordnung.

Die Coefficienten der Function $F$ bestimmen wir nun so, dass die Fläche noch einen weiteren Doppelpunkt $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ und seine Verbindungslinien mit den schon vorhandenen, den Ecken des Coordinaten-Tetraeders, enthält. Wenn $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ und $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ die Coordinaten von zwei Doppelpunkten einer Fläche der vierten Ordnung bezeichnen, so liegt die Verbindungslinie der beiden Punkte ganz auf der Fläche, wenn

$$\Sigma \beta_i \beta_k F''(\alpha_i \alpha_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Lassen wir nun den Punkt $\alpha$ mit $a$, den Punkt $\beta$ nacheinander mit den Ecken des Coordinaten-Tetraeders zusammenfallen, so treten zu den vier Gleichungen

(3) $\quad F'(a_1) = 0, \quad F'(a_2) = 0, \quad F'(a_3) = 0, \quad F'(a_4) = 0,$

welche ausdrücken, dass der Punkt $a$ Doppelpunkt der Fläche $F = 0$ sein soll, noch die vier folgenden hinzu:

(4) $\quad F''(a_1 a_1) = 0, \quad F''(a_2 a_2) = 0, \quad F''(a_3 a_3) = 0, \quad F''(a_4 a_4) = 0,$

welche erfüllt sein müssen, wenn die Verbindungslinien des Doppelpunktes $a$ mit den schon vorhandenen Doppelpunkten auf der Fläche liegen sollen.

Bezeichnen wir die mit den Argumenten $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ geschriebenen linearen Functionen $u_i$ durch $(u_i)$, so sind die Gleichungen (3):

$$\begin{aligned}
F'(a_1) &= 0 + (u_2)\, a_3\, a_4 + (u_3)\, a_4\, a_2 + (u_4)\, a_2\, a_3 \\
&\quad + a_1 (0 + u_{21}\, a_3\, a_4 + u_{31}\, a_2\, a_4 + u_{41}\, a_2\, a_3) + c\, a_2\, a_3\, a_4 = 0 \\
F'(a_2) &= (u_1)\, a_3\, a_4 + 0 + (u_3)\, a_4\, a_1 + (u_4)\, a_1\, a_3 \\
&\quad + a_2 (u_{12}\, a_3\, a_4 + 0 + u_{32}\, a_4\, a_1 + u_{42}\, a_1\, a_3) + c\, a_3\, a_4\, a_1 = 0 \\
F'(a_3) &= (u_1)\, a_2\, a_4 + (u_2)\, a_1\, a_4 + 0 + (u_4)\, a_1\, a_2 \\
&\quad + a_3 (u_{13}\, a_2\, a_4 + u_{23}\, a_1\, a_4 + 0 + u_{43}\, a_1\, a_2) + c\, a_4\, a_1\, a_2 = 0 \\
F'(a_4) &= (u_1)\, a_2\, a_3 + (u_2)\, a_1\, a_3 + (u_3)\, a_1\, a_2 + 0 \\
&\quad + a_4 (u_{14}\, a_2\, a_3 + u_{24}\, a_1\, a_3 + u_{34}\, a_1\, a_2 + 0) + c\, a_1\, a_2\, a_3 = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich sehr durch das System (4):

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} F''(a_1 a_1) &= 0 + u_{21}\, a_3\, a_4 + u_{31}\, a_2\, a_4 + u_{41}\, a_2\, a_3 = 0 \\
\tfrac{1}{2} F''(a_2 a_2) &= u_{12}\, a_3\, a_4 + 0 + u_{32}\, a_1\, a_4 + u_{42}\, a_1\, a_3 = 0 \\
\tfrac{1}{2} F''(a_3 a_3) &= u_{13}\, a_2\, a_4 + u_{23}\, a_1\, a_4 + 0 + u_{43}\, a_1\, a_2 = 0 \\
\tfrac{1}{2} F''(a_4 a_4) &= u_{14}\, a_2\, a_3 + u_{24}\, a_1\, a_3 + u_{34}\, a_1\, a_2 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

und wir können die Gleichungen (3) und (4) ersetzen durch

$$(5) \qquad \begin{cases}
0 + \frac{(u_2)}{a_2} + \frac{(u_3)}{a_3} + \frac{(u_4)}{a_4} + c = 0 \\
\frac{(u_1)}{a_1} + 0 + \frac{(u_3)}{a_3} + \frac{(u_4)}{a_4} + c = 0 \\
\frac{(u_1)}{a_1} + \frac{(u_2)}{a_2} + 0 + \frac{(u_4)}{a_4} + c = 0 \\
\frac{(u_1)}{a_1} + \frac{(u_2)}{a_2} + \frac{(u_3)}{a_3} + 0 + c = 0
\end{cases}$$

und

$$(6) \qquad \begin{cases}
0 + \frac{u_{21}}{a_2} + \frac{u_{31}}{a_3} + \frac{u_{41}}{a_4} = 0 \\
\frac{u_{12}}{a_1} + 0 + \frac{u_{32}}{a_3} + \frac{u_{42}}{a_4} = 0 \\
\frac{u_{13}}{a_1} + \frac{u_{23}}{a_2} + 0 + \frac{u_{43}}{a_4} = 0 \\
\frac{u_{14}}{a_1} + \frac{u_{24}}{a_2} + \frac{u_{34}}{a_3} + 0 = 0
\end{cases}$$

Multipliciren wir die Gleichungen (6) der Reihe nach mit $a_1 a_2 a_3 a_4$ und addiren, so kommt

$$\frac{(u_1)}{a_1} + \frac{(u_2)}{a_2} + \frac{(u_3)}{a_3} + \frac{(u_4)}{a_4} = 0,$$

während durch Addition der Gleichungen (5)

$$3\left(\frac{(u_1)}{a_1} + \frac{(u_2)}{a_2} + \frac{(u_3)}{a_3} + \frac{(u_4)}{a_4}\right) + 4c = 0$$

sich ergiebt.

Die durch die Gleichung (2) dargestellte Fläche kann also einen weiteren Doppelpunkt und seine Verbindungslinien mit den schon vorhandenen nur dann enthalten, wenn der Coefficient $c$ verschwindet.

Dadurch gewinnt die Gleichung der Fläche die symmetrische Gestalt:

$$(7) \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 \left(\frac{u_1}{x_1} + \frac{u_2}{x_2} + \frac{u_3}{x_3} + \frac{u_4}{x_4}\right) = 0.$$

Die 12 in den linearen Functionen $u_i$ vorkommenden Coefficienten $u_{ik}$ sind gebunden an die Bedingungen (5) und (6), von welchen die ersteren wegen $c = 0$ sich ersetzen lassen durch

$$(u_1) = 0, \quad (u_2) = 0, \quad (u_3) = 0, \quad (u_4) = 0,$$

d. i.:

$$(8) \qquad \begin{cases} 0 + u_{12} a_2 + u_{13} a_3 + u_{14} a_4 = 0 \\ u_{21} a_1 + 0 + u_{23} a_3 + u_{24} a_4 = 0 \\ u_{31} a_1 + u_{32} a_2 + 0 + u_{34} a_4 = 0 \\ u_{41} a_1 + u_{42} a_2 + u_{43} a_3 + 0 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6) und (8) sind nicht von einander unabhängig. Bezeichnen wir die linken Seiten der (6) durch $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, so findet zwischen diesen und den linken Seiten $(u_1)$, $(u_2)$, $(u_3)$, $(u_4)$ der (8) die identische Relation statt:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = \frac{(u_1)}{a_1} + \frac{(u_2)}{a_2} + \frac{(u_3)}{a_3} + \frac{(u_4)}{a_4},$$

sodass die Systeme (6) und (8) nur sieben unabhängige Bedingungen für die Coefficienten repräsentiren, wie es sein muss, da das System (8) aus (5) durch Elimination von $c$ hervorgegangen ist.

Um die Verhältnisse der 12 Coefficienten $u_{ik}$ vollständig zu bestimmen, sind noch 4 Gleichungen erforderlich. Wir können also die Fläche $F = 0$ noch einen weiteren Doppelpunkt $b_1 b_2 b_3 b_4$ enthalten lassen.

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} F'(b_1) &= 0 + [u_2]\, b_3 b_4 + [u_3]\, b_4 b_2 + [u_4]\, b_2 b_3 \\ &\quad + b_1 (0 + u_{21} b_3 b_4 + u_{31} b_2 b_4 + u_{41} b_2 b_3) = 0 \\ F'(b_2) &= [u_1]\, b_3 b_4 + 0 + [u_3]\, b_1 b_4 + [u_4]\, b_1 b_3 \\ &\quad + b_2 (u_{12} b_3 b_4 + 0 + u_{32} b_1 b_4 + u_{42} b_1 b_3) = 0 \end{aligned}$$

$$F'(b_3) = [u_1]\, b_2 b_4 + [u_2]\, b_1 b_4 + 0 + [u_4]\, b_1 b_2$$
$$+ b_3 (u_{13}\, b_2 b_4 + u_{23}\, b_1 b_4 + 0 + u_{43}\, b_1 b_2) = 0$$
$$F'(b_4) = [u_1]\, b_2 b_3 + [u_2]\, b_1 b_3 + [u_3]\, b_1 b_2 + 0$$
$$+ b_4 (u_{14}\, b_2 b_3 + u_{24}\, b_1 b_3 + u_{34}\, b_1 b_2 + 0) = 0,$$

in welchen $[u_i]$ die mit den Argumenten $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$ geschriebene lineare Function $u_i$ bezeichnet.

Diese vier Gleichungen können wir ersetzen durch

$$\frac{[u_1]}{b_1} + \frac{[u_2]}{b_2} + \frac{[u_3]}{b_3} + \frac{[u_4]}{b_4} = 0 \tag{9}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{b_1}(\;0\; + u_{12} b_2 + u_{13} b_3 + u_{14} b_4) = b_1 \left(0 + \frac{u_{21}}{b_2} + \frac{u_{31}}{b_3} + \frac{u_{41}}{b_4}\right) \\
\frac{1}{b_2}(u_{21} b_1 + \;0\; + u_{23} b_3 + u_{24} b_4) = b_2 \left(\frac{u_{12}}{b_1} + 0 + \frac{u_{32}}{b_3} + \frac{u_{42}}{b_4}\right) \\
\frac{1}{b_3}(u_{31} b_1 + u_{32} b_2 + \;0\; + u_{34} b_4) = b_3 \left(\frac{u_{13}}{b_1} + \frac{u_{23}}{b_2} + 0 + \frac{u_{43}}{b_4}\right) \\
\frac{1}{b_4}(u_{41} b_1 + u_{42} b_2 + u_{43} b_3 + \;0\;) = b_4 \left(\frac{u_{14}}{b_1} + \frac{u_{24}}{b_2} + \frac{u_{34}}{b_3} + 0\right).
\end{array}\right. \tag{10}$$

Die Gleichungen (10) enthalten nur drei von einander unabhängige Bedingungen, weil durch Addition derselben eine identische Gleichung entsteht.

Durch die Systeme (6), (8), (9) und (10), welche, wie wir gesehen haben, nur 11 von einander unabhängige Gleichungen vertreten, sind die Verhältnisse der 12 Coefficienten $u_{i\varkappa}$ in der Gleichung $F = 0$ der Fläche vierter Ordnung vollständig bestimmt.

Um diese Gleichungen aufzulösen, führen wir an Stelle der $u_{ik}$ neue Unbekannte $v_{ik}$ ein, indem wir setzen:

$$u_{ik} = a_i\, b_i\, v_{ik},$$

wodurch die lineare Function $u_i = \sum_k u_{ik}\, x_k \left(k \gtrless i\right)$ übergeht in

$$a_i\, b_i \sum_k v_{ik}\, x_k = a_i\, b_i\, v_i$$

und die Gleichung (2) der Fläche vierter Ordnung in

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \left(a_1 b_1 \frac{v_1}{x_1} + a_2 b_2 \frac{v_2}{x_2} + a_3 b_3 \frac{v_3}{x_3} + a_4 b_4 \frac{v_4}{x_4}\right) = 0. \tag{11}$$

Die linearen Gleichungen (6), (8), (9) und (10), um deren Auflösung es sich handelt, nehmen nun die Gestalt an:

$$\begin{array}{l}
0 + v_{21} b_2 + v_{31} b_3 + v_{41} b_4 = 0 \\
v_{12} b_1 + 0 + v_{32} b_3 + v_{42} b_4 = 0 \\
v_{13} b_1 + v_{23} b_2 + 0 + v_{43} b_4 = 0 \\
v_{14} b_1 + v_{24} b_2 + v_{34} b_3 + 0 = 0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 \quad + v_{12}a_2 + v_{13}a_3 + v_{13}a_4 &= 0\\
v_{21}a_1 + \quad 0 \quad + v_{23}a_3 + v_{24}a_4 &= 0\\
v_{31}a_1 + v_{32}a_2 + \quad 0 \quad + v_{34}a_4 &= 0\\
v_{41}a_1 + v_{42}a_2 + v_{43}a_3 + \quad 0 \quad &= 0,
\end{aligned}$$

$$a_1[v_1] + a_2[v_2] + a_3[v_3] + a_4[v_4] = 0 \quad \left([v_i] = \sum_k v_{ik}\, b_k, \quad k \gtrless i\right)$$

$$\begin{aligned}
a_1(\quad 0 \quad + v_{12}b_2 + v_{13}b_3 + v_{14}b_4) &= b_1(\quad 0 \quad + v_{21}a_2 + v_{31}a_3 + v_{41}a_4)\\
a_2(v_{21}b_1 + \quad 0 \quad + v_{23}b_3 + v_{24}b_4) &= b_2(v_{12}a_1 + \quad 0 \quad + v_{32}a_3 + v_{42}a_4)\\
a_3(v_{31}b_1 + v_{32}b_2 + \quad 0 \quad + v_{34}b_4) &= b_3(v_{13}a_1 + v_{23}a_2 + \quad 0 \quad + v_{43}a_4)\\
a_4(v_{41}b_1 + v_{42}b_2 + v_{43}b_3 + \quad 0 \quad) &= b_4(v_{14}a_1 + v_{24}a_2 + v_{34}a_3 + \quad 0 \quad).
\end{aligned}$$

Alle diese Gleichungen werden erfüllt, wenn wir setzen:

$$(12) \qquad v_{ik} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_i \partial \beta_k},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

in welcher Determinante die $\alpha$ und $\beta$ willkürliche Grössen sein sollen.

Durch die Werthe (12) der $v_{ik}$ geht die lineare Function

$$v_i = \sum_k v_{ik}\, x_i \qquad \left(k \gtrless i\right)$$

über in die Unterdeterminante von

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

welche dem Element $\alpha_i$ zugehört, und die Gleichung (11) der Fläche vierter Ordnung nimmt die einfache Form an:

$$(13) \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 \begin{vmatrix} \frac{a_1 b_1}{x_1} & \frac{a_2 b_2}{x_2} & \frac{a_3 b_3}{x_3} & \frac{a_4 b_4}{x_4} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Fläche, welche durch sie dargestellt wird, in der That die verlangten Eigenschaften besitzt. Für $x_i = a_i$ und $x_i = b_i$ werden zweimal zwei Horizontalreihen der Determinante einander gleich; diese Punkte sind daher Doppelpunkte der Fläche. Ein Punkt der Verbindungslinie von $a$ mit dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ hat die Coordinaten $\lambda a_1$, $\lambda a_2$, $\lambda a_3$, $x_4 + \lambda a_4$,

für welche die Determinante verschwindet. Die Fläche enthält daher diese gerade Linie und ebenso diejenigen, welche den Punkt $a$ mit den übrigen Ecken des Coordinatentetraeders verbinden.

Nun ändert aber die linke Seite der Gleichung der Fläche durch Vertauschung von $a$ und $b$ nur das Vorzeichen und verschwindet für $x_i = a_i + \lambda b_i$. Folglich liegen auch die Verbindungslinien von $b$ mit den übrigen Doppelpunkten auf der Fläche, und die Fläche kann keine andere sein, als diejenige, welche, bezogen auf ein allgemeines Coordinatentetraeder, durch die Gleichung (1) dargestellt wird.

*Die Fläche der vierten Ordnung, welche bestimmt ist durch* 5 *Doppelpunkte, ihre* 10 *Verbindungslinien und einen weiteren Doppelpunkt, enthält also die Verbindungslinien des letzten Doppelpunktes mit den* 5 *übrigen von selbst.*

*Die Fläche ist der Ort der Spitze eines Kegels zweiter Ordnung, welcher durch die* 6 *Doppelpunkte hindurchgeht, und wird dargestellt durch die Gleichungen* (1) *oder* (13), *je nachdem wir sie auf ein allgemeines oder auf ein Tetraeder beziehen, dessen Ecken mit* 4 *von den Doppelpunkten zusammenfallen.*

## Curven auf der Fläche.

Ausser den 15 Verbindungslinien der Doppelpunkte enthält die Fläche vierter Ordnung noch andere gerade Linien, denn die Gleichung (13) wird erfüllt für

$$x_1 = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. die gerade Linie, in welcher die Ebene $x_4 = 0$ die Ebene schneidet, welche durch die 3 nicht auf $x_4 = 0$ liegenden Doppelpunkte bestimmt wird, gehört der Fläche an. Ebenso kann man beweisen, dass die Durchschnittslinien eines jeden der 10 Ebenenpaare, welche sich durch die 6 Doppelpunkte hindurchlegen lassen, auf der Fläche liegt, wie dies übrigens auch aus Gleichung (1) hervorgeht.

Einer jeden der 15 + 10 Geraden auf der Fläche entspricht eine Schaar von ebenen Curven dritter Ordnung, welche durch einen Ebenenbüschel ausgeschnitten wird, der die Gerade zur Axe hat. Wenn die Gerade 2 Doppelpunkte der Fläche verbindet, so gehen alle Curven der entsprechenden Schaar durch diese beiden Punkte.

Der Tangentenkegel in einem Doppelpunkte*) schneidet die Fläche

*) Die Gleichungen der Tangentenkegel in den Eckpunkten des Coordinatentetraeders erhält man aus (13), wenn man die Unterdeterminanten der Elemente der zweiten Horizontalreihe gleich Null setzt.

in einer Curve der achten Ordnung, welche den betrachteten Doppelpunkt als sechsfachen*), die übrigen Doppelpunkte der Fläche als zweifache Punkte enthält.

Diese Curve zerfällt in die 5 Geraden, welche in dem betrachteten Doppelpunkte der Fläche zusammenstossen und in eine Curve der dritten Ordnung, welche durch alle 6 Doppelpunkte hindurchgeht. Daraus folgt:

*Die Tangentenkegel der Fläche in den 6 Doppelpunkten stehen alle auf derselben Raumcurve der dritten Ordnung, welche durch diese 6 Punkte bestimmt wird. Diese Curve liegt auf der Fläche.*

Die Fläche enthält ferner Schaaren von Raumcurven vierter Ordnung, erster Art. Ein Kegel der zweiten Ordnung, welcher einen der Doppelpunkte der Fläche zum Scheitel hat und durch 4 andere Doppelpunkte hindurchgeht, schneidet die Fläche in 4 geraden Linien und in einer durch die 4 letzten Doppelpunkte hindurchgehenden Curve vierter Ordnung, von welcher wir mit Hülfe der Gleichung (1) zeigen werden, dass sie von der ersten Art sein muss. Diese Gleichung können wir ersetzen durch die beiden folgenden mit dem willkürlichen Parameter $\lambda$:

$$(14) \qquad \begin{cases} (123)\,(145) - \lambda\,(125)\,(134) = 0 \\ (623)\,(645) - \lambda\,(625)\,(634) = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ist die eines Kegels zweiter Ordnung, welcher den Doppelpunkt 1 der Fläche (1) zum Scheitel hat und durch die Punkte 2, 3, 4, 5 hindurchgeht. Dieser Kegel schneidet die Fläche vierter Ordnung in einer Curve der vierten Ordnung, welche auch auf dem durch die zweite Gleichung (14) dargestellten Kegel zweiter Ordnung liegt, also von der ersten Art ist.

Die Gleichungen (14) zeigen noch, dass die betrachtete Fläche erzeugt wird durch die Durchschnittscurven entsprechender Kegel zweier projectivischer Kegelbüschel, von welchen jeder einen der Doppelpunkte zum Scheitel hat und durch die Verbindungslinien des Scheitels mit den 4 übrigen Doppelpunkten bestimmt wird.

Die Anzahl solcher Schaaren von Curven vierter Ordnung auf der Fläche ist gleich der Anzahl der Combinationen von 6 Elementen zu zweien, gleich 15.

Wir erwähnen noch einer Schaar von Curven fünfter Ordnung

---

*) Wenn 2 Flächen einen Punkt gemein haben, welcher ein $r$facher Punkt einer jeden der beiden Flächen ist, so ist dieser Punkt im Allgemeinen ein $r^2$facher Punkt ihrer Durchschnittscurve. In dem Falle aber, in welchem die Tangentenkegel $r^{\text{ter}}$ Ordnung in beiden Flächen zusammenfallen, ist jener Punkt ein $r(r+1)$facher Punkt der Durchschnittscurve. Für $r = 1$ ergiebt sich hieraus der bekannte Satz, dass ein Berührungspunkt zweier Flächen Doppelpunkt ihrer Durchschnittscurve ist.

auf der Fläche, welche durch alle 6 Doppelpunkte hindurchgehen. Zu solchen Curven gelangen wir, wenn wir die durch die 6 Doppelpunkte bestimmte Curve der dritten Ordnung von einem beliebigen ihrer Punkte aus auf die Fläche projiciren. Der Projectionskegel ist von der zweiten Ordnung und schneidet die Fläche in einer Curve der achten Ordnung, von welcher die Doppelpunkte der Fläche ebenfalls Doppelpunkte sind. Diese Curve der achten Ordnung zerfällt in die Curve dritter Ordnung und in eine Curve der fünften Ordnung von der bezeichneten Art.

Einem jeden Punkte der Curve dritter Ordnung entspricht also eine solche Curve der fünften Ordnung. Die dem Doppelpunkte der Fläche entsprechenden Curven zerfallen in 5 gerade Linien.

---

Bei besonderer Lage der gegebenen 6 Punkte treten Modificationen in der Fläche vierter Ordnung ein, welche wir mit Hülfe der Gleichungen (1) oder (13) leicht verfolgen können.

Wenn z. B. von den 6 gegebenen Punkten 4 in einer Ebene liegen, was wir dadurch ausdrücken, dass wir etwa den Punkt $a$ [Gleichung (13)] in die Coordinatenebene $x_4 = 0$ verlegen, also $a_4 = 0$ setzen, so zerfällt diese Gleichung in

$$x_4 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} \frac{a_1 b_1}{x_1} & \frac{a_2 b_2}{x_2} & \frac{a_3 b_3}{x_3} & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Die letzte Gleichung stellt eine Fläche der dritten Ordnung dar, welche diejenigen beiden der gegebenen Punkte zu Doppelpunkten hat, welche nicht in der Ebene $x_4 = 0$ liegen.

Lassen wir auch noch den Punkt $b$ in die Ebene $x_4 = 0$ fallen, so sondert sich abermals die Ebene $x_4 = 0$ ab und der übrige Theil der Fläche wird durch den Kegel zweiter Ordnung gebildet:

$$x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} \frac{a_1 b_1}{x_1} & \frac{a_2 b_2}{x_2} & \frac{a_3 b_3}{x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

welcher den der Ebene $x_4 = 0$ gegenüber liegenden Eckpunkt des Coordinatentetraeders zum Scheitel hat und durch die 5 in dieser Ebene gegebenen Punkte hindurchgeht.

Offenbar kann jeder Punkt dieses Kegels Scheitel eines Kegels zweiter Ordnung sein, der durch die 6 gegebenen Punkte geht.

Carlsruhe, im März 1871.

---

# Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche.

Von J. Lüroth in Carlsruhe.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf eine algebraische $n$ werthige Function $s$ der complexen Variabeln $z$, welche $w$ einfache Verzweigungspunkte besitzt.

In der Ebene, welche zur Darstellung der Variabeln $z$ dient, sei ein Punkt $C$ angenommen, der kein Verzweigungspunkt ist und in welchem die Function $s$ die Werthe $s_1\, s_2\, ..\, s_n$ hat. Jedem Verzweigungspunkte sind nun zwei dieser $n$ Werthe derart zugeordnet, dass sie ineinander übergehen, wenn man von $C$ aus um jenen Punkt bis nach $C$ zurück eine Schleife, d. h. eine Curve mit einem kleinen, den Punkt umgebenden Kreis durchläuft. Welche Wurzeln es sind, hängt von der Gestalt der Schleife in gewissem Grade ab, indem zwei Schleifen eines Punktes nur dann dieselben beiden Wurzeln verbinden müssen, wenn sie zusammen keinen weiteren Verzweigungspunkt einschliessen.

Construirt man ein Polygon, dessen Ecken die Verzweigungspunkte sind und dessen Seiten, die, wenn nöthig, krummlinig sein können, weder sich schneiden, noch durch den Punkt $C$ gehen, so sind die Wurzeln, welche einem Verzweigungspunkte zugeordnet sind, vollständig bestimmt, wenn man festsetzt, dass die Schleifen (abgesehen von den kleinen Kreisen) nur in dem Theile der Ebene verlaufen sollen, in welchem der Punkt $C$ liegt und welcher der innere heissen soll. Im Folgenden ist diese Annahme stets gemacht. Wenn dann eine Schleife eines Punktes die Wurzel $s_i$ mit einer anderen verbindet, so soll er zur Wurzel $s_i$ gehörig heissen.

*Man kann nun stets ein Polygon angeben, dessen Ecken in $n-1$ Gruppen von aufeinander folgenden Ecken zerfallen, sodass jede Gruppe eine gerade Zahl von Ecken enthält, deren Schleifen die nämlichen beiden Wurzeln verbinden.*

Man beweist diesen Satz, indem man zeigt, wie aus irgend einem Polygon ein anderes mit den genannten Eigenschaften abzuleiten ist.

Hierzu kann man die folgenden beiden Operationen anwenden. Die Eckpunkte des Polygons seien bei einer beliebigen Fortschrittsrichtung bezeichnet durch 1, 2, .. $w$. Man kann nun einen Eckpunkt $\beta$ nach einem vorhergehenden $\alpha$ einschalten und ein neues Polygon ableiten, indem man die Seite $\alpha$ $\alpha+1$ ersetzt durch einen Linienzug von $\alpha$ nach $\beta$ und zurück nach $\alpha+1$, dann aber von $\beta-1$ direct übergeht zu $\beta+1$. In dem so entstehenden neuen Polygon ist nach der früheren Bezeichnung die Aufeinanderfolge der Ecken .. $\alpha$, $\beta$, $\alpha+1$, $\alpha+2$ ... $\beta-1$, $\beta+1$, .... Diese Einschaltung kann so geschehen, dass der Zug $\alpha\beta$ $\alpha+1$ ganz im Innern des ersten Polygons verläuft; in diesem Falle möge die Linie $\alpha\beta$ in Verbindung mit dem Stücke von $\alpha$ bis $\beta$ des alten Polygons den Punkt $C$ ausschliessen. Oder jener Zug kann ganz auf der äusseren Seite verlaufen. Diese beiden Arten der Einschaltung sollen als erste und zweite Art bezeichnet werden. Eine Vergleichung der Schleifen, welche vor und nach der Einschaltung zu den Ecken führen, ergiebt nun ohne Schwierigkeit, dass bei dem ersten Verfahren ein Punkt der Reihe $\alpha+1$, $\alpha+2$, .. $\beta-1$, der vor der Einschaltung zugeordnet war den Wurzeln

$$s_i s_k, \quad s_l s_m, \quad s_i s_l, \quad s_k s_m$$

(wo $l$ und $m$ von $i$ und $k$ verschieden), nach der Einschaltung verbindet resp. die Wurzeln

$$s_i s_k, \quad s_l s_m, \quad s_k s_l, \quad s_i s_m,$$

wenn der eingeschaltete Punkt $\beta$ den beiden Wurzeln $s_i$ und $s_k$ zugeordnet war. Die Schleifen aller übrigen Punkte verbinden dieselben beiden Wurzeln wie vorher.

Beim zweiten Verfahren ändern sich nur die Wurzeln, welche dem Verzweigungspunkte $\beta$ selbst zugeordnet sind und zwar in folgender Weise. Vor der Einschaltung führe die entsprechende Schleife von $s_i$ zu $s_k$. Durchläuft man das Schleifensystem $\beta-1$, $\beta-2$, ... $\alpha+1$ mit $s_i$ beginnend, so gelange man zu $s_l$, mit $s_k$ beginnend zu $s_m$. Dann führt nach der Einschaltung die Schleife des Punktes $\beta$ von $s_l$ zu $s_m$.

Man sieht, wie man durch wiederholte Anwendung dieser Operationen ein Polygon herstellen kann, in welchem die Ecken in Gruppen von aufeinanderfolgenden Ecken zerfallen, sodass alle Verzweigungspunkte einer Gruppe denselben beiden Wurzeln zugeordnet sind und diese Wurzelpaare sich folgen, wie die geordneten Combinationen von $s_1 s_2$ .. $s_n$ zu je zweien. In einem solchen Polygon muss in jeder Gruppe die Anzahl der Ecken gerade sein. Durchläuft man nämlich das ganze Schleifensystem, mit der Wurzel $s_1$ beginnend, so muss man wieder zu $s_1$ zurückkehren. Man fange nun bei der Gruppe von

Schleifen an, welche $s_1$ mit $s_2$ verbinden. Wäre die Anzahl derselben ungerade, so würde man nach ihrer Durchlaufung in $C$ mit $s_2$ ankommen und könnte nach der Anordnung des Schleifensystems nicht mehr zu $s_1$ zurückkehren.

Indem man hiervon Gebrauch macht, zeigt man, dass die Zahl der Schleifen, welche $s_1$ mit $s_3$ verbinden, gerade sein muss u. s. w. für alle $s_1$ zugeordneten Gruppen. Indem man auch das Schleifensystem mit $s_2$, $s_3$ ... durchläuft und immer von allen früheren Resultaten Gebrauch macht, ergiebt sich die allgemeine Richtigkeit.

Man wähle nun $n - 1$ Schleifen so aus, dass man mit ihrer Hülfe von jeder Wurzel zu jeder anderen gelangen kann, was stets möglich ist, wenn $s$ eine irreductible Function von $z$ ist (vergl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, pag. 83). Diese Schleifen und die Gruppen, welchen sie angehören, mögen fundamentale heissen. Man kann nun jede nicht fundamentale Gruppe so einschalten, dass ihre Schleifen fundamentale werden.

Die Verzweigungspunkte seien den Wurzeln $s_i$ und $s_k$ zugeordnet und die Reihe von fundamentalen Schleifen, die zu durchlaufen ist, um von $s_i$ zu $s_k$ zu gelangen, sei die folgende $s_i s_\alpha$, $s_\alpha s_\beta$, $s_\beta s_\gamma$ ... $s_\mu s_k$. Man trenne nun die Gruppe $s_i s_\alpha$ in zwei Theile, deren einer aus einem Punkte besteht und schalte die ganze Gruppe $s_i s_k$ nach der ersten Art zwischen diese beiden Theile ein. Da die Zahl der eingeschalteten Punkte gerade ist, ändern sich die Wurzeln nicht, welche den einzelnen Punkten zugeordnet sind. Bezeichnen wir die Ecken durch die Indices der Wurzeln, welche ihnen zugeordnet sind, so hat man jetzt die Anordnung $(i\alpha)\,..\,(i\alpha)\,(ik)\,(ik)\,...\,(ik)\,(i\alpha)$. Schaltet man nun das letzte $(i\alpha)$ ebenfalls nach der ersten Art ein vor den Punkten $(ik)$, so entsteht die Reihenfolge $(i\alpha)..(i\alpha)\,(i\alpha)\,(\alpha k)\,(\alpha k)...(\alpha k)$. In dem so enstandenen neuen Polygon gehören also jene Verzweigungspunkte zu den Wurzeln $s_\alpha s_k$. Durch ähnliche Combination mit der Gruppe $s_\alpha s_\beta$ werden die zugeordneten Wurzeln $s_\beta s_k$ u. s. w., schliesslich sind sie den Wurzeln $s_\mu s_k$ zugeordnet, d. h. sie gehören einer fundamentalen Gruppe an. Da ihre Zahl gerade geblieben ist, kann man die ganze Gruppe mit den schon vorhandenen vereinigen, ohne eine Aenderung der den übrigen Ecken entsprechenden Wurzeln. Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Wenn man nun nach Riemann die Function $s$ in einer $n$ blätterigen Fläche eindeutig darstellen will, so hat man Verzweigungsschnitte zu legen, über welche hinüber die Blätter ineinander übergehen. Dies kann unter Anderem so geschehen, dass man von einem Punkte $C'$ auf der äusseren Seite des zuletzt construirten Polygons nach allen Verzweigungspunkten Linien zieht, welche ganz im äusseren Theile verlaufen und sich nicht schneiden; über eine solche Linie hinüber

setzen sich dann die Blätter $i$ und $k$ ineinander fort, wenn die entsprechende Schleife von $s_i$ nach $s_k$ führt. Man kann also auch den Satz aussprechen: *Die Verzweigungsschnitte können so gelegt werden, dass sie in $n - 1$ Gruppen zerfallen, sodass die Schnitte einer Gruppe dieselben beiden Blätter verbinden.*

Eine $n$ blätterige Fläche mit $w$ Verzweigungspunkten kann durch $2p = w - 2(n - 1)$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden. Von besonderer Wichtigkeit ist das Querschnittsystem, welches Riemann in § 19 und ff. seiner Abhandlung über Abel'sche Functionen zu Grunde legt und welches man ein kanonisches System genannt hat. Wenn die Verzweigung nach dem obigen Satze angeordnet ist, lässt sich ein solches System leicht angeben. Unter den $n - 1$ Gruppen fasse man diejenigen von den $w_{ik}$ Schnitten ins Auge, welche die Blätter $i$ und $k$ miteinander verbinden.

Man lege eine geschlossene Curve, welche nur die beiden ersten Schnitte überschreitet und also zum Theil im $i^{\text{ten}}$, zum Theil im $k^{\text{ten}}$ Blatte verläuft; von einem Punkte dieser Curve ziehe man über den zweiten und dritten Schnitt hinüber eine zweite geschlossene Curve nach jenem Anfangspunkte zurück. Diese beiden bilden zusammen zwei Querschnitte, wie sie Riemann mit $a$, $b$ bezeichnet. Zwei andere erhält man, indem man eine Curve zieht, welche die 4 ersten Verzweigungsschnitte überschreitet und von einem ihrer Punkte eine geschlossene Curve legt durch den vierten und fünften Schnitt. Mit Benutzung von $w_{ik} - 1$ Verzweigungsschnitten erhält man auf diese Art $w_{ik} - 2$ Curvenpaare, die durch passende Curvenstücke ($c$ bei Riemann) in Verbindung gesetzt, ebenso viele Querschnitte sind. Verfährt man so mit allen Gruppen und setzt die einzelnen Querschnittsgruppen durch Verbindungsstücke $c$ in Zusammenhang, so entstehen $w - 2(n - 1) = 2p$ Querschnitte. Da die beiden Seiten dieses Systems seiner Entstehung nach in einem Zuge durchlaufen werden können, so ist die Fläche nicht zerstückt und demnach einfach zusammenhängend. Ganz auf ähnliche Art kann man verfahren, wenn man die Seiten des zuletzt construirten Polygons selbst zu Verzweigungsschnitten nimmt, wobei, wie leicht zu ersehen ist, nur jede ungerade Seite ein wirklicher Verzweigungsschnitt wird.

Carlsruhe, im April 1871.

# Lehrsätze und Aufgaben über die Kugel.

Von Fr. G. Affolter in Solothurn.

Der grosse Geometer Steiner veröffentlichte im Band 1. des Journals für reine und angewandte Mathematik eine Menge von Lehrsätzen und Constructionen über den Kreis. Am gleichen Orte wies er jedoch auf einige Aufgaben hin, als: 1. *Drei Kreise durch einen vierten unter gegebenen*, und 2. *Vier Kreise durch einen fünften unter gleichen Winkeln zu schneiden*, ohne dass er irgendwo die zugehörigen Lösungen und Constructionen angegeben hätte. Die Constructionen der der ersteren genannten Aufgabe entsprechenden im Raume: *Vier Kugeln durch eine fünfte unter gegebenen Winkeln zu schneiden*, habe ich in Band 16. der Zeitschrift für Mathematik und Physik gegeben, während ich hier die Lösungen zu der der zweiten im Raume entsprechenden: *Fünf Kugeln durch eine sechste unter gleichen Winkeln zu schneiden*, so wie die Lösungen zu einigen andern mit dieser verwandten Aufgaben angeben werde.

## I.

Schneiden wir zwei Kugeln $k_1$ und $k_2$ durch eine äussere oder innere Aehnlichkeitslinie, so entstehen auf derselben je zwei *äussere* oder *innere direkte* und *inverse Punktepaare*. Das Produkt der Abschnitte, gebildet aus dem entsprechenden Aehnlichkeitspunkt und den Punkten des zugehörigen inversen Paares ist constant und gleich *der äusseren oder inneren gemeinsamen Potenz* der Kugeln $k_1$ und $k_2$. Bezeichnen wir die Aehnlichkeitspunkte mit $a_{12}$ und $i_{12}$, die Radien der Kugeln $k_1$ und $k_2$ mit $r_1$ und $r_2$; ihre Centrallinie mit $\varrho_{12}$ und die gemeinsamen Potenzen mit $p_a$ und $p_i$, so sind die Werthe dieser Grössen durch die Gleichungen

$$(1)\qquad p_a = \frac{r_1 r_2[\varrho_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2]}{(r_1 - r_2)^2}\,; \quad p_i = \frac{r_1 r_2[(r_1 + r_2)^2 - \varrho_{12}^2]}{(r_1 + r_2)^2}$$

gegeben.

Beschreiben wir aus den Punkten $a_{12}$ und $i_{12}$, als Mittelpunkten, die Kugeln $a_{12}$ und $i_{12}$ mit den Radien $\sqrt{p_a}$ und $\sqrt{p_i}$; so kann man nach dem Princip der reciproken Radien die Kugeln $k_1$ und $k_2$ als

reciproke Kugeln ansehen, in Bezug auf $a_{12}$ und $i_{12}$ als transformative Kugeln. Es gehören somit die Kugeln $a_{12}$ und $i_{12}$ der durch die Kugeln $k_1$ und $k_2$ gebildeten Kugelschaar an und schneiden sich folglich rechtwinkelig. Wir bezeichnen diese Kugeln mit dem Namen der *äusseren und inneren orthogonalen Potenzkugeln* oder auch blos als *Potenzkugeln.*

Schneidet eine Kugel $M$ die eine oder andere Potenzkugel rechtwinkelig, so ist sie ihre eigene reciproke. Denn jede durch den Mittelpunkt der Potenzkugel gelegte Gerade wird von dieser und der Kugel $M$ in vier harmonischen Punkten geschnitten. Da sich zwei Kugeln unter dem nämlichen Winkel schneiden, wie ihre reciproken und da die Mittelpunkte der Kugeln $k_1$ und $k_2$ auf derselben Seite von $a_{12}$ und zu verschiedenen Seiten von $i_{12}$ liegen, so folgt:

1. *Jede Kugel, welche eine Kugel orthogonal schneidet, schneidet zwei auf diese bezogene reciproke Kugeln gleichwinkelig. Und umgekehrt.*

2. *Jede Kugel, welche zwei gegebene Kugeln gleichwinkelig schneidet, wird von der diesen zwei Kugeln zugehörigen äusseren oder inneren Potenzkugel rechtwinkelig geschnitten. Die Schnittkreise, in denen die erstere Kugel die zwei gegebenen schneidet, liegen auf einem Kegel, dessen Spitze mit dem äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt zusammenfällt.*

Die Kugel $M$ bezeichnen wir als äussere oder innere Kugel, je nachdem sie die Kugeln $k_1$ und $k_2$ gleich oder ungleichartig unter gleichen Winkeln schneidet.

Legen wir von einem der Aehnlichkeitspunkte eine Tangente an die gleichnamige Kugel $M$, so ist nun leicht ersichtlich, dass die Entfernung $l$ des Mittelpunktes der Kugel $M$ von dem zugehörigen Aehnlichkeitspunkt durch die Gleichungen

$$(2) \qquad l_a^2 = p_a + R^2; \quad l_i^2 = p_i + R^2$$

gegeben ist. Diese Gleichungen gelten für die Entfernungen aller Mittelpunkte solcher Kugeln $M$, deren Radius gleich $R$ ist. Man hat daher:

3. *Die Mittelpunkte aller Kugeln, welche mit einem bestimmten Radius beschrieben, zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig und gleich- oder ungleichartig schneiden, liegen auf Kugeln, deren Mittelpunkte mit den Aehnlichkeitspunkten jener zwei Kugeln zusammenfallen und deren Radien $l_a$ und $l_i$ beziehlich durch die Gleichungen* (2) *gegeben sind. Wir heissen diese Kugeln äussere und innere Mittelpunktenkugeln, dem Radius $R$ zugeordnet.*

Die beiden einander zugeordneten äusseren und inneren Mittelpunktenkugeln $a_{12}$ und $i_{12}$ schneiden einander in einem Kreise, dessen

Punkte Mittelpunkte sowohl von äusseren als von inneren Kugeln $M$ sind, d. h. sie sind die Mittelpunkte solcher Kugeln $M$, die die Kugeln $k_1$ und $k_2$ orthogonal schneiden. Dieser Schnittkreis liegt daher in der Potenzebene der Kugeln $k_1$ und $k_2$. Wir haben somit:

4. *Die Potenzebene von zwei Kugeln ist auch die Potenzebene von zwei einander und einem bestimmten Radius zugeordneten, zu jenen zwei Kugeln gehörenden, Mittelpunktenkugeln.*

5. *Die Mittelpunkte aller Kugeln von gegebenem Radius, die zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln rechtwinkelig schneiden, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt in den Durchschnittspunkt der Centrallinie mit der Potenzebene der zwei Kugeln fällt.*

Lassen wir den Radius $R$ der Kugel $M$ gleich Null werden, so hat man

(3) $$l_a^2 = p_a; \quad l_i^2 = p_i,$$

d. h.

6. *Die Punkte der Potenzkugeln zweier Kugeln lassen sich als Kugeln von dem Radius Null ansehen, die diese zwei gleichwinkelig schneiden.*

**Folgerungen 1.** Mit Hilfe der bis dahin erhaltenen Resultate kann man nachfolgende Aufgaben lösen:

1. *Aufgabe.* Aus einem gegebenen Punkt als Mittelpunkt eine Kugel so zu beschreiben, dass sie zwei der Lage und Grösse nach gegebene gleichwinkelig schneide:

Man legt von dem gegebenen Punkte und an jede der zu den zwei Kugeln gehörenden Potenzkugeln Tangenten, sind die Längen dieser Linien die Radien der gesuchten Kugeln. Wir haben somit zwei Lösungen und folglich ist:

7. *Jeder Punkt des Raumes ist Mittelpunkt von zwei (reellen, einer reellen und einer imaginären, oder von zwei imaginären) Kugeln, (einer äusseren und einer inneren), welche zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden.*

2. *Aufgabe.* Mit einem gegebenen Radius $R$ eine Kugel so zu beschreiben, dass sie zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneide und ausserdem ihren Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegend habe.

Man construire mit Hilfe der Gleichungen (2) die dem Radius $R$ zugeordneten Mittelpunktenkugeln, so sind alsdann die Schnitte dieser Kugeln mit der gegebenen Geraden die Mittelpunkte der verlangten Kugeln. Es genügen also zwei äussere und zwei innere Kugeln der Aufgabe. Die Mittelpunkte dieser Kugeln liegen zu den Fusspunkten der von dem äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt auf die gegebene Gerade gefällten Normalen. Die beiden äusseren Kugeln

— $M_1$ und $M_2$ — schneiden die äussere Potenzkugel $a_{12}$ rechtwinkelig, d. h. der äussere Aehnlichkeitspunkt $a_{12}$ ist Potenzpunkt in Bezug auf die Kugeln $M_1$ und $M_2$. Die Potenzebene dieser Kugeln geht somit durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt. Ebenso zeigt man, dass die Potenzebene der beiden inneren Kugeln $M_1'$ und $M_2'$ durch den inneren Aehnlichkeitspunkt $i_{12}$ der Kugeln $k_1$ und $k_2$ geht. Wir haben so:

8. *Die Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln gleichwinkelig und zwar gleich- oder ungleichartig schneiden und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, bilden je eine Kugelschaar. Ihre Potenzebene geht im ersten Fall durch den äusseren und im zweiten Fall durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der zwei gegebenen Kugeln.*

An diese Sätze schliessen sich ohne weiteres die zwei nachfolgenden an.

9. *Die Punkte einer beliebigen Ebene, welche als Mittelpunkte von Kugeln von bestimmtem Radius, die zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, anzusehen sind, liegen auf zwei Kreisen. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die Fusspunkte der aus den Aehnlichkeitspunkten auf die Ebene gefällten Lothe. Sie sind also immer reell, während die Kreise selbst imaginär sein können.*

10. *Es giebt zwei Kugeln von bestimmtem Radius, die zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln rechtwinkelig schneiden und ihre Mittelpunkte in einer beliebigen Ebene liegend haben.*

## II.

Nehmen wir zu den zwei Kugeln $k_1$ und $k_2$ noch eine dritte, die Kugel $k_3$ hinzu, so erhalten wir sechs Aehnlichkeitspunkte zu je drei auf vier Geraden — den Aehnlichkeitsaxen liegend. Wir erhalten ebenso viele mit diesen Punkten gleichbezeichnete Potenzkugeln und je einem bestimmten Radius zugeordnete Mittelpunktenkugeln. Wir bezeichnen die zu den Kugeln $k_x$ und $k_y$ gehörenden Aehnlichkeitspunkte mit $a_{xy}$ und $i_{xy}$, wo $x$ und $y$ ungleich aber die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Von diesen Aehnlichkeitspunkten liegen

1. $a_{12}$; $a_{13}$; $a_{23}$ auf der Aehnlichkeitsaxe $A_{123}$.
2. $a_{12}$; $i_{13}$; $i_{23}$ „ „ „ „ $A_{3,12}$.
3. $i_{12}$; $a_{13}$; $i_{23}$ „ „ „ „ $A_{2,31}$.
4. $i_{12}$; $i_{13}$; $a_{23}$ „ „ „ „ $A_{1,23}$.

Die Potenzebenen $l_{12}$; $l_{13}$; $l_{23}$, zu je zwei der drei Kugeln $k$ gehörend, schneiden sich in einer Geraden, der Potenzgeraden $g_{123}$.

Die Potenzkugeln $a_{12}$; $a_{13}$ schneiden sich in einem Kreise, dessen Punkte nach Satz 6. als Kugeln von dem Radius Null aufzufassen sind, die sowohl $k_1$ und $k_2$ als $k_1$ und $k_3$, doch alle drei Kugeln $k$

gleichwinkelig und gleichartig schneiden. Dieser Kreis muss daher auch auf der Potenzkugel $a_{23}$ liegen. Es schneiden sich also alle drei Potenzkugeln $a_{12}$; $a_{13}$; $a_{23}$ in einem Kreise. Ebenso zeigt man, dass sich die Potenzkugeln $a_{12}$; $i_{13}$; $i_{23}$; und

$i_{12}$; $a_{13}$; $i_{23}$ wie

$i_{12}$; $i_{13}$; $a_{23}$ je in einem Kreise schneiden.

Man hat daher.

11. *Die sechs zu drei Kugeln gehörenden Potenzkugeln schneiden sich viermal zu je dreien in einem Kreise und zwar einmal alle drei äussere und dreimal je zwei innere mit der nicht zugehörigen äusseren.*

Ist die Kugel $M$ in Bezug auf die Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$ eine äussere, so muss sie die drei äusseren Potenzkugeln rechtwinkelig schneiden, d. h. der Mittelpunkt $M$ liegt auf der Potenzebene $\varepsilon_{123}$ der drei Potenzkugeln $a_{12}$; $a_{13}$; $a_{23}$. Ist hingegen die Kugel $M$ in Bezug auf zwei der drei Kugeln eine äussere, hingegen in Bezug auf die Kugelpaare, gebildet durch die übrige dritte Kugel und je einer von diesen zweien eine innere, so muss sie die zugehörigen äusseren und inneren Potenzkugeln rechtwinkelig schneiden. Der Mittelpunkt dieser Kugel muss daher auf der Potenzebene dieser drei Potenzkugeln liegen. Wir bezeichnen diese Potenzebenen mit $\varepsilon_{1,23}$; $\varepsilon_{2,31}$; $\varepsilon_{3,12}$, so dass $\varepsilon_{1,23}$ zu den Potenzkugeln $a_{23}$; $i_{12}$; $i_{13}$, u. s. w. gehören. Diese vier Ebenen $\varepsilon$ gehen sämmtlich durch die Potenzlinie $g_{123}$; denn die Punkte dieser Geraden sind Mittelpunkte solcher Kugeln, welche die drei Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$ rechtwinkelig, d. h. sowohl gleich- als ungleichartig schneiden. Wie ersichtlich, stehen die Ebenen $\varepsilon_{123}$ u. s. w. beziehlich auf den Aehnlichkeitsaxen $A_{123}$ u. s. w. normal; so dass:

12. *Die Mittelpunkte aller Kugeln, die drei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln unter gleichen Winkeln schneiden, auf vier durch die Potenzlinie hindurchgehenden, auf den Aehnlichkeitsaxen beziehlich normal stehenden Ebenen liegen.*

Construiren wir zu den drei Kugeln $k$ die einem Radius $R$ beigeordneten Mittelpunktenkugeln, so schneiden sich, wie ersichtlich, die sechs entstehenden Kugeln viermal zu je dreien in einem Kreise und zwar in gleichen Gruppen wie die Potenzkugeln und haben so:

13. *Die Mittelpunkte aller Kugeln von gegebenem Radius, die drei Kugeln gleichwinkelig schneiden, auf Kreisen liegend. Diese Kreise schneiden sich in den nämlichen zwei Punkten der Potenzlinie, der drei Kugeln. Es giebt daher zwei Kugeln von bestimmten Radien, die drei der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln rechtwinkelig schneiden. Ihre Mittelpunkte liegen symmetrisch zu der Ebene, in der die Mittelpunkte der Kugeln $k$ liegen.*

**Folgerungen 2.** Schneiden wir die vier Mittelpunktenebenen $\varepsilon$ zu drei Kugeln $k$ durch eine Gerade, so folgt augenblicklich:

14. *Es giebt vier Kugeln, welche drei der Lage und Grösse nach gegebene gleichwinkelig schneiden und ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegend haben.*

Unter Beachtung des Lehrsatzes 13. hat man:

15. *Es giebt acht Kugeln, die mit einem gegebenen Radius beschrieben drei Kugeln gleichwinkelig schneiden und die ihre Mittelpunkte auf einer Ebene liegend haben. Die acht Mittelpunkte dieser Kugeln liegen viermal zu je zweien auf einer Geraden, die alle durch einen Punkt hindurchgehen. Diese vier Geraden bilden den Ort der Punkte in der Ebene, die sich als Mittelpunkte von Kugeln auffassen lassen, die drei gegebene gleichwinkelig schneiden.*

## III.

Tritt zu den drei Kugeln $k$ noch eine vierte — die Kugel $k_4$ — hinzu, so erhalten wir die Aehnlichkeitspunkte

$$a_{12};\ a_{13};\ a_{14};\ a_{23};\ a_{24};\ a_{34}$$
$$i_{12};\ i_{13};\ i_{14};\ i_{23};\ i_{24};\ i_{34}$$

die je zu dreien auf den Aehnlichkeitsaxen

$$A_{123};\ A_{124};\ A_{134};\ A_{234}$$
$$A_{1,23};\ A_{1,24};\ A_{1,34};\ A_{2,34}$$
$$A_{2,31};\ A_{2,41};\ A_{3,41};\ A_{3,42}$$
$$A_{3,12};\ A_{4,12};\ A_{4,13};\ A_{4,23}$$

und achtmal zu je sechsen in einer Ebene, den Aehnlichkeitsebenen

$$e_{1234};\ e_{1,234};\ e_{2,131};\ e_{3,124};\ e_{4,123}$$
$$e_{12,34};\ e_{13,24};\ e_{14,23}$$

liegen.

Die Potenzgeraden $g_{123}$; $g_{124}$; $g_{134}$; $g_{234}$, zu je drei der vier Kugeln $k$ gehörend, schneiden sich in dem Potenzpunkt $P$ oder $P_{1234}$ der vier Kugeln. Je drei der vier Kugeln $k$ besitzen vier Mittelpunktenebenen $\varepsilon$, welche je durch die zugehörige Potenzlinie und folglich alle durch den Potenzpunkt $P$ hindurchgehen. Wir haben die Mittelpunktenebenen

$$\varepsilon_{123};\ \varepsilon_{1,23};\ \varepsilon_{2,31};\ \varepsilon_{3,12}$$
$$\varepsilon_{124};\ \varepsilon_{1,24};\ \varepsilon_{2,14};\ \varepsilon_{4,12}$$
$$\varepsilon_{134};\ \varepsilon_{1,34};\ \varepsilon_{3,14};\ \varepsilon_{4,13}$$
$$\varepsilon_{234};\ \varepsilon_{2,34};\ \varepsilon_{3,24};\ \varepsilon_{4,23}\,.$$

Von diesen gehen je die in horizontaler Reihe geschriebenen durch die Potenzgeraden $g_{123}$; $g_{124}$; $g_{134}$; $g_{234}$. Diese Ebenen schneiden sich in $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ durch $P$ gehenden Geraden. Zu diesen gehören die Potenzgeraden $g$ als sechsfache Linien. Wir haben nun noch die 96 übrigen

Schnittlinien aufzusuchen, und ihre Bedeutung zu ermitteln. Die Ebene $\varepsilon_{123}$ wird von allen zwölf Ebenen $\varepsilon_{124}$ bis $\varepsilon_{4,23}$ geschnitten. Die Schnittlinie mit der Ebene $\varepsilon_{124}$ sei mit $g_{1234}$ bezeichnet. Jeder Punkt dieser Geraden ist erstens als Mittelpunkt einer Kugel, die die Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$ und zweitens als Mittelpunkt einer Kugel, die die Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$ gleichartig und gleichwinkelig schneidet, aufzufassen. Diese beiden Kugeln fallen daher zusammen, weil diese beiden Kugeln in Bezug auf $k_1$ und $k_2$ äussere sind und nach Lehrsatz 7. jeder Punkt des Raumes in Bezug auf zwei Kugeln Mittelpunkt von nur einer äusseren Kugel ist. Die Punkte der Geraden $g_{1234}$ sind also Mittelpunkte von Kugeln, die alle vier Kugeln $k$ gleichwinkelig und gleichartig schneiden. Durch diese Geraden müssen daher auch die Ebenen $\varepsilon_{134}$ und $\varepsilon_{234}$ gehen. Die Ebene $\varepsilon_{123}$ wird von der Ebene $\varepsilon_{4,12}$ in Geraden $g_{4,123}$ geschnitten. Jeder Punkt dieser Geraden ist Mittelpunkt einer Kugel, welche die Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$ gleichartig und eine Kugel, welche die Kugeln $k_1$ und $k_2$ gleichartig, hingegen aber je die Kugelpaare $k_1$ und $k_4$ wie $k_2$ und $k_4$ ungleichartig schneiden. Es fallen daher nach Lehrsatz 7. diese beiden Kugeln ebenfalls zusammen. Es müssen daher durch diese Gerade die Ebenen $\varepsilon_{4,23}$ und $\varepsilon_{1,13}$ gehen. Die Schnittlinien der Ebene $\varepsilon_{123}$ mit den sechseckigen Ebenen enthalten Punkte, die sich als Mittelpunkte von Kugelpaaren ergeben, von denen die eine Kugel in Bezug auf zwei der drei Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$ eine innere und die andere eine äussere ist, die somit nicht zusammenfallen. Auf gleiche Weise zeigt man, dass in jeder der Ebenen $\varepsilon$ zwei Geraden $g$ liegen, deren Punkte sich als Mittelpunkte von Kugeln $M$, die die vier Kugeln $k$ gleichwinkelig schneiden, auffassen lassen, und sieben Geraden, bei denen dies nicht stattfindet. Wir erhalten so nachfolgende Zusammenstellung.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Die Ebenen $\varepsilon_{123}$; | $\varepsilon_{124}$; | $\varepsilon_{134}$; | $\varepsilon_{234}$ | schneiden sich in der Geraden | $g_{1234}$ |
| $\varepsilon_{123}$; | $\varepsilon_{4,12}$; | $\varepsilon_{4,13}$; | $\varepsilon_{4,23}$ | " " " " | $g_{4,123}$ |
| $\varepsilon_{124}$; | $\varepsilon_{3,12}$; | $\varepsilon_{3,14}$; | $\varepsilon_{3,24}$ | " " " " | $g_{3,124}$ |
| $\varepsilon_{134}$; | $\varepsilon_{2,13}$; | $\varepsilon_{2,14}$; | $\varepsilon_{2,34}$ | " " " " | $g_{2,134}$ |
| $\varepsilon_{234}$; | $\varepsilon_{1,34}$; | $\varepsilon_{1,23}$; | $\varepsilon_{1,24}$ | " " " " | $g_{1,234}$ |
| $\varepsilon_{1,23}$; | $\varepsilon_{4,23}$; | $\varepsilon_{2,14}$; | $\varepsilon_{3,14}$ | " " " " | $g_{14,23}$ |
| $\varepsilon_{1,24}$; | $\varepsilon_{3,24}$; | $\varepsilon_{2,13}$; | $\varepsilon_{4,13}$ | " " " " | $g_{13,24}$ |
| $\varepsilon_{1,34}$; | $\varepsilon_{2,34}$; | $\varepsilon_{3,12}$; | $\varepsilon_{4,12}$ | " " " " | $g_{12,34}$ |

Jede dieser Geraden $g$ repräsentirt sechs Schnittgeraden, weil durch jede vier Ebenen hindurchgehen. Diese acht Geraden $g$ stehen beziehlich auf den acht Aehnlichkeitsebenen der vier Kugeln normal, weil je die vier durch diese Geraden hindurchgehenden Ebenen $\varepsilon$ je auf einer in der betreffenden Aehnlichkeitsebene liegenden Aehnlichkeitsaxe normal steht. Es ist $g_{1234}$ normal zu $e_{1234}$ u. s. w. und wir haben so:

16. *Die Mittelpunkte aller Kugeln, welche vier der Lage und Grösse nach gegebene gleichwinkelig schneiden, liegen auf acht durch den Potenzpunkt der vier Kugeln hindurchgehenden und je auf den Aehnlichkeitsebenen normal stehenden Geraden — den Mittelpunktengeraden.*

Denken wir uns die einem bestimmten Radius beigeordneten Mittelpunktenkugeln construirt, so hat man ohne weiteres:

17. *Die zwölf zu vier Kugeln und einem bestimmten Radius beigeordneten Mittelpunktenkugeln schneiden sich achtmal zu je sechs in zwei Punkten, und zwar*

1. *Einmal alle sechs äusseren;*
2. *Viermal drei äussere mit den drei nicht zugehörenden inneren;*
3. *Dreimal je vier innere mit zwei äusseren,*

und daraus folgt:

18. *Es giebt sechszehn Kugeln, welche mit einem bestimmten Radius beschrieben vier gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden. Es sondern sich die Mittelpunkte dieser Kugeln achtmal in Paaren so ab, dass die eines jeden Paares zu der zugehörigen Aehnlichkeitsebene symmetrisch liegen.*

Beschreibt man die zwölf Mittelpunktenkugeln, welche dem Radius der Orthogonalkugel beigeordnet sind, so gehen diese sämmtlich durch den Potenzpunkt und schneiden jede Mittelpunktengeraden noch in einem weiteren Punkte. Man hat daher:

19. *Es giebt ausser der Orthogonalkugel noch acht Kugeln, welche mit dem Radius der Orthogonalkugel beschrieben die vier Kugeln $k$ gleichwinkelig schneiden. Die Mittelpunkte dieser Kugeln sind die Gegenpunkte des Potenzpunktes in Bezug auf die acht Aehnlichkeitsebenen.*

**Folgerung 3.** Schneidet man die acht Mittelpunktengeraden $g$ zu vier Kugeln $k$ durch eine beliebige Ebene, so hat man:

20. *Acht Kugeln, welche vier der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden und ihre Mittelpunkte in einer gegebenen Ebene liegend haben.*

## IV.

Kommt zu den vier Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_3$; $k_4$ noch eine fünfte, die Kugel $k_5$ hinzu, so erhalten wir Systeme von Aehnlichkeitspunktengeraden und Ebenen, sowie von Mittelpunktenebenen und Geraden. Man hat die Mittelpunktengeraden:

(1) $$g_{1234};\ g_{1235};\ g_{1245};\ g_{1345};\ g_{2345}$$

(2) $$g_{1,234};\ g_{1,235};\ g_{1,245};\ g_{1,345};\ g_{2,345}$$

u. s. w.

und die Mittelpunktenebenen

(1) $\varepsilon_{123}$; $\varepsilon_{124}$; $\varepsilon_{125}$; $\varepsilon_{134}$; $\varepsilon_{135}$; $\varepsilon_{145}$; $\varepsilon_{234}$; $\varepsilon_{235}$; $\varepsilon_{245}$; $\varepsilon_{345}$

(2) $\varepsilon_{1,23}$; $\varepsilon_{1,24}$; $\varepsilon_{1,25}$; $\varepsilon_{1,34}$; $\varepsilon_{1,35}$; $\varepsilon_{1,45}$; $\varepsilon_{2,34}$; $\varepsilon_{2,35}$; $\varepsilon_{2,45}$; $\varepsilon_{3,45}$

u. s. w.

Durch jede der Geraden $g$ gehen die Ebenen, oder treffen sich wenigstens im Potenzpunkt die Ebenen, welche mit den gleichen Indices behaftet sind, wie die Gerade selbst. Jede andere Ebene trifft die Geraden $g$ in Punkten, die wir näher zu untersuchen haben. Die Gerade $g_{1234}$ trifft die Ebene $\varepsilon_{125}$ in dem Punkte $M_{12345}$. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt einer Kugel, die die vier Kugeln $k_1$ bis $k_4$ und der Mittelpunkt einer Kugel, die die drei Kugeln $k_1$; $k_2$; $k_5$ gleichwinkelig und gleichartig schneiden. Diese beiden Kugeln schneiden also die Kugeln $k_1$ und $k_2$ gleichartig und müssen daher nach Lehrsatz 7. zusammenfallen. $M_{12345}$ ist somit der Mittelpunkt einer Kugel, die die sämmtlichen gegebenen fünf gleichartig unter gleichen Winkeln schneidet. Durch diesen Punkt gehen daher die Geraden $g_{1234}$; $g_{1235}$; $g_{1245}$; $g_{1345}$; $g_{2345}$ und die zehn Ebenen $\varepsilon_{123}$; $\varepsilon_{124}$; $\varepsilon_{125}$; $\varepsilon_{134}$; $\varepsilon_{135}$; $\varepsilon_{145}$; $\varepsilon_{234}$; $\varepsilon_{235}$; $\varepsilon_{245}$; $\varepsilon_{345}$. Die Gerade $g_{1234}$ schneidet die Ebene $\varepsilon_{5,12}$ in dem Punkte $M_{5,1234}$. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt einer Kugel, welche die vier Kugeln $k_1$ bis $k_4$ gleichartig und gleichwinkelig und je $k_5$ in Bezug auf die vier erstern ungleichartig schneidet. Die Schnittpunkte der Geraden $g_{1234}$ mit den obigen ebenen führen zu keinen Punkten mehr, die Mittelpunkte von Kugeln, die die gegebenen fünf gleichwinkelig schnitten, wären. Denn wir sehen, dass jeder dieser Schnittpunkte Mittelpunkte von zwei Kugeln, von denen die eine irgend zwei der fünf gegebenen Kugeln gleichartig und die andere sie ungleichartig aber gleichwinkelig schneiden und somit nicht zusammenfallen können. Auf diese Weise sehen wir, dass es im Allgemeinen auf jeder Geraden $g$ zwei Punkte $M$ giebt und wir die sechszehn Punkte

$$M_{12345};\ M_{1,2345};\ M_{2,3451};\ M_{3,4512};\ M_{4,5123};\ M_{5,1234};\ M_{12,345};\ M_{13,452}$$
$$M_{14,523};\ M_{15,234};\ M_{23,451};\ M_{24,513};\ M_{25,134};\ M_{34,512};\ M_{35,124};\ M_{45,123}$$

erhalten. Oder:

21. *Es giebt sechszehn Kugeln, welche fünf der Lage und Grösse nach gegebene Kugeln gleichwinkelig schneiden, und zwar giebt es*

1. *Eine Kugel, welche alle fünf gleichartig,*
2. *Fünf Kugeln, welche je eine in Bezug auf die anderen vier ungleichartig und*
3. *Zehn Kugeln, welche je zwei Kugeln in Bezug auf die anderen drei ungleichartig schneiden.*

An diese Resultate schliessen sich ohne weiteres die folgenden an:

22. *Von den Mittelpunkten der sechszehn, fünf gegebene Kugeln gleichwinkelig schneidenden Kugeln liegen vierzigmal je zwei mit einem der fünf Potenzpunkte in einer Geraden. Durch jeden Mittelpunkt gehen*

*fünf und durch jeden Potenzpunkt gehen acht dieser Geraden. Ausserdem liegen von diesen Mittelpunkten vierzigmal je fünf mit zwei Potenzpunkten in einer Ebene. Von diesen Ebenen gehen durch jeden Mittelpunkt zehn, durch jeden Potenzpunkt sechszehn und durch jede der obigen Geraden vier.*

Es würden sich noch eine Menge von interessanten Resultaten ergeben, wenn man die Lagenverhältnisse und metrischen Relationen, die zwischen den 16 Kugeln existiren, untersuchen würde. Besonders die Fragen: 1. Unter welchen Umständen reduzirt sich die Anzahl der Lösungen? 2. Wann und in welcher Zahl treten imaginäre Kugeln auf? 3. Wann und in welcher Zahl treten reelle, aber imaginär schneidende Kugeln auf, lassen sich sehr einfach beantworten. Ich behalte mir vor, auf diese Beziehungen später zurückzukommen.

*Bemerkung.* Es ist nun nicht mehr schwierig, die von Steiner gestellte Aufgabe: Vier Kreise durch einen fünften unter gleichen Winkeln zu schneiden, zu lösen.

Solothurn, den 17. März 1871.

# Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung.*)

Von E. Hossenfelder in Graudenz.

Die Abhandlung Riemann's über die durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen (Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 7) hat den Anstoss zu Untersuchungen gegeben, welche die Theorie der linearen Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung erheblich gefördert haben. Herr Fuchs hat im 66. und 68. Bande des Crelle'schen Journals eine Reihe von Lehrsätzen entwickelt, die den Verlauf der Integrale einer solchen Differentialgleichung in der Umgebung der Verzweigungspunkte erkennen lassen und besonders deshalb wichtig sind, weil sie die Bedingungen enthalten, welche eine *logarithmische* Mehrdeutigkeit der Lösungen nach sich ziehen oder ausschliessen. Von den dort entwickelten Sätzen mögen diejenigen, welche in dem Folgenden zur Verwendung kommen, hier kurz aufgezählt werden.

Die zu behandelnde Differentialgleichung gehört zu der Klasse derjenigen, welche die Form haben:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{f_{\varrho-1}}{\psi}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{f_{2(\varrho-1)}}{\psi^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + \frac{f_{(n-1)(\varrho-1)}}{\psi^{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{f_{n(\varrho-1)}}{\psi^n}y = 0,$$

wo $\Psi = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$, und $f_\varkappa$ eine ganze rationale Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von $x$ ist. Die singulären Punkte der Integrale einer solchen Differentialgleichung sind $a_1, a_2, \ldots a_\varrho, \infty$; zu jedem derselben gehört eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades, von Herrn Fuchs *die zu diesem Punkte gehörige determinirende Fundamentalgleichung* genannt, deren Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_n$ seien. Sind nicht zwei derselben gleich oder nur um ganze Zahlen verschieden, so giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots y_n$ von der Beschaffenheit, dass

$$y_\varkappa = (x-a)^{r_\varkappa}\varphi_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

wo $\varphi_\varkappa$ eine in der Umgebung von $a$ endliche, eindeutige und für $x = a$ von 0 verschiedene Function von $x$ bedeutet. Giebt es hingegen unter den Wurzeln eine Gruppe von solchen, welche gleich

*) Diese Arbeit ist, abgesehen von einigen Aenderungen in der Darstellung, zuerst erschienen in dem Ostern 1871 ausgegebenen Programm des Gymnasiums zu Graudenz.

oder nur um ganze Zahlen verschieden sind, und enthält diese Gruppe die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, so gehört zu derselben ein System von $\lambda$ Integralen:

$$y_\varkappa = (x-a)^{r_\varkappa} \sum_{b=1}^{b=\varkappa} \varphi_{\varkappa b} [\log(x-a)]^{b-1}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots \lambda).$$

Hierbei sind die Wurzeln $r$ so geordnet zu denken, dass der reelle Theil irgend einer derselben nicht kleiner ist, als der reelle Theil irgend einer nachfolgenden. Die Functionen $\varphi_{\varkappa 1}, \ldots \varphi_{\varkappa\varkappa}$ sind in der Umgebung von $a$ endlich, eindeutig und continuirlich und für $x = a$ nicht sämmtlich 0. Für den singulären Punkt $x = \infty$ gilt dasselbe, wenn man statt $(x - a)$ setzt $\frac{1}{x}$. In dem Falle, dass zwei oder mehrere Wurzeln der Gruppe gleich sind, *müssen* Logarithmen auftreten; sind dagegen nicht zwei Wurzeln gleich, so *können* die mit Logarithmen behafteten Glieder verschwinden, und es werden hierfür von Herrn Fuchs (Crelle, Bd. 68, Nr. 5—7) die analytischen Bedingungen entwickelt.

Durch diese Betrachtungen sind die Integrale jeder solchen Differentialgleichung den Forderungen der modernen Analysis gemäss durch das Verhalten an den Unstetigkeitsstellen ausreichend bestimmt; doch behalten diejenigen Fälle ihr besonderes Interesse, in welchen es gelingt, für die Lösungen einen geschlossenen Ausdruck in Form eines bestimmten Integrals zu finden, zumal da durch die Integration zwischen imaginären Grenzen die linearen homogenen Relationen, welche zwischen $n+1$ Integralen einer Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung stattfinden müssen, sich leicht herstellen lassen. Angeregt durch die Vorlesungen und den Rath meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Richelot in Königsberg, bin ich mit diesem Zweige der Analysis beschäftigt gewesen. Geleitet durch die Analogie bin ich, ausgehend von dem bestimmten Integral

$$\int (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} \ldots . (u-a_n)^{b_n-1} (u-x)^{\lambda-1} du,$$

zwischen 2 Verzweigungspunkten der Function unter dem Integralzeichen genommen, zu einer Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung gelangt, welche für $n = 2$ in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe übergeht. Inzwischen hat Herr Pochhammer dieselbe Differentialgleichung auf einem anderen Wege gefunden (Crelle's Journal Bd. 71, S. 316).

Herr Pochhammer geht aus von einer Function

$$H\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n & \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_n & x \end{pmatrix},$$

der er folgende Eigenschaften beilegt:

1) dieselbe soll das vollständige Integral einer linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung sein;
2) sie soll nur die $n+1$ Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ und $\infty$ zu singulären Punkten haben;
3) für jeden endlichen singulären Punkt $a_\nu$ soll sie in die Summe zweier Functionen zerlegbar sein, von denen die erste einer convergenten, die ganzen positiven Potenzen von $x - a_\nu$ enthaltenden Reihe mit willkürlichen Constanten für die $n-1$ ersten Coefficienten gleich ist, während die zweite durch Division mit der Potenz $(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}$ in der Umgebung des Punktes $a_\nu$ endlich, eindeutig und von Null verschieden wird, und eine $n^{\text{te}}$ willkürliche Constante zum Factor hat;
4) für den singulären Werth $x=\infty$ soll sie in die Summe zweier Functionen zerlegbar sein, deren eine nach Division durch die Potenz $x^{\lambda-1}$ einer convergenten, die negativen ganzen Potenzen von $x$ enthaltenden Reihe mit willkürlichen Constanten für die $n-1$ ersten Coefficienten gleich ist, während die andere, welche die $n^{\text{te}}$ willkürliche Constante enthält, ebenfalls nach Division durch eine Potenz von $x$ für alle hinreichend grossen Werthe des $x$ eindeutig, endlich und von Null verschieden ist.

Herr Pochhammer weist dann nach, dass die Differentialgleichung, welcher die Function $H$ genügt, durch jene bestimmten Integrale gelöst wird; jedoch besitzt von den $n-1$ Integralen, von denen behauptet wird, dass sie in der Umgebung des Werthes $a_\varkappa$ endlich und eindeutig sind, das eine diese Eigenschaft nicht, wie schon Herr Fuchs (Crelle's Journal Bd. 72) gezeigt hat. Dieses eine Integral, welches von $a_\lambda$ bis $x$ zu erstrecken ist, wo $\lambda$ von $\varkappa$ verschieden sein muss, geht bei einem Umlauf von $x$ um $a_\varkappa$ in eine lineare Function anderer Integrale über, ist also jedenfalls in der Nähe von $a_\varkappa$ nicht eindeutig; jedoch kann ich mit der Behauptung des Herrn Fuchs, dass es deswegen in der Entwickelung für die Umgebung von $a_\varkappa$ Logarithmen enthalten müsse, nicht übereinstimmen. An der betreffenden Stelle dieser Arbeit, in der ich auch die noch fehlenden von Herrn Pochhammer übersehenen Integrale aufstellen werde, komme ich auf den eben angeregten Punkt zurück.

## I.

Es werde gesetzt:

$$(1)\; y = \int_a^b (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

alsdann folgt durch Differentiation:

$$(1_a)\qquad -\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{dy}{dx}=\int\limits_a^b (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-2}\,du$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(-1)^n\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n)}\,\frac{d^ny}{dx^n}=\int\limits_a^b (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-n-1}\,du.$$

Setzt man

$$(u-a_1)(u-a_2)\,\dots\,(u-a_n)=\varphi(u),$$
$$(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\,\dots\,(u-a_n)^{b_n-1}=\Phi(u),$$
$$(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-n}=f(u),$$

so folgt durch logarithmische Differentiation:

$$df(u)=f(u)\left\{\frac{b_1}{u-a_1}+\frac{b_2}{u-a_2}+\dots+\frac{b_n}{u-a_n}+\frac{\lambda-n}{u-x}\right\}du,$$

und durch Integration

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f(u)\left\{\frac{b_1}{u-a_1}+\dots+\frac{b_n}{u-a_n}+\frac{\lambda-n}{u-x}\right\}du$$
$$=\int\limits_a^b (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}du\left\{\frac{b_1\,\varphi(u)\,(u-x)^{\lambda-n}}{u-a_1}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{b_n\,\varphi(u)\,(u-x)^{\lambda-n}}{u-a_n}+(\lambda-n)\,\varphi(u)\,(u-x)^{\lambda-n-1}\right\}.$$

Setzt man $u-x=\xi$, also $u-a_\varkappa=\xi+x-a_\varkappa$, und entwickelt man den Ausdruck in der Klammer nach Potenzen von $\xi$, so wird:

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b\Phi(u)\,du\left\{\begin{array}{l} b_1\,\xi^{\lambda-n}\{\xi^{n-1}+X_1^1\,\xi^{n-2}+X_1^2\,\xi^{n-3}+\dots+X_1^{n-1}\}\\ +\,b_2\,\xi^{\lambda-n}\{\xi^{n-1}+X_2^1\,\xi^{n-2}+X_2^2\,\xi^{n-3}+\dots+X_2^{n-1}\}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +\,b_n\,\xi^{\lambda-n}\{\xi^{n-1}+X_n^1\,\xi^{n-2}+X_n^2\,\xi^{n-3}+\dots+X_n^{n-1}\}\\ +\,(\lambda-n)\,\xi^{\lambda-n-1}\{\xi^n+X^1\,\xi^{n-1}+\dots\dots+X^n\}\end{array}\right\}.$$

Hierin bedeutet $X^\varkappa$ die Summe der Produkte von je $\varkappa$ der $n$ Grössen $(x-a_1),\dots(x-a_n)$, und $X_\lambda^\varkappa$ die Summe der Produkte von je $\varkappa$ der $n-1$ Grössen $(x-a_1)\dots(x-a_{\lambda-1})(x-a_{\lambda+1})\dots(x-a_n)$.

Ordnet man nach Potenzen von $\xi$, so erhält man

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b\Phi(u)\,du\left\{\begin{array}{l} \xi^{\lambda-1}(b_1+b_2+\dots b_n+\lambda-n)\\ +\,\xi^{\lambda-2}(b_1X_1^1+b_2X_2^1+\dots+b_nX_n^1+(\lambda-n)X^1)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +\,\xi^{\lambda-\varkappa-1}(b_1X_1^\varkappa+b_2X_2^\varkappa+\dots+b_nX_n^\varkappa+(\lambda-n)X^\varkappa)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +\,\xi^{\lambda-n}(b_1X_1^{n-1}+b_2X_2^{n-1}+\dots+b_nX_n^{n-1}+(\lambda-n)X^{n-1}\\ +\,\xi^{\lambda-n-1}(\lambda-n)\,X^n\end{array}\right\}.$$

Wenn nun $f(b) - f(a) = 0$ ist, so erhält man hieraus durch Benutzung der Relationen (1) und ($1_a$):

$$\begin{aligned}0 = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \lambda - n)\,y &- \frac{1}{\lambda - 1}\,[b_1 X_1^1 + \cdots + b_n X_n^1 + (\lambda - n) X^1]\,\frac{dy}{dx} \\ &+ \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)}\,[b_1 X_1^2 + \cdots + b_n X_n^2 + (\lambda - n) X^2]\,\frac{d^2 y}{dx^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (2)\quad &+ (-1)^\varkappa \frac{1}{(\lambda-1)\ldots(\lambda-\varkappa)}\,[b_1 X_1^\varkappa + \cdots + b_n X_n^\varkappa + (\lambda - n) X^\varkappa]\,\frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (-1)^n \frac{1}{(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)} \cdot (\lambda - n) X^n \frac{d^n y}{dx^n}.\end{aligned}$$

Folglich repräsentirt diese Formel (2) eine Differentialgleichung, welcher das Integral $y$ (1) genügen wird, sobald nur $f(b) - f(a) = 0$ ist. $f(b) - f(a)$ wird zunächst $= 0$, wenn $a$ und $b$ zwei der Grössen $a_1, \ldots a_n$ sind und die zugehörigen Exponenten einen positiven reellen Theil haben.*) $f(a)$ verschwindet aber auch, wenn $a = \infty$ ist und $b_1 + \cdots + b_n + \lambda - n < 0$. Diese Grenze $\infty$ hat Herr Pochhammer übersehen, obgleich sie ja auch bei dem bestimmten Integral, welches die gewöhnliche hypergeometrische Reihe summirt, auftritt. Schliesslich wird $f(a)$ auch 0, wenn $a = x$ und $\lambda - n > 0$ ist, doch ist hierbei zu berücksichtigen, dass, wenn eine Grenze des Integrals $x$ ist, bei den Differentialquotienten noch Glieder auftreten, welche von der Differentiation nach der Grenze herrühren. Integrirt man bis zu einem sehr nahe an $x$ liegenden Werthe $x - \varepsilon$, so treten auf der linken Seite der Gleichung (2) eine Reihe von Gliedern auf, welche je nach Umständen für $\varepsilon = 0$ verschwinden oder unendlich werden. Die Bedingung für ihr Verschwinden muss also übereinstimmen mit der Bedingung dafür, dass die rechte Seite endlich ist. Somit kann man das Integral (1) auch mit dem Grenzwerth $x$ als Lösung der Gleichung (2) ansehen, so lange es bis zu dieser Grenze integrirt einen Sinn hat, d. h. so lange $\lambda > 0$, indem man weiss, dass seine Differentialquotienten bis zum $n^{\text{ten}}$ hin in irgend welcher völlig bestimmten Form existiren, auch wenn die Differentiation unter dem Integralzeichen unstatthaft sein sollte.

Das Integral (1) ist also, zwischen zwei beliebigen der Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n, x, \infty$ erstreckt, eine Lösung der Differentialgleichung (2), so lange die Function unter dem Integralzeichen nicht für einen der Grenzwerthe so unendlich wird, dass die Integration bis zu demselben hin unzulässig. Auch leuchtet ein, dass die Bedingungen

$$b_1 > 0,\quad b_2 > 0,\ \ldots\ b_n > 0,\quad \lambda > 0,$$
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \lambda - n < 0$$

*) Der Kürze wegen möge in der Folge $b > 0$ oder $b < 0$ immer bedeuten, dass der reelle Theil der Grösse $b$ positiv resp. negativ anzunehmen ist.

sämmtlich neben einander bestehen können, wohingegen die Pochhammer'schen Bedingungen $b_1 > 0, \ldots, b_n > 0$, $\lambda - n > 0$ eine Integration bis $\infty$ unmöglich machen würden.*)

Es ist nun leicht, diese Differentialgleichung auf die Form zu bringen, welche Herr Pochhammer aufgestellt hat. Es lassen sich sämmtliche Grössen $X^\lambda$ durch $X^n$ und sämmtliche Grössen $X_\varkappa^\lambda$ durch $X_\varkappa^{n-1}$ ausdrücken. Zu dem Ende bemerke man, dass $X_\varkappa^\lambda$, welches seiner Definition nach die Summe der Produkte aus je $\lambda$ der $n-1$ Grössen $x - a_1$, $x - a_2$, ... $x - a_{\varkappa-1}$, $x - a_{\varkappa+1}$, ..., $x - a_n$ ist, eine Summe sein muss, welche $\frac{(n-1).(n-2)\ldots(n-\lambda)}{1.2\ldots\lambda}$ Glieder von je $\lambda$ Factoren enthält, während $X_\varkappa^{\lambda-1}$ $\frac{(n-1).(n-2)\ldots(n-\lambda+1)}{1.2\ldots(\lambda-1)}$ Glieder von je $\lambda - 1$ Factoren hat.

Differentiirt man $X_\varkappa^\lambda$ nach $x$, so giebt jedes Glied eine Summe von $\lambda$ Gliedern, von denen jedes $\lambda - 1$ Factoren enthält. Also enthält $\frac{dX_\varkappa^\lambda}{dk} \cdot \frac{(n-1).(n-2)\ldots(n-\lambda)}{1.2\ldots\lambda} \cdot \lambda$ Glieder mit je $\lambda - 1$ Factoren. Die in $\frac{dX_\varkappa^\lambda}{dx}$ enthaltenen Glieder können aber nur der Anzahl nach sich von den in $X_\varkappa^{\lambda-1}$ enthaltenen unterscheiden, also ist:

$$\frac{dX_\varkappa^\lambda}{dx} = (n-\lambda)\, X_\varkappa^{\lambda-1}.$$

Aus demselben Grunde ist, wenn ich $n-1$ mit $n$ vertausche:

$$\frac{dX^\lambda}{dx} = (n+1-\lambda)\, X^{\lambda-1}.$$

Hieraus folgt:

$$X_\varkappa^{n-2} = \frac{dX_\varkappa^{n-1}}{dx} \qquad\qquad X^{n-1} = \frac{dX^n}{dx}$$

$$X_\varkappa^{n-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 X_\varkappa^{n-1}}{dx^2}, \qquad\qquad X^{n-2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 X^n}{dx^2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$X_\varkappa^\mu = \frac{1}{(n-\mu-1)!} \frac{d^{n-\mu-1} X_\varkappa^{n-1}}{dx^{n-\mu-1}}, \qquad X^\mu = \frac{1}{(n-\mu)!} \frac{d^{n-\mu} X^n}{dx^{n-\mu}}.$$

Nun ist:

$$X^n = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = \varphi(x),$$

$$X_\varkappa^{n-1} = (x-a_1)\ldots(x-a_{\varkappa-1})(x-a_{\varkappa+1})\ldots(x-a_n) = \frac{\varphi(x)}{x-a_\varkappa},$$

---

*) In einem mit der oben genannten Programmabhandlung gleichzeitig erschienenen Hefte des Crelle'schen J. (Bd. 73, p. 135) zeigt übrigens Pochhammer, dass an der Grenze $x$ die Ungleichheit $\lambda > 0$ als genügend anzusehen ist; ebenso wird dort die Grenze $\infty$ nachgetragen, wodurch dann unter Beseitigung der früher fälschlich als eindeutig angesehenen Integrale das zu jedem singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem in Uebereinstimmung mit dieser Arbeit vervollständigt ist.

also geht die Differentialgleichung, wenn ich sie mit $(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)$ multiplicire, über in die folgende:

$$\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}(-1)^{n-\varkappa}\left\{\frac{(\lambda-n+1)\ldots(\lambda-\varkappa-1)}{1.2\ldots(n-\varkappa-1)}\frac{d^{n-\varkappa-1}\psi(x)}{dx^{n-\varkappa-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda-n)\ldots(\lambda-\varkappa-1)}{1.2\ldots(n-\varkappa)}\frac{d^{n-\varkappa}\varphi(x)}{dx^{n-\varkappa}}\right\}\frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa}=0,$$

wo

$$\Psi(x)=\varphi(x)\frac{d\log(x-a_1)^{b_1}\ldots(x-a_n)^{b_n}}{dx}$$

ist.

## II.

Die erhaltene Differentialgleichung gehört offenbar zu der Klasse jener, deren Integrale die in der Einleitung aufgezählten Eigenschaften besitzen; die einzigen Werthe, für welche die Coefficienten nach der Division durch $\varphi(x)$ unendlich werden, sind $a_1, a_2, \ldots a_n$, mithin sind die singulären Werthe der Lösungen $a_1, \ldots a_n, \infty$. Ich gehe jetzt dazu über, für jeden singulären Punkt diejenigen bestimmten Integrale aufzustellen, welche das zugehörige Fundamentalsystem ausmachen.

Wenn eine Function $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $a$ sich verzweigt, wie $(x-a)^\nu$, so ist nach einem Umlauf von $x$ um $a$ in positiver Richtung (nach der üblichen Festsetzung dem Laufe eines Uhrzeigers entgegengesetzt) der hierdurch erhaltene Zweig der Function

$$[f(x)]'=e^{2\pi i\nu}f(x).$$

Sucht man nun diejenigen $n$ bestimmten Integrale, welche mit ihren durch einen Umlauf von $x$ um $a$ veränderten Werthen in einer derartigen Beziehung stehen, so werden diese, vorausgesetzt, dass nicht zwischen ihnen eine lineäre homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, das zu dem Punkte $a$ gehörige Fundamentalsystem bilden; die Exponenten $\nu$ sind dann bis auf ganze Zahlen die Wurzeln der zu dem Punkte $a$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung.

Um das Eindeutigkeitsgebiet der Function unter dem Integralzeichen

$$U=(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}$$

zu erhalten, denke man sich eine sich selbst nicht schneidende, sonst beliebige Linie von $a_1$ über $a_2, \ldots a_n$ bis $\infty$ gezogen, welche von $\infty$ wieder bis zum Punkte $x$ geht. Von den Zweigen jedes in $U$ enthaltenen Factors denke man sich für einen Punkt $u_0$ und ein gegebenes $x_0$ einen bestimmten fixirt, so ist dadurch der Verlauf der Function $U$ für das ganze Gebiet eindeutig festgesetzt. Positiv heisse diejenige Seite des Verzweigungsschnittes, welche bei der Wanderung von $a_1$ aus zur Linken liegt. Vergleichen wir die Werthe der Function $U$

an der positiven und negativen Seite des Verzweigungsschnittes, so ist es klar, dass auf der Strecke

$$\begin{array}{ll} \text{von } a_1 \text{ bis } a_2 & : U^- = e^{2\pi i b_1} U^+ \\ \text{von } a_2 \text{ bis } a_3 & : U^- = e^{2\pi i (b_1 + b_2)} U^+ \\ \dots\dots & \\ \text{von } a_\varkappa \text{ bis } a_{\varkappa+1} & : U^- = e^{2\pi i (b_1 + \dots + b_\varkappa)} U^+ \\ \dots\dots & \\ \text{von } \infty \text{ bis } x & : U^- = e^{-2\pi i \lambda} U^+ \text{ ist.} \end{array}$$

Unter den Integralen zwischen zwei Verzweigungspunkten, welche ich mit $(a_\varkappa, a_\lambda)$ resp. mit $(a_n, \infty)$ und $(\infty, x)$ bezeichne, will ich die auf der positiven Seite des Verzweigungsschnittes erstreckten verstanden wissen, und es sollen auch die Integrale $(a_\varkappa, x)$ ihre Ausgangspunkte an der positiven Seite nehmen; dagegen möge das Integral $(a_1, \infty)$ von $a_1$ ausgehend auf einem Wege die Unendlichkeit erreichen, welcher, sonst willkürlich innerhalb des Gebietes, schliesslich in das negative Ufer des Schnittes mündet.

Da ich im Begriffe bin, diese Integrale als Functionen von $x$ bei unbeschränkter Veränderlichkeit dieses Arguments zu betrachten, so ist die *Art* ihrer Abhängigkeit von $x$ näher ins Auge zu fassen. Wenn $x$ sich ändert, so ändert sich bei sämmtlichen Integralen die zu integrirende Function wegen des Factors $(u-x)^{\lambda-1}$; es ändert sich ferner bei den Integralen $(a_\varkappa, x)$ und $(\infty, x)$ die obere Grenze, somit der Integrationsweg; jedoch nicht nur bei diesen, sondern auch bei den Integralen mit *constanten* Grenzen wird der Weg nicht immer derselbe bleiben können, indem durch die Aenderung von $x$ der Verzweigungsschnitt ein anderer wird und hierdurch die dem Wege dieser Integrale auferlegte Beschränkung unter Umständen nur durch eine Aenderung des Weges aufrecht erhalten werden kann. Geht $x$ von einem Werthe $x_0$ zu einem Werthe $x_1$ über, ohne dass durch diesen Uebergang die Natur des construirten Gebietes, dessen Verzweigungsschnitt der gemachten Annahme zufolge sich nicht durchschneiden soll, alterirt wird, so gehen *sämmtliche* Integrale offenbar stetig in völlig bestimmte andere über. Geht $x$ unter derartiger Beschränkung von $x_0$ bis $x_1$, so ist

$$\begin{aligned} (a_\varkappa, x_1) &= \int_{a_\varkappa}^{x_1} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-x_1)^{\lambda-1}\, du \\ (1) \qquad &= \int_{a_\varkappa}^{x_0} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-x_1)^{\lambda-1}\, du \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-x_1)^{\lambda-1}\, du, \end{aligned}$$

wo das zweite Integral dem Wege von $x$ zu folgen hat, und zwar auf der positiven oder negativen Seite desselben, je nachdem man das von $a_\varkappa$ bis $x_0$ erstreckte Integral auf der positiven oder negativen Seite des nunmehr verlängerten Verzweigungsschnittes anlangen lassen will. Da die Gleichung (1) in beiden Fällen richtig ist, so wird man seine Wahl nach der grösseren Leichtigkeit der Anschauung treffen. Diese Gleichung gilt auch, wenn $\infty$ die constante Grenze ist. Zu bemerken ist hierbei noch, dass $(u-x_1)^{\lambda-1}$ eine abgekürzte Bezeichnung für denjenigen Werth des Factors $(u-x)^{\lambda-1}$ ist, welcher aus $(u-x_0)^{\lambda-1}$ bei der Wanderung des $x$ von $x_0$ nach $x_1$ *auf dem gerade gewählten Wege* hervorgegangen ist, wobei die genaue Bezeichnung durch Einführung von Winkelgrössen zu erfolgen hätte. Bei der Behandlung der Integrale mit constanten Grenzen benutze man die Identitäten:

$$\begin{aligned}
&(a_\varkappa, a_\lambda) = (a_\varkappa, x) - (a_\lambda, x)\\
(2)\qquad &(a_n, \infty) = (a_n, x) - (\infty, x)\\
&(\infty, a_1) = e^{-2\pi i\lambda}(\infty, x) - (a_1, x).
\end{aligned}$$

Die abweichende Form der letzten Gleichung beruht auf der Definition von $(\infty, a_1)$, welches Integral auf der *negativen* Seite des Verzweigungsschnittes die Unendlichkeit erreichen soll; ein solches Integral begrenzt, falls man nämlich den eingeschlagenen Weg verfolgt, zusammen mit $(a_1, x)$ und zusammen mit einem auf der *negativen* Seite von $x$ bis $\infty$ zu nehmenden Integral, welches letztere sich von $(x, \infty)$ durch den Factor $e^{-2\pi i\lambda}$ unterscheidet, einen abgeschlossenen Gebietstheil; woraus sich diese Gleichung ergiebt. Die Integrale mit constanten Grenzen sind somit auf die übrigen reducirt.

Lassen wir jetzt $x$ von $x_0$ auf der positiven Seite des Verzweigungsschnittes zwischen $a_1$ und $a_2$ ausgehen und nach einem Umlauf um $a_1$ in $x_1$ auf der gerade gegenüberliegenden Stelle anlangen, und betrachten wir das Integral $(a_1, x)$, auf welches wir die Gleichung (1) anwenden, so wird sich zunächst das Integral

$$\int_{a_1}^{x_0}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du,$$

von dem zwischen denselben Grenzen genommenen $(a_1, x_0)$ nur dadurch unterscheiden, dass in den entsprechenden Elementen $(u-x_0)^{\lambda-1}$ übergegangen ist in $(u-x_1)_{\lambda-1}$. Da nun $x$ um jeden innerhalb der Umlaufscurve befindlichen Werth von $u$ ebenfalls einen Umlauf vollzogen hat, so ist für alle Werthe von $u$ zwischen $a_1$ und $x_0$:

$$(u-x_1)^{\lambda-1} = e^{2\pi i\lambda}(u-x_0)^{\lambda-1},$$

also

$$\int_{a_1}^{x_0}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du = e^{2\pi i\lambda}(a_1, x_0).$$

Das zweite längs der Umlaufscurve von $x_0$ bis $x_1$ zu nehmende Integral kann ersetzt werden durch ein längs des Verzweigungsschnittes von $x_0$ bis $a_1$ und von da auf der negativen Seite bis $x_1$ erstrecktes; die Elemente des letzteren unterscheiden sich von den entsprechenden des ersteren durch den Factor $e^{2\pi i b_1}$, sodass

$$\int_{x_0}^{x_1} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x_1)^{\lambda - 1} du$$

$$= (1 - e^{2\pi i b_1}) \int_{x_0}^{a_1} (u - a_1)^{b_1 - 1} \dots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x_1)^{\lambda - 1} du,$$

welches Integral, wie eben gezeigt wurde, $= e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (x_0, a_1)$ ist. Hieraus folgt

$$(a_1, x_1) = e^{2\pi i \lambda} (a_1, x_0) + e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (x_0, a_1),$$

oder mit Benutzung der üblichen Bezeichnung:

$$(a_1, x)' = e^{2\pi i (\lambda + b_1)} (a_1, x).$$

Wendet man auf das Integral $(a_\varkappa, x)$ die Formel (1) an, so ist zu berücksichtigen, dass für alle Werthe von $u$ zwischen $a_\varkappa$ und $x_0$ der Factor $(u - x)^{\lambda - 1}$ durch den Umlauf von $x$ um $a_1$ ungeändert geblieben ist, sodass das erste Integral auf der rechten Seite geradezu $= (a_\varkappa, x_0)$ ist, während für das zweite Integral dasselbe gilt, wie bei der Betrachtung von $(a_1, x)$. Es ist somit

$$(a_\varkappa, x)' = (a_\varkappa, x) - e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (a_1, x),$$

und ebenso

$$(\infty, x)' = (\infty, x) - e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (a_1, x).$$

Wendet man nun auf die Integrale mit constanten Grenzen die Gleichungen (2) an, so ist die Gesammtheit der Formeln *bei einem Umlauf von $x$ um $a_1$*:

$$\begin{aligned}
(a_1, x)' &= e^{2\pi i (b_1 + \lambda)} (a_1, x) \\
(a_2, x)' &= (a_2, x) - e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (a_1, x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(a_n, x)' &= (a_n, x) - e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (a_1, x) \\
(\infty, x)' &= (\infty, x) - e^{2\pi i \lambda} (1 - e^{2\pi i b_1}) (a_1, x) \\
(a_1, a_2)' &= (a_1, a_2) - (1 - e^{2\pi i \lambda}) (a_1, x) \\
(a_2, a_3)' &= (a_2, a_3) \\
&\dots\dots \\
(a_n, \infty)' &= (a_n, \infty) \\
(\infty, a_1)' &= (\infty, a_1) + e^{2\pi i b_1} (1 - e^{2\pi i \lambda}) (a_1, x).
\end{aligned}$$

Monodrom sind also in der Umgebung von $a_1$ die $n - 1$ Integrale $a_2, a_3), \dots (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)$, während $(a_1, x)$ sich verzweigt, wie $(x - a_1)^{b_1 + \lambda}$. Da zwischen diesen $n$ Integralen, wie weiter unten

mit Ausschliessung specieller Fälle bewiesen werden soll, eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten nicht besteht, so bilden sie das zu $a_1$ gehörige Fundamentalsystem, und es sind $n-1$ Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung ganze Zahlen, während die $n^{te}$ von $b_1 + \lambda$ nur um eine ganze Zahl verschieden sein kann.

Lassen wir jetzt $x$ von einem Werthe $x_0$ an der positiven Seite des Verzweigungsschnitts zwischen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ einen Umlauf um $a_\varkappa$ ausführen, so entsteht zunächst ein Bedenken, weil dies ohne Ueberschreitung des Verzweigungsschnitts nicht möglich zu sein scheint. Allein es hindert nichts, den Verzweigungsschnitt zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ ausweichen zu lassen, ja so weit ausweichen zu lassen, bis ein Punkt — oder auch ein Theil — desselben, um dem seinen Umlauf vollendenden $x$ freien Spielraum zu gewähren, sich an den Verzweigungsschnitt zwischen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ anlehnt. Das Gebiet befindet sich dann durchaus in seiner früheren Verfassung, und es werden *besondere* Erwägungen nicht nöthig.

Zunächst ist es klar, dass sich bei diesem Umlauf das Integral $(a_\varkappa, x)$ genau so verhält, wie vorher $(a_1, x)$, d. h. dass

$$(a_\varkappa, x)' = e^{2\pi i(\lambda + b_\varkappa)}(a_\varkappa, x),$$

und es sind die Integrale $(a_{\varkappa+1}, x)', \ldots (\infty, x)'$ so zu bilden, wie vorher $(a_2, x)'$ etc. Es bleibt daher nur zu ermitteln $(a_1, x)', \ldots (a_{\varkappa-1}, x)'$. Wendet man auf $(a_1, x)$ die Gleichung (1) an, so stellt sich heraus, dass das erste Integral, wenn man es bis zur *äusseren* Seite der Umlaufscurve führt, geradezu $= (a_1, x_0)$ ist, da für alle Werthe von $u$ zwischen $a_1$ und $x_0$ $(u - x_1)^{\lambda-1} = (u - x_0)^{\lambda-1}$ ist. Das zweite von $x_0$ bis $x_1$ zu erstreckende Integral ist demzufolge hier auch auf der *äusseren* Seite der Umlaufscurve zu erstrecken, so dass auch hier $(u - x_1)^{\lambda-1}$ ersetzt werden kann durch $(u - x_0)^{\lambda-1}$; im übrigen ist dies Integral, wenn ich seinen Weg mir so zusammengezogen denke, dass er längs des Verzweigungsschnittes geht,

$$= (1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(x_0, a_\varkappa),$$

so dass

$$(a_1, x)' = (a_1, x) - (1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(a_\varkappa, x).$$

Ebenso ist zu bilden $(a_2, x)' \ldots (a_{\varkappa-1}, x)'$, und man erhält aus diesen Integralen die Integrale mit constanten Grenzen mittelst der Formeln (2), so dass *bei einem Umlauf von $x$ um $a_\varkappa$*:

$$(a_1, x)' = (a_1, x) - (1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(a_\varkappa, x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_{\varkappa-1}, x)' = (a_{\varkappa-1}, x) - (1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(a_\varkappa, x)$$

$$(a_\varkappa, x)' = e^{2\pi i(\lambda + b_\varkappa)}(a_\varkappa, x)$$

$$(a_{\varkappa+1}, x)' = (a_{\varkappa+1}, x) - e^{2\pi i\lambda}(1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(a_\varkappa, x)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a_n, x)' = (a_n, x) - e^{2\pi i\lambda}(1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(a_\varkappa, x)$$
$$(\infty, x)' = (\infty, x) - e^{2\pi i\lambda}(1 - e^{2\pi i b_\varkappa})(a_\varkappa, x)$$
$$(a_1, a_2)' = (a_1, a_2)$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$(a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})' = (a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})$$
$$(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)' = (a_{\varkappa-1}, a_\varkappa) + e^{2\pi i b_\varkappa}(1 - e^{2\pi i\lambda})(a_\varkappa, x)$$
$$(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})' = (a_\varkappa, a_{\varkappa+1}) - (1 - e^{2\pi i\lambda})(a_\varkappa, x)$$
$$(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2})' = (a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2})$$

. . . . . . . . . . . . .

$$(a_n, \infty)' = (a_n, \infty)$$
$$(\infty, a_1)' = (\infty, a_1).$$

Hieraus geht hervor, dass in der Umgebung von $a_\varkappa$ die $n-1$ Integrale $(\infty, a_1)$, $(a_1, a_2)$, ... $(a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})$, $(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2})$, ... $(a_n, \infty)$ monodrom sind, während sich $(a_\varkappa, x)$ verzweigt, wie $(x - a_\varkappa)^{\lambda + b_\varkappa}$, so dass auch für diesen Punkt das zugehörige Fundamentalsystem hergestellt ist. Gleichzeitig ist hieraus ersichtlich, dass die Integrale $(a_\lambda, x)$, wo $\lambda$ eine beliebige von $\varkappa$ verschiedene Zahl in der Reihe $1, 2, \ldots n$ ist, *nicht* monodrom sind. Hieraus folgt *im Allgemeinen* noch nicht, dass ein solches Integral, wie Herr Fuchs behauptet (Crelle's Journal, Bd. 72, S. 260), in der Entwicklung für die Umgebung von $a_\varkappa$ Logarithmen enthalten müsse; übrigens giebt Herr Fuchs an einer andern Stelle (S. 256) ausdrücklich zu, dass die Lösungen jener Differentialgleichung ausser im Falle, wo $\mu$ (d. i. $b_\varkappa + \lambda - 1$) eine ganze Zahl ist, von Logarithmen frei sind, womit dann jene andere Behauptung, falls ich sie nicht missverstanden habe, in Widerspruch steht. Das von Herrn Fuchs angeführte Beispiel beweist nichts, da dort $b_\varkappa + \lambda$ eine ganze Zahl ist.

Ich bemerke übrigens, dass im Grunde genommen jene Aenderung des Verzweigungsschnitts zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ nicht nöthig ist. Lässt man nämlich $x$ und somit auch den Weg des Integrals

$$\int_{x_0}^{x_1} (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - x_1)^{\lambda - 1}\, du$$

den Verzweigungsschnitt überschreiten, so gelangt man eben in ein anderes Blatt, in welches die Werthe der zu integrirenden Function stetig sich fortsetzen. Diese Werthe waren durch die Ausbiegung des Verzweigungstheils in das obere Blatt, in welchem wir allein operirten, hinübergeschoben, und man hat, will man $x$ den Ver-

zweigungsschnitt überschreiten lassen, nur festzusetzen, dass bei dem Integral $\int_{a_\varkappa}^{x_0} (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du$ immer derselbe Zweig von $U$ zur Anwendung kommt.

Wenn $x$ *einen positiven Umlauf um* $\infty$ ausführt, so ist dieser zu ersetzen durch einen negativen Umlauf um alle übrigen Verzweigungspunkte. Für alle Werthe von $u$ innerhalb dieser Curve — ich nenne den die endlichen Verzweigungspunkte enthaltenden Gebietstheil den innern — ist $(u-x_1)^{\lambda-1} = e^{-2\pi i\lambda}(u-x_0)^{\lambda-1}$, während für die äussern Werthe $(u-x_1)^{\lambda-1} = (u-x_0)^{\lambda-1}$ ist. Das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du$$

ist wegen des positiven Umlaufs von $x$, also auch von $u$ um $\infty$, von welchem $U$ mit dem Factor $e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)}$ zurückkehrt, wo $\sigma = b_1+b_2+\dots+b_n$ gesetzt ist,

$$= (1-e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)})\int_{x_0}^{\infty}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du,$$

und dies ist an der Aussenseite der Curve erstreckt

$$= (1-e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)})\,(x_0,\infty),$$

an der Innenseite dagegen

$$= (1-e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)})\,e^{-2\pi i\lambda}\,(x_0,\infty).$$

Ferner ist

$$\int_{a_\varkappa}^{x_0}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du = e^{-2\pi i\lambda}\,(a_\varkappa, x_0)$$

$$\int_{\infty}^{x_0}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x_1)^{\lambda-1}\,du = (\infty, x_0),$$

vorausgesetzt, dass das letztere Integral linker Hand an der positiven Seite entlang geht, so dass sich schliesslich ergiebt

$$(a_\varkappa, x)' = e^{-2\pi i\lambda}(a_\varkappa, x) - e^{-2\pi i\lambda}(1-e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)})(\infty, x),\quad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

$$(\infty, x)' = (\infty, x) + (1-e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)})\,(x,\infty)$$
$$= e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)}\,(\infty, x).$$

Wendet man auf die Integrale mit constanten Grenzen die Formeln (2) an, so ergiebt sich also *bei einem Umlauf von $x$ um* $\infty$:

$$(a_\varkappa, x)' = e^{-2\pi i\lambda}(a_\varkappa, x) - e^{-2\pi i\lambda}(1-e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)})(\infty, x),\quad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

$$(\infty, x)' = e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)}\,(\infty, x)$$

$$(a_\varkappa,\, a_{\varkappa+1})' = e^{-2\pi i\lambda}\,(a_\varkappa,\, a_{\varkappa+1}), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots\, n-1)$$

$$(a_n,\, \infty)' = e^{-2\pi i\lambda}\,(a_n,\, \infty) - e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)}\,(1 - e^{-2\pi i\lambda})\,(\infty,\, x)$$

$$(\infty,\, a_1)' = e^{-2\pi i\lambda}\,(\infty,\, a_1) + e^{-2\pi i\lambda}\,(1 - e^{-2\pi i\lambda})\,(\infty,\, x)\,.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich, dass die Integrale $(a_\varkappa,\, a_{\varkappa+1})$ und $(\infty,\, x)$ in der Nähe von $x = \infty$ mit gewissen Potenzen von $\frac{1}{x}$ multiplicirt monodrom bleiben, und zwar werden $n-1$ Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von $-\lambda$, und die $n^{\text{te}}$ von $-(\sigma+\lambda)$ nur um ganze Zahlen verschieden sein.

Der bequemeren Uebersicht wegen stelle ich die zu den einzelnen singulären Werthen gehörigen Integrale zusammen.

| *Verzw.-Punkte:* | *zugehörige Integrale:* |
|---|---|
| $a_1$ | $(a_1, x), (a_2, a_3), \ldots (a_n, \infty)$ |
| $a_2$ | $(a_2, x), (\infty, a_1), (a_3, a_4) \ldots\ldots (a_n, \infty)$ |
| . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . |
| $a_\varkappa$ | $(a_\varkappa, x), (\infty, a_1), \ldots (a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1}), (a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}), \ldots (a_n, \infty)$ |
| . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . |
| $a_n$ | $(a_n, x), (\infty, a_1), \ldots (a_{n-2}, a_{n-1})$ |
| $\infty$ | $(\infty, x), (a_1, a_2), \ldots (a_{n-1}, a_n)$. |

Es bleibt noch übrig, den Beweis zu führen, dass die $n+1$ Systeme von je $n$ Integralen wirklich Fundamentalsysteme, d. h. also solche sind, zwischen deren Gliedern eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten nicht stattfindet.

Angenommen, es existirte eine Gleichung zwischen den $n$ zu $a_\varkappa$ gehörigen Integralen:

$$c_1(a_\varkappa, x) + c_2(\infty, a_1) + \cdots + c_\varkappa(a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1}) + c_{\varkappa+1}(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}) + \cdots + c_n(a_n, \infty) = 0,$$

so müsste dieselbe auch zwischen den entsprechenden Zweigen dieser Integrale stattfinden. Lassen wir $x$ einen Umlauf um $a_\varkappa$ vollziehen, so nimmt $(a_\varkappa,\, x)$ den Factor $e^{2\pi i(b_\varkappa+\lambda)}$ an, während die übrigen Glieder der Gleichung ungeändert bleiben. Hieraus folgt $c_1 = 0$, wenn nicht etwa $b_\varkappa + \lambda$ eine ganze Zahl ist, welcher Fall hier ausgeschlossen werden möge. Führt $x$ einen Umlauf um $a_{\varkappa+1}$ aus, so ändert sich nur noch, da $(a_\varkappa,\, x)$ schon aus der Gleichung verschwunden ist, $(a_{\varkappa+1},\, a_{\varkappa+2})$; hierdurch tritt zu den übrigen Gliedern der Gleichung noch hinzu das Glied

$$-\, c_{\varkappa+1}(1 - e^{2\pi i\lambda})\,(a_{\varkappa+1},\, x)\,,$$

welches für sich verschwinden muss. Daraus folgt, wenn nicht $\lambda$ eine ganze Zahl ist, $c_{\varkappa+1} = 0$. Lässt man $x$ einen Umlauf um $a_{\varkappa+2}$ ausführen, so folgt $c_{\varkappa+2} = 0$, ebenso durch Fortsetzung dieses Verfahrens

$c_{\varkappa+3} = 0, \ldots c_n = 0$. Lassen wir dann $x$ einen Umlauf um $\infty$ machen, so geht unsere Gleichung, welche jetzt diese ist:

$$c_2(\infty, a_1) + c_3(a_1, a_2) + \cdots c_\varkappa(a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1}) = 0,$$

über in folgende:

$$c_2 e^{-2\pi i\lambda}(\infty, a_1) + c_3 e^{-2\pi i\lambda}(a_1, a_2) + \cdots + c_\varkappa e^{-2\pi i\lambda}(a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})$$
$$+ c_2 e^{-2\pi i\lambda}(1 - e^{-2\pi i\lambda})(\infty, x) = 0,$$

welche mit der ursprünglichen zusammengehalten unter der Voraussetzung, dass $\lambda$ nicht eine ganze Zahl ist, $c_2 = 0$ giebt. Geht man in dieser Weise weiter, so findet man, dass sämmtliche Grössen $c$ Null sind. Ganz ebenso wird bewiesen, dass zwischen den zum Verzweigungspunkte $\infty$ gehörigen Integralen eine Gleichung

$$c_1(\infty, x) + c_2(a_1, a_2) + \cdots + c_n(a_{n-1}, a_n) = 0$$

nicht stattfinden kann. Lässt man $x$ einen Umlauf um $\infty$ vollziehen, so geht diese Gleichung über in folgende

$$c_1 e^{-2\pi i(\sigma+\lambda)}(\infty, x) + c_2 e^{-2\pi i\lambda}(a_1, a_2) + \cdots + c_n e^{-2\pi i\lambda}(a_{n-1}, a_n) = 0;$$

aus dieser und der ursprünglichen folgt $c_1 = 0$, wenn nicht gerade $\sigma$ eine ganze Zahl ist. Geht $x$ um $a_1$ positiv herum, so ändert sich jetzt nur $(a_1, a_2)$ und es tritt hinzu das Glied $-c_2(1 - e^{2\pi i\lambda})(a_1, x)$, welches für sich verschwinden muss, u. s. w.

Hiermit ist bewiesen, *dass zwischen $n$ zusammengehörigen Integralen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten nicht stattfinden kann*, vorausgesetzt: 1) für einen endlichen Verzweigungspunkt, dass weder $\lambda$ noch $b_\varkappa + \lambda$, 2) für $\infty$, dass weder $\lambda$ noch $\sigma$ ganze Zahlen sind.

## III.

Die Relationen, welche, wie bekannt, zwischen je $n + 1$ Integralen stattfinden müssen, erhält man leicht durch den Satz, welcher lehrt, dass das Integral über eine geschlossene Curve, die keinen Ausnahmepunkt einschliesst, Null ist. Diese hier anzuwendende Methode, deren sich auch Herr J. Thomä im 14. Jahrgange der Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Physik bedient, habe ich in einer im Jahre 1866 Herrn Professor Richelot eingelieferten Arbeit entwickelt, um die Relationen zwischen drei Integralen der gewöhnlichen hypergeometrischen Differentialgleichung zu ermitteln.

Der Bequemlichkeit wegen möge

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_\varkappa = \sigma_\varkappa$$

gesetzt werden.

Folgende Gleichungen, welche aus dem soeben angeführten Satze entspringen, bedürfen keiner Erläuterung:

$$(1)\quad (\infty, a_1) + e^{2\pi i\sigma_1}(a_1, a_2) + \cdots + e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa) + e^{2\pi i\sigma_\varkappa}(a_\varkappa, a_{\varkappa+1}) \cdots + e^{2\pi i\sigma_n}(a_n, \infty) = 0$$

$$(2)\quad (a_1, a_2) + \cdots + (a_{\varkappa-1}, a_\varkappa) + (a_\varkappa, x) = (a_1, x)$$

$$(3)\quad (a_\varkappa, a_{\varkappa+1}) + \cdots + (a_n, \infty) + (\infty, x) = (a_\varkappa, x)$$

$$(4)\quad (\infty, x) = e^{2\pi i\lambda}(\infty, a_1) + e^{2\pi i\lambda}(a_1, x).$$

Um $(a_1, x)$ durch die Integrale des zu $a_\varkappa$ gehörigen Systems auszudrücken, bedarf es der Elimination von $(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$, $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$, $(\infty, x)$ aus diesen Gleichungen. Die Gleichung (2) liefert $(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$, (3) und (4) liefern nach Elimination von $(\infty, x)$ das Integral $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$, so dass nach Substitution dieser Ausdrücke für $(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$ und $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ die Gleichung (1) diese wird:

$$(a_1, x)\left(e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}} - e^{2\pi i(\sigma_\varkappa+\lambda)}\right) + (\infty, a_1)\left(1 - e^{2\pi i(\sigma_\varkappa+\lambda)}\right) + (a_1, a_2)\left(e^{2\pi i\sigma_1} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right)$$
$$+ \cdots + (a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})\left(e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-2}} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right) + (a_\varkappa, x)\left(e^{2\pi i\sigma_\varkappa} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right)$$
$$+ (a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2})\left(e^{2\pi i\sigma_{\varkappa+1}} - e^{2\pi i\sigma_\varkappa}\right) + \cdots + (a_n, \infty)\left(e^{2\pi i\sigma_n} - e^{2\pi i\sigma_\varkappa}\right) = 0,$$

oder, wenn man die Formel $e^{2\pi ix} - e^{2\pi iy} = 2i\, e^{\pi i(x+y)} \sin(x-y)\pi$ anwendet:

$$(a_1, x) = -e^{-\pi i\sigma_{\varkappa-1}} \frac{\sin(\sigma_\varkappa+\lambda)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}(\infty, a_1) - e^{-\pi i(\sigma_\varkappa-\sigma_1+\lambda)} \frac{\sin(\sigma_{\varkappa-1}-\sigma_1)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}(a_1, a_2)$$
$$\cdots\cdots - e^{-\pi i(\sigma_\varkappa-\sigma_{\varkappa-2}+\lambda)} \frac{\sin(\sigma_{\varkappa-1}-\sigma_{\varkappa-2})\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}(a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})$$
$$+ e^{-\pi i\lambda} \frac{\sin(\sigma_\varkappa-\sigma_{\varkappa-1})\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}(a_\varkappa, x) + e^{\pi i(\sigma_{\varkappa+1}-\sigma_{\varkappa-1}-\lambda)} \frac{\sin(\sigma_{\varkappa+1}-\sigma_\varkappa)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2})$$
$$\cdots\cdots + e^{\pi i(\sigma_n-\sigma_{\varkappa-1}-\lambda)} \frac{\sin(\sigma_n-\sigma_\varkappa)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}(a_n, \infty).$$

Um sämmtliche Integrale des zu dem Verzweigungspunkt $a_1$ gehörigen Systems durch die zu $a_\varkappa$ gehörigen Integrale auszudrücken, sind noch zwei ähnliche Gleichungen für $(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$ und $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ aufzustellen. Wenn man die Gleichung (2) mit $e^{2\pi i\lambda}$ multiplicirt und hierzu (3) addirt, nachdem $(\infty, x)$ mittelst (4) eliminirt ist, so erhält man:

$$e^{2\pi i\lambda}\left\{(\infty, a_1) + (a_1, a_2) + \cdots + (a_{\varkappa-2}, a_{\varkappa-1})\right\} + (e^{2\pi i\lambda} - 1)(a_\varkappa, x) + (a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2})$$
$$\cdots\cdots + (a_n, \infty) + e^{2\pi i\lambda}(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa) + (a_\varkappa, a_{\varkappa+1}) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung (1) eliminire man $(a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ resp. $(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$, wodurch sich ergiebt:

$$
\begin{aligned}
&(\infty,\, a_1)\left(1 - e^{2\pi i(\lambda+\sigma_\varkappa)}\right) - (a_1,\, a_2)\left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_\varkappa)} - e^{2\pi i\sigma_1}\right) - \cdots\cdots \\
&- (a_{\varkappa-2},\, a_{\varkappa-1})\left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_\varkappa)} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-2}}\right) + (a_{\varkappa+1},\, a_{\varkappa+2})\left(e^{2\pi i\sigma_{\varkappa+1}} - e^{2\pi i\sigma_\varkappa}\right) + \cdots \\
&\qquad + (a_n,\, \infty)\left(e^{2\pi i\sigma_n} - e^{2\pi i\sigma_\varkappa}\right) + (a_\varkappa,\, x)\left(e^{2\pi i\sigma_\varkappa} - e^{2\pi i(\lambda+\sigma_\varkappa)}\right) \\
&\qquad\qquad - (a_{\varkappa-1},\, a_\varkappa)\left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_\varkappa)} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_{\varkappa-1})} - e^{2\pi i\lambda}\right)(\infty,\, a_1) + \left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_1)} - e^{2\pi i(\lambda+\sigma_{\varkappa-1})}\right)(a_1,\, a_2) + \cdots\cdots \\
&+ \left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_{\varkappa-2})} - e^{2\pi i(\lambda+\sigma_{\varkappa-1})}\right)(a_{\varkappa-2},\, a_{\varkappa-1}) - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\left(e^{2\pi i\lambda} - 1\right)(a_\varkappa,\, x) \\
&+ \left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_{\varkappa+1})} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right)(a_{\varkappa+1},\, a_{\varkappa+2}) + \cdots + \left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_n)} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right)(a_n,\, \infty) \\
&\qquad + \left(e^{2\pi i(\lambda+\sigma_\varkappa)} - e^{2\pi i\sigma_{\varkappa-1}}\right)(a_\varkappa,\, a_{\varkappa+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&(a_{\varkappa-1},\, a_\varkappa) = \\
&-\frac{(\infty,\, a_1)\sin(\lambda+\sigma_\varkappa)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i\sigma_{\varkappa-1}} - \frac{(a_1,\, a_2)\sin(\sigma_\varkappa-\sigma_1+\lambda)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i(\sigma_{\varkappa-1}-\sigma_1)} \\
&\quad \cdots\cdots - \frac{(a_{\varkappa-2},\, a_{\varkappa-1})\sin(\sigma_\varkappa-\sigma_{\varkappa-2}+\lambda)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i(\sigma_{\varkappa-1}-\sigma_{\varkappa-2})} \\
&-\frac{(a_\varkappa,\, x)\sin\lambda\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i(\sigma_\varkappa-\sigma_{\varkappa-1})} + \frac{(a_{\varkappa+1},\, a_{\varkappa+2})\sin(\sigma_{\varkappa+1}-\sigma_\varkappa)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{\pi i(\sigma_{\varkappa+1}-\sigma_{\varkappa-1}-\lambda)} \\
&\quad \cdots\cdots + \frac{(a_n,\, \infty)\sin(\sigma_n-\sigma_\varkappa)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{\pi i(\sigma_n-\sigma_{\varkappa-1}-\lambda)},
\end{aligned}
$$

und ebenso:

$$
\begin{aligned}
&(a_\varkappa,\, a_{\varkappa+1}) = \\
&+\frac{(\infty,\, a_1)\sin\sigma_{\varkappa-1}\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{\pi i(\lambda-\sigma_\varkappa)} + \frac{(a_1,\, a_2)\sin(\sigma_{\varkappa-1}-\sigma_1)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i(\sigma_\varkappa-\lambda-\sigma_1)} \\
&\quad \cdots\cdots + \frac{(a_{\varkappa-2},\, a_{\varkappa-1})\sin(\sigma_{\varkappa-1}-\sigma_{\varkappa-2})\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i(\sigma_\varkappa-\lambda-\sigma_{\varkappa-2})} \\
&+\frac{(a_\varkappa,\, x)\sin\lambda\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{-\pi i(\sigma_\varkappa-\sigma_{\varkappa-1})} - \frac{(a_{\varkappa+1},\, a_{\varkappa+2})\sin(\sigma_{\varkappa+1}-\sigma_{\varkappa-1}+\lambda)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{\pi i(\sigma_{\varkappa+1}-\sigma_\varkappa)} \\
&\quad \cdots\cdots - \frac{(a_n,\, \infty)\sin(\sigma_n-\sigma_{\varkappa-1}+\lambda)\pi}{\sin(b_\varkappa+\lambda)\pi}\, e^{\pi i(\sigma_n-\sigma_\varkappa)}.
\end{aligned}
$$

Die übrigen Integrale des zu $a_1$ gehörigen Fundamentalsystems kommen auch in dem zu $a_\varkappa$ gehörigen vor.

Um nun die Integrale, welche zu $a_1$ gehören, durch die zu $\infty$ gehörenden auszudrücken, bilde ich die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&(\infty,\, a_1) + e^{2\pi i\sigma_1}(a_1,\, a_2) + \cdots + e^{2\pi i\sigma_n}(a_n,\, \infty) = 0 \\
&(a_1,\, a_2) + (a_2,\, a_3) + \cdots + (a_n,\, \infty) + (\infty,\, x) - (a_1,\, x) = 0 \\
&(\infty,\, a_1) = e^{-2\pi i\lambda}(\infty,\, x) - (a_1,\, x).
\end{aligned}
$$

Eliminirt man $(\infty,\, a_1)$ und $(a_n,\, \infty)$, so erhält man die Gleichung:

$$(a_1, x)(1 - e^{2\pi i\sigma_n}) + (a_1, a_2)(e^{2\pi i\sigma_n} - e^{2\pi i\sigma_1}) \cdots\cdots + (a_{n-1}, a_n)(e^{2\pi i\sigma_n} - e^{2\pi i\sigma_{n-1}})$$
$$+ (\infty, x)(e^{2\pi i\sigma_n} - e^{-2\pi i\lambda}) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$(a_1, x) = e^{\pi i\sigma_1} \frac{\sin(\sigma_n - \sigma_1)\pi}{\sin\sigma_n\pi}(a_1, a_2) \cdots\cdots + e^{\pi i\sigma_{n-1}} \frac{\sin(\sigma_n - \sigma_{n-1})\pi}{\sin\sigma_n\pi}(a_{n-1}, a_n)$$
$$+ e^{-\pi i\lambda} \frac{\sin(\sigma_n + \lambda)\pi}{\sin\sigma_n\pi}(\infty, x).$$

Ebenso erhält man:

$$(a_n, \infty) = -e^{-\pi i(\sigma_n - \sigma_1)} \frac{\sin\sigma_1\pi}{\sin\sigma_n\pi}(a_1, a_2) \cdots\cdots - e^{-\pi i(\sigma_n - \sigma_{n-1})} \frac{\sin\sigma_{n-1}\pi}{\sin\sigma_n\pi}(a_{n-1}, a_n)$$
$$+ e^{-\pi i(\sigma_n + \lambda)} \frac{\sin\lambda\pi}{\sin\sigma_n\pi}(\infty, x).$$

Eine Discussion der Fälle, in welchen Logarithmen auftreten, bleibt vorbehalten.

Graudenz, im April 1871.

# Ueber die Abbildung algebraischer Flächen.

Von L. Cremona in Mailand*).

---

Unter den verschiedenen Hülfsmitteln, deren man sich bedienen kann, um zur geometrischen Abbildung algebraischer Flächen auf einer Ebene zu gelangen (falls sie möglich ist), scheinen mir *die rationalen Transformationen des Raumes* eines der einfachsten und schnellsten. *Rationale Transformationen* nenne ich solche, welche einen (dreifach ausgedehnten) Raum auf einem anderen Raume eindeutig abbilden (gleichgültig ob man auch die zwei Räume als sich deckende fasst), so dass den Ebenen des ersten Raumes rationale Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechen, die ein lineares dreifach unendliches System bilden. Natürlich, um eine *eindeutige* Abbildung zu erreichen, müssen jene Flächen eine solche Zahl von gemeinschaftlichen Fundamentalpunkten und Curven haben, dass je drei von ihnen in einem einzigen veränderlichen Punkte sich schneiden; unter dieser Voraussetzung wird das System *homaloïdisch* genannt**). Einige solcher Transformationen sind sehr bekannt; namentlich der Fall $n = 2$, wenn die Flächen $2^{\text{ter}}$ Ordnung des linearen Systems einen Fundamentalkegelschnitt und einen, nicht auf dem Kegelschnitte gelegenen, Fundamentalpunkt haben; und der Fall $n = 3$, wenn eine Fundamentalraumcurve sechster Ordnung vorhanden ist. Der erste Fall stimmt mit der Methode der reciproken Radien überein; der zweite führt zur bekannten Abbildung einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf einer Ebene. Für diese letzte Transformation hat man nur vorausgesetzt, dass die Fundamentalcurve nicht in Theile, oder sofort in zwei zusammenfallende Raumcurven dritter Ordnung oder in sechs Gerade zerfalle***). Fügen wir diesem noch hinzu, dass Herr Cayley†)

---

*) Aus den Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, (1871, Nr. 5), mit Zusätzen des Verfassers.

**) Dieselbe Benennung möge für Netze von ebenen *rationalen* Curven gelten. *Homaloïd* möge eine Fläche heissen, wenn sie auf einer Ebene abbildbar ist.

***) Geiser, Borchardt's Journal B. 69., Sturm, ebenda B. 70. Von einigen anderen Fällen der cubischen Transformation hat Herr Noether in seiner reichhaltigen Abhandlung (Math. Annalen, Bd. 3, pp. 199, 205) Anwendungen auf Abbildungsaufgaben gemacht.

†) *On the rational Transformation between two spaces* (Proceedings of the London Mathematical Society, v. III, 1870, p. 171).

eine besondere merkwürdige Transformation gefunden hat, wobei den Ebenen des ersten Raumes ein System von windschiefen cubischen Flächen entspricht, welche die doppelte Gerade und drei Erzeugende gemein haben, indem die den Ebenen des zweiten Raumes entsprechenden Flächen nur zweiter Ordnung sind und in einer Geraden und drei festen Punkten sich durchschneiden.

Schon die Transformation zweiten Grades bietet einen Fall dar, welcher, so weit mir bekannt, unbemerkt geblieben ist: nämlich den Fall, dass der Fundamentalpunkt auf dem Fundamentalkegelschnitte liegt. Dann entsprechen den Ebenen jedes Raumes Flächen zweiter Ordnung, welche durch einen festen Kegelschnitt gehen und in einem Punkte dieser Curve eine feste Ebene berühren. Wenn man diese Transformation auf eine allgemeine Fläche dritter Ordnung*) anwendet, erhält man auf eine ungemein einfache Weise alle die Eigenschaften der *mit einem Doppelkegelschnitte behafteten Fläche vierter Ordnung*, deren Kenntniss man Herrn Clebsch verdankt**).

Setzt man aber im Falle $n = 3$ voraus, dass die Fundamentalraumcurve sechster Ordnung in Theile zerfällt (was auf sehr viele verschiedene Weisen geschehen kann), so gelangt man zur Abbildung einer sehr ausgedehnten Reihe von algebraischen Flächen auf der Ebene. Ich erlaube mir, hier einige Beispiele mitzutheilen.

Sei $K$ die Fundamentalcurve des ersten Raumes, sodass eine cubische Raumcurve, welche $K$ in 8 Punkten begegnet, $K$ zur vollen Durchschnittscurve zweier cubischen Flächen ergänzt; und sei $K'$ die analoge Fundamentalcurve für den zweiten Raum. Dann entsprechen den Punkten von $K$ die Geraden, welche $K'$ dreimal schneiden, und deren Ort eine Fläche $k'$ achter Ordnung ist, auf welcher $K'$ eine dreifache Curve ist. Analogerweise entsprechen den Punkten von $K'$ die Erzeugenden einer Fläche $k$ achter Ordnung, auf welcher $K$ eine dreifache Curve ist. Zerfällt $K$ in Theile, so geschieht eine ähnliche Zerlegung für $K'$, $k$, $k'$.

Geht man nun von einer Fläche $F$ aus, welche einen Theil von $K$ einfach oder mehrfach enthält, so gelangt man zu einer auf $F$ eindeutig abbildbaren Fläche $F'$, deren Ordnung der Anzahl der Punkte gleich ist, in denen eine beliebige von $K$ achtmal geschnittene cubische Raumcurve der Fläche $F$ ausserhalb $K$ noch begegnet. Eine Curve, welche ein Bestandtheil von $K'$ ist, wird so oft von $F'$ enthalten, als

*) Ich habe schon anderswo diese Anwendung ausgeführt (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 u. 23 marzo 1871). Herr Geiser hatte bereits (Borchardt's Journal Bd. 70) die eindeutige Beziehung zwischen denselben Flächen aus der *gewöhnlichen* Transformation zweiten Grades abgeleitet.

**) Borchardts Journal Bd. 69.

eine beliebige Erzeugende des entsprechenden Bestandtheils von $k$ und die Fläche $F$ nicht auf $K$ gelegene Punkte gemein haben. Nach dieser Methode ergeben sich auch *Flächen mit Rückkehrcurven;* denn man braucht nur eine Fläche $F$ anzunehmen, welche in einen Theil von $k$ eingeschrieben ist.

*Erstes Beispiel.* — $K$ besteht aus einer Geraden $C_1$ und einer Raumcurve $C_5$ fünfter Ordnung vom Geschlechte 1, welche $C_1$ in drei Punkten schneidet. Dann zerfällt $K'$ in eine Curve $C_4'$ vierter Ordnung und erster Species, und in einen Kegelschnitt $C_2'$, der sich auf $C_4'$ in drei Punkten stützt. Betrachtet man nun eine Fläche $F_2$ zweiter Ordnung, die durch $C_1$ geht, so wird ihr im andern Raume *eine Fläche $F_5'$ fünfter Ordnung* entsprechen, *die $C_4'$ als Doppelcurve besitzt* und $C_2'$ einfach enthält. Hieraus entspringt die ganze Theorie dieser letztern Fläche, welche Herr Clebsch zuerst dargelegt hat*). Die 7 Punkte $a$, in denen $C_5'$ der Fläche $F_2$ ausserhalb $C_1$ noch begegnet, und die 7 Geraden von $F_2$, welche von $C_1$ und $C_5$ geschnitten werden, bilden sich auf $F_5'$ als Gerade ab; und man hat somit die 7 Paare von Geraden dieser Fläche. Das System der Erzeugenden von $F_2$, welche $C_1$ treffen, entspricht der Schaar von Kegelschnitten, die entstehen, wenn man $F_5'$ mit dem Büschel zweiter Ordnung schneidet, dessen Grundcurve $C_4'$ ist. Die 7 Punkte $a$ werden von einem achten Punkte von $F_2$ zu einem Schnittpunktsysteme von drei Flächen zweiten Grades ergänzt; dieser achte Punkt entspricht der Spitze des Kegels zweiter Ordnung, welcher $F_5'$ umschrieben ist. Die einzige Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species, welche durch die 7 Punkte $a$ und dreimal durch $C_1$ gelegt werden kann; die 21 cubischen Raumcurven, welche durch fünf Punkte $a$ und zweimal durch $C_1$ gehen; die 35 Kegelschnitte, welche auf $F_2$ liegen und durch je 3 Punkte $a$ gehen; endlich die 7 Geraden von $F_2$, die durch je einen Punkt $a$ gehen, ohne $C_1$ zu schneiden, bilden sich auf $F_5'$ als die 64 Kegelschnitte ab, welche der oben angeführten Schaar nicht angehören. Analogerweise bestimmen auch die 7 Punkte $a$ die 64 Schaaren von cubischen Raumcurven, welche auf $F_5'$ liegen. Jedem Punkte von $C_4'$ entsprechen die zwei Punkte gleichzeitig, in denen $F_2$ von einer sich auf $C_5$ dreimal stützenden Geraden geschnitten wird; die ganze Doppelcurve von $F_5'$ entspricht also einer Raumcurve neunter Ordnung, welche durch $C_1$ fünfmal und durch jeden Punkt $a$ zweimal geht. — Projicirt man $F_2$ von einem auf ihr beliebig gewählten Punkte auf eine Ebene, und wendet man auf das so entstehende ebene Gebilde eine Transformation zweiten Grades an, so werden wir die niedrigste Abbildung der Fläche $F_5'$ erreichen, wobei die ebenen Schnitte durch Curven vierter Ord-

*) Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Bd. 15.

nung mit einem doppelten und sieben einfachen Fundamentalpunkten dargestellt werden.

Durch die umgekehrte Transformation erhält man aus einer cubischen Fläche $F_3'$, welche die Raumcurve $C_4'$ enthält, *eine Fläche* $F_4$ *vierter Ordnung mit der Doppelgeraden* $C_1$. Die 3 Schnittpunkte $a$ von $F_3'$ mit $C_2'$ (ausserhalb $C_4'$); die 10 Geraden $b$ von $F_3'$, welche $C_4'$ zweimal schneiden, und die 3 Kegelschnitte von $F_3'$, welche durch je einen Punkt $a$ gehen und mit $C_4'$ auf je einer Fläche zweiten Grades liegen, sind die Bilder der 16 Geraden von $F_4$. Der Doppelgeraden entspricht die Durchschnittcurve von $F_3'$ mit der Ebene von $C_2'$; und den ebenen Schnitten von $F_4$ entsprechen Raumcurven fünfter Ordnung (vom Geschlechte 2), welche von den durch $C_4'$ und die Punkte $a$ gehenden cubischen Flächen ausgeschnitten werden. Bildet man demnach $F_3'$ auf einer Ebene so ab, dass fünf Gerade $b$ durch fünf Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5 dargestellt werden, so wird sich sofort die niedrigste Abbildung von $F_4'$ ergeben. Ist, in der Darstellung von $F_3'$, 0 der sechste Fundamentalpunkt, und 6, 7, 8 die Bilder der Punkte $a$, so werden die ebenen Schnitte von $F_4$ durch Curven vierter Ordnung, $0^2$. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, abgebildet*).

Benutzt man dieselbe Transformation, um eine durch den Kegelschnitt $C_2'$ gehende cubische Fläche $F_3'$ umzugestalten, so wird sich *eine Fläche* $F_6$ sechster Ordnung ergeben, *welche die Doppelcurve* $C_5$ (*vom Geschlechte* 1) *besitzt.* Auf dieser Fläche liegen 10 Gerade, welche die Doppelcurve dreimal treffen; und 16 Kegelschnitte, welche sich auf $C_5$ in fünf Punkten stützen. Um zur niedrigsten ebenen Abbildung von $F_6$ zu gelangen, reicht es hin die Fläche $F_3'$ so abzubilden, dass ein Fundamentalpunkt der Geraden entspricht, die mit $C_2'$ zu einem ebenen Gesammtschnitte von $F_3'$ ergänzt: dann werden die ebenen Schnitte von $F_6$ durch Curven sechster Ordnung dargestellt, welche 5 zweifache und 10 einfache feste Punkte haben. Das Bild der Doppelcurve wird eine Curve fünfzehnter Ordnung mit 5 fünffachen und 10 dreifachen Punkten sein.

Geht man von einer Fläche $F_3$ dritter Ordnung aus, welche die Gerade $C_1$ enthält, so führt dieselbe Transformation zu *einer Fläche achter Ordnung* $F_8'$ *mit der dreifachen Curve* $C_4'$ *und dem doppelten Kegelschnitte* $C_2'$. Die Flächen zweiten Grades, welche durch $C_4'$ gehen, schneiden noch aus $F_8'$ Curven vierter Ordnung und zweiter Species aus: unter diesen giebt es 5, die in zwei Kegelschnitte, und 12 andere, die in eine Gerade und eine cubische Raumcurve zerfallen. Jeder der 10 Kegelschnitte bildet, zusammen mit $C_4'$ und $C_2'$, die Grundcurve eines Büschels von cubischen Flächen, welche ausserdem aus $F_8'$ ra-

*) Mathematische Annalen, Bd. 1, p. 261.

tionale Raumcurven sechster Ordnung ausschneiden, von denen 4 aus zwei cubischen Raumcurven bestehen: somit hat man 16 Raumcurven dritter Ordnung, ausser den oben erwähnten 12. — In der niedrigsten ebenen Abbildung entsprechen den ebenen Schnitten von $F_8'$ Curven neunter Ordnung, welche einen dreifachen (1), fünf zweifache (2, 3, 4, 5, 6) und zwölf einfache (7, 8, 9, .... 18) feste Punkte besitzen. Die dreifache Curve bildet sich als eine Curve dreizehnter Ordnung $1^5 . 2^4 . 3^4 . \ldots 6^4 . 7^2 . 8^2 \ldots 18^2$ ab, und der doppelte Kegelschnitt als eine Curve fünfter Ordnung $1^3 . 2 . 3 \ldots\ldots 18$.

*Zweites Beispiel.* — Die Bestandtheile der Fundamentalcurve $K$ seien eine Raumcurve $C_5$ fünfter Ordnung vom Geschlechte 2 und eine Gerade $C_1$, die $C_5$ zweimal trifft; dann wird auch $K'$ sich in zwei Linien $C_5'$, $C_1'$ derselben Art zerlegen. Wendet man diese Transformation auf eine Fläche $F_2$ zweiten Grades an, die durch $C_1$ geht, so wird *eine Fläche $F_4'$ vierter Ordnung* entstehen, *welche die doppelte Gerade $C_1'$ besitzt.* Die 8 Paare von Geraden, welche auf dieser Fläche vorhanden sind, entsprechen den 8 Punkten, in welchen $C_5$ der Fläche $F_2$ ausserhalb $C_1$ noch begegnet, und den 8 Geraden von $F_2$, die durch diese Punkte und durch $C_1$ gehen.

Unterwirft man dieser Transformation eine cubische windschiefe Fläche $F_3$, deren Doppelgerade $C_1$ sei, so werden wir *eine Fläche $F_5'$ fünfter Ordnung mit der dreifachen Geraden $C_1'$* finden. Die 11 Punkte, in denen $F_3$ von $C_5$ ausserhalb $C_1$ noch getroffen wird, und die aus diesen Punkten ausgehenden Erzeugenden von $F_3$ liefern sofort die 11 Paare von Geraden, die auf $F_5'$ existiren. Der dreifachen Geraden $C_1'$ wird die Durchschnittscurve von $F_3$ mit der Fläche zweiten Grades entsprechen, welche der Ort der die Curve $C_5'$ dreimal schneidenden Geraden ist*).

Mittelst derselben Transformation führt eine allgemeine, durch $C_1$ gelegte, cubische Fläche $F_3$ zu *einer Fläche $F_7$ siebenter Ordnung mit der dreifachen Geraden $C_1'$ und der Doppelcurve $C_5'$.* Diese Fläche enthält 13 Gerade, die von $C_1'$ geschnittene Sehnen von $C_5'$ sind. Richtet man die ebene Abbildung von $F_3$ so ein, dass die Gerade $C_1$ von einem Kegelschnitte dargestellt wird, so ergiebt sich die niedrigste Abbildung von $F_7'$, wobei den ebenen Schnitten dieser Fläche Curven siebenter Ordnung mit einem dreifachen (1), fünf zweifachen (2, 3, 4, 5, 6) und dreizehn einfachen (7, 8, ... 19) festen Punkten entsprechen. Die dreifache Gerade wird durch eine Curve sechster Ordnung $1^2 . 2^2 \ldots 6^2 . 7 . 8 \ldots 19$, und die Doppelcurve durch eine Curve zwölfter Ordnung $1^6 . 2^3 . 3^3 \ldots 6^3 . 7^2 . 8^2 \ldots 19^2$ dargestellt.

*Drittes Beispiel.* — $K$ besteht aus zwei cubischen Raumcurven

*) Math. Annalen, Bd. 3, S. 185.

$C_3$, $K_3$, die vier gemeinsame Punkte haben: dann ist auch $K'$ ein ähnliches System von zwei Raumcurven $C_3'$, $K_3'$. Stellt man sich nun eine durch $C_3$ gehende allgemeine cubische Fläche $F_3$ vor, so wird das entsprechende Gebilde im zweiten Raume *eine Fläche $F_5'$ fünfter Ordnung mit einer unebenen Doppelcurve $C_3'$ dritter Ordnung sein.* Den 5 Punkten $a$, in welchen $K_3$ die Fläche $F_3$ ausserhalb $C_3$ noch trifft, und den 6 Geraden $b$ von $F_3$, welche die Curve $C_3$ zweimal schneiden, entsprechen die 11 Geraden von $F_5'$; und die Doppelcurve $C_3'$ entspricht einer Curve neunter Ordnung, welche der Ort der Begegnungspunkte von $F_3$ mit den Geraden ist, die $K_3$ zweimal und $C_3$ einmal treffen. Ordnet man die ebene Abbildung von $F_3$ so an, dass die Geraden $b$ durch sechs Punkte 1, 2, .... 6 dargestellt werden, und sind 7, 8, .. 11 die Bilder der fünf Punkte $a$, so wird man ohne weiteres die niedrigste Abbildung von $F_5'$ erhalten, wobei die ebenen Schnitte sich als Curven vierter Ordnung 1. 2. 3. ....... 11 abbilden, und die Doppelcurve durch eine hyperelliptische Curve siebenter Ordnung mit eilf Doppelpunkten dargestellt wird*).

*Viertes Beispiel.* — $K$ besteht aus einer Curve $C_4$ vierter Ordnung und erster Species, und aus zwei windschief liegenden Sehnen $A$, $B$ derselben. Durchaus ähnlich wird dann die Zerlegung von $K'$ sein. Wenn man durch $A$ und $B$ eine allgemeine cubische Fläche $F_3$ hindurchlegt, so wird ihr im andern Raume *eine Fläche fünfter Ordnung*, $F_5'$, entsprechen, *die zwei sich nicht schneidende Doppelgerade $A'$, $B'$ besitzt.* Diese Fläche enthält 13 Gerade: sie entstehen aus den 8 Punkten, in welchen $C_4$ die Fläche $F_3$ ausserhalb $A$ und $B$ noch trifft, und aus den 5 Geraden von $F_3$, die $A$ und $B$ schneiden. Den zwei Doppelgeraden von $F_5'$ entsprechen zwei Raumcurven fünfter Ordnung (vom Geschlechte 2), die bezüglich mit $A$, $B$ den Gesammtdurchschnitt von $F_3$ mit zwei durch $C_4$ gehenden Flächen zweiten Grades bilden. Nimmt man nun die Fundamentalpunkte 1, 2, ... 6 der ebenen Abbildung von $F_3$ so an, dass den Geraden $A$, $B$ die Kegelschnitte 1.3.4.5.6, 2.3.4.5.6 entsprechen, so wird sich auch die niedrigste Abbildung von $F_5'$ ergeben: die Bilder der ebenen Schnitte dieser Fläche werden Curven fünfter Ordnung sein, die zwei Doppelpunkte 1, 2 und zwölf einfache feste Punkte 3, 4, ..... 14 haben: wo die Punkte 7, 8, ... 14 den Durchschnittspunkten von $F_2$ und $C_4$ entsprechen**).

Legt man $F_3$ nicht durch $A$ und $B$, aber durch $C_4$ hindurch, so erhalten wir wieder eine *Fläche $F_5'$ fünfter Ordnung, mit der Doppelcurve $C_4'$* (erster Species). Die 14 Geraden dieser Fläche entsprechen

*) Math. Annalen, Bd. 1, S. 284.

**) Math. Annalen, Bd. 1, S. 306.

1. den 2 Punkten $a$, in welchen $A$, $B$ die $F_3$ ausserhalb $C_4$ noch treffen; 2. den 10 Geraden $b$ von $F_3$, welche Sehnen von $C_4$ sind; 3. den 2 Kegelschnitten, die durch einen Punkt $a$ gehen und $C_4$ viermal begegnen. Um zur niedrigsten Abbildung von $F_5'$ zu gelangen, wird man fünf Fundamentalpunkte 1, 2, ... 5 der Abbildung von $F_3$ so annehmen, dass sie fünf Geraden $b$ darstellen. Ist 0 der sechste Fundamentalpunkt dieser letzten Abbildung, und sind 6, 7 die Bilder der zwei Punkte $a$, so werden die Curven vierter Ordnung $0^2.1.2.3\ldots7$ den ebenen Schnitten von $F_5'$ entsprechen.

Dieselbe Transformation bietet eine unmittelbare und ungemein leichte Behandlung einer Aufgabe dar, die von Herrn Clebsch vorgelegt und von Herrn Lüroth gelöst wurde*). Die Aufgabe lautet: „Die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, welche eine Curve vierter Ordnung, erster Species, in drei und fünf ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen". Sei $C_4$ die Raumcurve; $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ ihre gegebenen Sehnen. Ich nehme das System ($C_4$, $A$, $B$) als Fundamentalcurve eines durch eine cubische Transformation umzuformenden Raumes an; so wird der zweite Raum ein ähnliches Fundamentalsystem ($C_4'$, $A'$, $B'$) besitzen. Dann entsprechen den Sehnen $C$, $D$, $E$ drei Gerade $C'$, $D'$, $E'$, welche ebenso Sehnen von $C_4'$ sind, und es entspricht irgend einem Kegelschnitte, welcher $C_4$ dreimal, $A$ und $B$ je einmal trifft, eine Gerade, welche $C_4'$ nur einmal begegnet. Die vorgelegte Aufgabe gestaltet sich also in die folgende um: „Die Anzahl der Geraden zu bestimmen, welche eine Curve $C_4'$ (vierter Ordnung und erster Species) und drei ihrer Sehnen $C'$, $D'$, $E'$ in je einem Punkte treffen". Der Durchschnitt des Hyperboloïds ($C'$ $D'$ $E'$) mit der Curve $C_4'$ giebt dann ohne weiteres die zwei Lösungen der Frage.

Es versteht sich von selbst, dass man viele andere, die Kegelschnitte und die unebenen cubischen Curven im Raume betreffenden Aufgaben in ähnlicher Weise vereinfachen und auflösen kann.

*Fünftes Beispiel.* — Die Bestandtheile von $K$ sind eine Curve vierter Ordnung und zweiter Species, $C_4$, und ein Kegelschnitt $C_2$, der sich auf $C_4$ in vier Punkten stützt; dann wird $K'$ ein ähnliches System ($C_4'$, $C_2'$) sein.

Ist eine durch $C_2$ gehende cubische Fläche $F_3$ gegeben, so liefert die Transformation *eine Fläche siebenter Ordnung $F_7'$ mit dem dreifachen Kegelschnitte $C_2'$ und der Doppelcurve $C_4'$*. Diese Fläche enthält 9 Gerade und 16 (einfache) Kegelschnitte: eine Gerade ist eine Sehne von $C_2'$; die anderen 8 Geraden sind Sehnen von $C_4'$, welche noch $C_2'$ treffen. In der niedrigsten Abbildung werden die ebenen Schnitte durch Curven sechster Ordnung dargestellt, die fünf feste Doppelpunkte

*) Math. Annalen, Bd. 3, S. 124.

1, 2, 3, 4, 5 und neun einfache gleichfalls feste Punkte 6, 7, 8 ... 14 haben. Der dreifache Kegelschnitt bildet sich auf einer Curve sechster Ordnung $1^2.2^2.3^2.4^2.5^2.6^2.7.8 \ldots 14$ ab, und die Doppelcurve $C_4$ auf einer hyperelliptischen Curve neunter Ordnung $1^3.2^3.3^3.4^3.5^3.7^2.8^2 \ldots 14^2$.

Legen wir durch $C_2$ eine Fläche zweiten Grades, so werden wir *eine Fläche vierter Ordnung mit dem Doppelkegelschnitte $C_2'$* erhalten.

Einer durch $C_4$ gelegten Fläche $F_4$ vierter Ordnung, welche eine von $C_4$ dreimal geschnittene Doppelgerade besitzt, entspricht *eine Fläche sechster Ordnung $F_6'$, welche $C_2'$ einfach, $C_4'$ zweifach enthält und einen auf $C_2'$ gelegenen dreifachen Punkt $o$ hat.* Dieser Fläche gehören die drei von $o$ ausgehenden Sehnen von $C_4'$ an, und ausserdem vier andere Gerade, welche $C_4'$ dreimal schneiden. In der niedrigsten Abbildung von $F_6'$ werden die ebenen Schnitte durch Curven siebenter Ordnung abgebildet, die neun Doppelpunkte und sieben einfache Punkte gemein haben. Das Bild des dreifachen Punktes $o$ ist eine Curve dritter Ordnung, welche die neun doppelten und drei einfachen Fundamentalpunkte enthält. Der Doppelcurve $C_4'$ entspricht eine hyperelliptische Curve vierzehnter Ordnung, welche viermal durch jeden doppelten, zweimal durch die oben erwähnten drei einfachen, und dreimal durch die übrigen einfachen Fundamentalpunkte geht.

*Sechstes Beispiel.* — Drei Kegelschnitte $A$, $B$, $C$ machen die Fundamentalcurve $K$ aus: $A$ hat zwei Punkte gemein mit jeder der beiden anderen, und diese schneiden sich nur in einem Punkte. Die Fundamentalcurve im anderen Raume wird dann aus einer Raumcurve $C_4'$ vierter Ordnung und zweiter Species, und aus zwei sich kreuzenden Sehnen derselben $R'$, $S'$ zusammengesetzt. Ist im ersten Raume eine cubische Fläche $F_3$ gegeben, welche durch den Kegelschnitt $C$ geht, so wird ihr *eine Fläche sechster Ordnung $F_6'$* entsprechen, *welche eine Doppelcurve $C_4'$ und eine Doppelgerade $R'$ besitzt.* Diese Fläche enthält 10 Gerade, von denen 4 die Doppelcurve dreimal schneiden: dagegen schneiden die übrigen $C_4'$ zweimal und $R'$ einmal. — In der niedrigsten Abbildung von $F_6'$ werden die ebenen Schnitte durch Curven sechster Ordnung mit 5 zweifachen und $6+4$ einfachen festen Punkten dargestellt. Der Doppelgeraden entspricht eine cubische Curve, welche die 5 zweifachen und 6 einfachen Fundamentalpunkte enthält; und der Doppelcurve $C_4'$ entspricht eine Curve zwölfter Ordnung, welche durch die $5+6+4$ Fundamentalpunkte bezüglich 4, 2, 3mal geht. Uebrigens ist diese Fläche ein besonderer Fall der oben im ersten Beispiele betrachteten Fläche sechster Ordnung, welche eine Doppelcurve fünfter Ordnung vom Geschlechte 1 besitzt.

Die vorliegende Transformation führt wieder zu *einer Fläche vierter*

*Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte*, wenn man von einer durch die Geraden $R'$, $S'$ gelegten Fläche zweiten Grades ausgeht.

*Siebentes Beispiel.* — $K$ besteht aus vier windschief liegenden Geraden $C$, $D$, $E$, $F$ und aus ihren Transversalen $A$, $B$; im zweiten Raume werden wir ein ähnliches System ($C'$, $D'$, $E'$, $F'$, $A'$, $B'$) haben. Wendet man diese Transformation auf eine durch $A$, $B$, $C$ gehende cubische Fläche $F_3$ an, so wird man *eine mit drei dreifachen $A'$, $B'$, $C'$ und drei zweifachen Geraden $D'$, $E'$, $F'$ behaftete Fläche siebenter Ordnung* $F_7'$ ableiten. Diese Fläche enthält noch 9 einfache Gerade. In der niedrigsten Abbildung haben die ebenen Schnitte zu Bildern Curven vierter Ordnung, die neun einfache feste Punkte 1, 2, . . . 9 haben. Den vielfachen Geraden $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ entsprechen die Kegelschnitte 1.2.3.4.5, 1.2.3.4.6, 5.6.7.8.9 und die Geraden 8.9, 9.7, 7.8.

*Achtes Beispiel.* — Setzen wir nun voraus, dass $K$ aus einer ebenen cubischen Curve $K_3$ und aus einer cubischen Raumcurve $C_3$ bestehe, wobei $C_3$ und $K_3$ drei Punkte gemein haben; dann wird $K'$ eine mit einem dreifachen Punkte $o$ behaftete Raumcurve $K_6'$ sechster Ordnung, vom Geschlechte 1. Legt man durch $K_3$ eine Fläche $F_3$ dritter Ordnung, so wird der umgeformte Ort *eine Fläche $F_6'$ sechster Ordnung sein, welche $K_6'$ zur Doppelcurve und $o$ zum dreifachen Punkte hat.* Diese Fläche enthält 6 sich nicht schneidende Gerade, welche den 6 ausserhalb $K_3$ fallenden Durchschnittspunkten $a$ von $F_3$ mit $C_3$; und 27 Kegelschnitte, welche den 27 Geraden von $F_3$ entsprechen. Die ebenen Schnitte von $F_6'$ werden auf $F_3'$ durch Curven sechster Ordnung dargestellt, welche von den die sechs Punkte $a$ enthaltenden Flächen zweiten Grades ausgeschnitten werden. Handelt es sich also darum, die cubische Fläche $F_3$ in die Fläche sechster Ordnung $F_6'$ überzuführen, so kann man statt der cubischen Transformation, deren Grundcurve aus $K_3$ und $C_3$ besteht, eine quadratische Transformation anwenden: das heisst, ein dreimal unendliches lineares System von Flächen zweiten Grades als den Ebenen des anderen Raumes entsprechend annehmen. Alle diese Flächen gehen durch die sechs festen Punkte $a$; folglich ist diese Transformation nur unter der Bedingung rational umkehrbar, dass man sie mit der Gleichung der Fläche verknüpft, die transformirt werden soll. In der That schneiden sich je drei jener Flächen zweiten Grades noch in zwei Punkten; und die Fläche $F_3$ wird nur von einem derselben durchlaufen. — Die gewöhnliche Darstellung von $F_3$ giebt unmittelbar die niedrigste ebene Abbildung von $F_6'$; den ebenen Schnitten entsprechen Curven sechster Ordnung, welche sechs doppelte und sechs einfache feste Punkte haben. Das Bild des dreifachen Punktes $o$ besteht aus drei Punkten, die in der Abbildung von $F_3$ den drei Begegnungspunkten von $C_3$ und $K_3$ ent-

sprechen. Die Doppelcurve $K_6'$ wird durch eine Curve fünfzehnter Ordnung mit sechs fünffachen, sechs dreifachen und drei doppelten Punkten dargestellt.

Geht $F_3$ durch $C_3$, nicht durch $K_3$, so wird *eine Fläche $F_4'$ vierter Ordnung mit dem dreifachen Punkte $o$* entstehen: den 6 auf $F_3$ liegenden Sehnen von $C_3$ und den 6 Punkten, in welchen $F_3$ und $K_3$ ausserhalb $C_3$ sich treffen, entsprechen 12 Gerade von $F_4'$, welche durch $o$ gehen. Die niedrigste Abbildung fällt hier mit der Centralprojection aus $o$ zusammen.

Bei dieser Transformation entsprechen den windschiefen Flächen, deren Erzeugende Sehnen von $C_3$ sind, die Kegel mit der Spitze $o$. Insbesondere entspricht der von den Tangenten von $C_3$ gebildeten Fläche der von $o$ an die Fläche gelegte Berührungskegel (zweiten Grades), welcher der Ort der die Curve $K_6'$ dreimal treffenden Geraden ist.

Sei $C_3$ das System von drei Geraden $A$, $B$, $C$, von denen die beiden ersten windschief liegen, während beide von der dritten geschnitten werden. Dann wird $K'$ aus einer Raumcurve $C_4'$ (vierter Ordnung und erster Species) und zwei ihrer Sehnen $A'$, $B'$ bestehen, welche einen Punkt $o'$ der Curve gemein haben. Nehmen wir nun eine windschiefe Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung an, auf welcher $A$ eine $m$-fache, $B$ eine $n$-fache Directrix, und $C$ eine einfache Erzeugende sein möge. Der entsprechende Ort im andern Raume wird dann ein Kegel $(m+n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Spitze $o$ sein: dieser Kegel besitzt eine $(m-1)$ fache und eine $(n-1)$ fache Kante, $A'$, $B'$.

Geht man von einer durch $C_4'$ gelegten und mit dem dreifachen Punkte $o'$ behafteten Fläche $F_4'$ vierter Ordnung aus, so führt dieselbe Transformation zu *einer Fläche fünfter Ordnung $F_5$, auf welcher $A$ und $B$ doppelte, $C$ eine dreifache Gerade ist.* Diese merkwürdige Fläche besitzt 10 Gerade, von denen 4 $A$ und $B$ schneiden, während die übrigen zu zwei in drei durch $C$ gehenden Ebenen liegen. Die Projection von $F_4'$ aus dem dreifachen Punkte $o'$ giebt sofort die niedrigste ebene Abbildung von $F_5$, in welcher den ebenen Schnitten Curven dritter Ordnung entsprechen, die vier Punkte 1, 2, 3, 4 gemein haben. Sind $\alpha$, $\beta$ die Mittelpunkte der Geradenbüschel, welche die ebenen durch $A$, $B$ resp. gehenden Schnitte darstellen, so ist die Gerade $\alpha\beta$ das Bild von $C$; den Doppelgeraden $A$, $B$ entsprechen aber zwei in 1234 sich schneidende Kegelschnitte $(a)$, $(b)$. Seien $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ die Durchschnittspunkte von $(a)$, $(b)$ mit der Geraden $\alpha\beta$; dann treffen die Bilder der ebenen Schnitte von $F_5$ den Kegelschnitt $(a)$ in zwei mit $\beta$, den Kegelschnitt $(b)$ in zwei mit $\alpha$ geradlinig liegenden Punkten, und die Gerade $\alpha\beta$ in drei Punkte, welche eine Gruppe der cubischen Involution $(\alpha\alpha'\alpha'', \beta\beta'\beta'')$ bilden.

*Neuntes Beispiel.* — Seien nun die Bestandtheile von $K$ eine cubische Raumcurve $C_3$, eine Gerade $C_1$, und ein Kegelschnitt $C_2$,

welcher $C_3$ dreimal und $C_1$ zweimal begegnet. Dann besteht $K'$ aus einer rationalen Curve $C_5'$ fünfter Ordnung mit einem dreifachen Punkte $o$, und aus einer Sehne $C'$ derselben Curve. Mittelst dieser Transformation geht eine durch $C_2$ gelegte Fläche $F_2$ zweiten Grades in *eine Fläche $F_5'$ fünfter Ordnung mit dem dreifachen Punkte $o$ und der Doppelcurve $C_5'$ über.* Diese Fläche enthält ausser $C_1'$ noch 9 Gerade, welche den drei (nicht auf $C_2$ liegenden) Begegnungspunkten $a$ von $F_2$ mit $C_3$, und den sechs aus den Punkten $a$ ausgehenden Geraden von $F_2$ entsprechen: und diese 10 Geraden bilden 10 *Doppeldreien**). Auf $F_5'$ liegen fünf Schaaren von Kegelschnitten: und die Auflösung der Gleichung fünften Grades, welche diese fünf Schaaren giebt, liefert ohne weiteres die Auflösung der zwei Gleichungen zehnten Grades, von denen die zehn Geraden und die zehn Doppeldreien abhängen. — Den ebenen Schnitten von $F_5$ entsprechen auf $F_2$ Curven vierter Ordnung und erster Species, so dass eine quadratische Transformation existirt, welche, mit Hülfe der Gleichung von $F_2$, von dieser Fläche zu $F_5$ führt. — Aus der Centralprojection von $F_2$ und einer darauf folgenden quadratischen ebenen Transformation ergiebt sich die niedrigste Abbildung von $F_5'$, wobei die Bilder der ebenen Schnitte Curven dritter Ordnung sind, die durch vier feste Punkte gehen. Der Doppelcurve entspricht eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung mit 7 Doppelpunkten, welche mit den 4 Fundamentalpunkten und 3 anderen, das Bild des dreifachen Punktes $o$ ausmachenden, Punkten zusammenfallen.

Durch die umgekehrte Transformation führt eine den Punkt $o$ und die Gerade $C_1'$ enthaltende cubische Fläche $F_3'$ zu *einer Fläche sechster Ordnung $F_6$, welche eine doppelte Raumcurve dritter Ordnung $C_3$ und eine diese nicht schneidende Doppelgerade $C_1$ besitzt.* Diese Fläche enthält 10 Gerade, welche den Punkten entsprechen, in welchem $F_3'$ und $C_5'$ sich ausserhalb $o$ und $C_1'$ noch treffen; 12 Kegelschnitte, welche den 10 von $C_1'$ geschnittenen Geraden von $F_3'$, dem in der Ebene $oC_1'$ liegenden Kegelschnitte von $F_3'$ und dem Punkte $o$ entsprechen; 32 cubische Raumcurven, welche den 16 von $C_1'$ nicht getroffenen Geraden von $F_3'$ und den 16 durch $o$ gehenden und von $C_1'$ geschnittenen Kegelschnitten von $F_3'$ entsprechen; u. s. w. — Man bilde $F_3'$ auf einer Ebene so ab, dass die Gerade $C_1'$ durch den Kegelschnitt 1.2.3.4.5 dargestellt werde; sei 0 der sechste Fundamentalpunkt dieser Abbildung; 6 das Bild des Punktes $o$ (von $F_3'$); und 7, 8, ... 16 die Bilder der Begegnungspunkte von $F_3'$ und $C_5'$. Dann haben wir die niedrigste Abbildung von $F_6'$: die ebenen Schnitte werden durch Curven siebenter Ordnung $0^3 . 1^2 . 2^2 . \ldots 6^2 . 7 . 8 \ldots 16$; die Doppelgerade

*) Mathem. Annalen, 3. Band, S. 75, Anmerkung.

durch eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung $0^2. 1^2. 2^2 \ldots 6^2. 7. 8 \ldots 16$; und die cubische Doppelcurve durch eine ebenfalls hyperelliptische Curve eilfter Ordnung $0^5. 1^3. 2^3 \ldots 6^3. 7^2. 8^2 \ldots 16^2$ dargestellt*).

---

Es schien mir nicht überflüssig, eine grössere Anzahl von Beispielen anzuführen, um die Nützlichkeit dieses Verfahrens möglichst gut zu beweisen; denn es sind nicht nur alle schon von Herrn Clebsch und Nöther untersuchten Flächen, sondern auch manche andere auf die leichteste Weise entstanden**). Die oben angewandten Transformationen sind solcher Art, dass ihnen umgekehrte Transformationen gleicher Ordnung entsprechen; es giebt aber noch andere, welche bei der Umkehrung ihre Ordnung ändern. Z. B. giebt es (unter anderen) drei cubische Transformationen, denen Transformationen vierten, fünften, sechsten Grades bezüglich entsprechen***). Die Flächen dritter Ordnung des ersten Raumes, welche auf den Ebenen des zweiten sich abbilden, haben bei der ersten Transformation eine Curve fünfter Ordnung (vom Geschlechte 1) und einen Punkt; bei der zweiten eine cubische Raumcurve, eine diese nicht schneidende Gerade und zwei Punkte; bei der dritten einen Doppelpunkt, drei einfache Punkte und einen ebenen Schnitt gemein.

Es liegt keine Schwierigkeit vor, wenn man Transformationen höherer Ordnung betrachten will, mögen sie aus Verbindungen und Wiederholungen der bekannten quadratischen und cubischen Transformationen, oder vielmehr aus directen Forschungen hervorgehen. Ich werde hier nur wenige Beispiele noch angeben.

Es giebt eine Transformation zweiten Grades, deren Umkehrung zum vierten Grade führt. Den Ebenen des ersten Raumes entsprechen Flächen zweiten Grades, welche vier feste Punkte und in einem derselben eine feste Berührungsebene haben. Den Ebenen des zweiten Raumes entsprechen Steiner'sche Flächen, welche die drei Doppelgeraden und noch einen Kegelschnitt gemein haben. Geht man von einer beliebig im ersten Raume liegenden Fläche zweiter Ordnung aus, so erhält man *eine mit drei konischen und einem uniplanaren Punkte behaftete Fläche vierter Ordnung,* welche vier im letzten Punkte sich kreuzende und auf einer Ebene liegende Gerade besitzt. Es ist dies vielleicht das erste Beispiel einer auf einer Ebene abbildbaren Fläche

---

*) Math. Annalen, Bd. 3, S. 203.

**) S. überdiess die neue Abhandlung von H. Nöther, welche genau gleichzeitig (Math. Annalen, Bd. 3, p. 547) erschien, wie diese Mittheilung in den Gött. Nachrichten vom 3. Mai und meine erste Note in den Rendiconti dell' Istituto Lombardo vom 4. desselben Monats.

***) Die beiden erstern sind in der oben citirten Abhandlung von H. Cayley berührt.

vierter Ordnung, welche weder eine doppelte Linie noch einen dreifachen Punkt hat.

Wenn man die im vierten Beispiele betrachtete Transformation zweimal ausführt, so entsteht eine Transformation fünften Grades, wobei den Ebenen jedes Raumes Flächen fünfter Ordnung entsprechen, welche eine feste Doppelcurve vierter Ordnung und erster Species besitzen und durch vier feste Sehnen dieser Curve gehen. Mittelst dieser Transformation bewirkt man den Uebergang von einer Fläche dritter Ordnung zu *einer Fläche siebenter Ordnung mit einer dreifachen Curve vierter Ordnung und erster Species.* Die niedrigste ebene Abbildung dieser Fläche ist so beschaffen, dass den ebenen Schnitten Curven fünfter Ordnung mit einem dreifachen (0) und neun einfachen festen Punkten 1, 2, .. 9, und der dreifachen Curve eine Curve neunter Ordnung $0^5 . 1^2 . 2^2 \ldots 9^2$ entspricht. Die Punkte dieser Curve bilden solche Tripel, dass, wenn eine von 0 ausgehende Gerade die Curve in vier Punkten schneidet, die vier Paare von zugehörigen Punkten mit 1, 2, .. 9 zusammen auf einer Curve vierter Ordnung liegen, welche in 0 einen Doppelpunkt hat.

Es giebt eine Transformation vierten Grades, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen vierter Ordnung entsprechen, welche einen doppelten Kegelschnitt, eine Curve vierter Ordnung und zweiter Species und einen Punkt gemein haben. Die umgekehrte Transformation ist wieder vierten Grades.

Bei einer anderen Transformation vierten Grades entsprechen den Ebenen des ersten Raumes Flächen vierter Ordnung, welche einen gemeinsamen Doppelkegelschnitt haben und durch eine feste Curve fünfter Ordnung (vom Geschlechte 1) gehen. Die umgekehrte Transformation ist nur dritten Grades.

Es giebt eine Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechen, welche eine $(n-2)$ fache Gerade und eine Curve $(3n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung (vom Geschlechte $3n-7$) gemein haben. Diese Curve trifft die vielfache Gerade in $3n-7$ Punkten. Die umgekehrte Transformation ist wieder $n^{\text{ten}}$ Grades.

---

Schliesslich können wir aussagen: *sobald die ebene Abbildung einer Fläche vollzogen ist, ist man im Stande, alle die Transformationen anzugeben, bei welchen den Ebenen eines Raumes Flächen entsprechen, die derselben Art sind, wie die gegebene, und welche dieselben vielfachen Linien und Punkte besitzen.*

Sei nämlich $\varphi$ die Fläche, deren ebene Abbildung $\Pi$ gegeben ist. Dann wird $\varphi$ von allen, dieselben vielfachen Linien und Punkte besitzenden Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (derselben Ordnung $n$) ausserdem in

Curven geschnitten, deren Bilder auf $\Pi$ ein gewisses System $\Sigma$ ausmachen. Nehmen wir nun auf $\Pi$ ein *homaloïdisches* Netz von rationalen Curven $K$ an, deren jede, zusammen mit einem unveränderlichen Orte $L$ (einem Complexe von mehreren auch vielfach zu rechnenden Curven), zu einer Curve des Systems $\Sigma$ ergänzen möge. Drei nicht zu einem und demselben Büschel gehörende Curven $K_1$, $K_2$, $K_3$ des Netzes bestimmen drei Büschel von Flächen $\varphi + \alpha_1\varphi_1$, $\varphi + \alpha_2\varphi_2$, $\varphi + \alpha_3\varphi_3$, welche *ein homaloïdisches System von Flächen*

$$(1) \qquad \alpha\varphi + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 = 0$$

liefern. Dann können wir die Flächen dieses Systems als den Ebenen eines anderen Raumes entsprechend annehmen, sodass eine *eindeutige Transformation* $n^{\text{ten}}$ *Grades* entstehen wird. Die Ordnung der Raumcurven, welche den Curven $K$ der Abbildung $\Pi$ entsprechen, stimmt mit dem Grade der umgekehrten Transformation, das heisst mit der Ordnung der das homaloïdische System im zweiten Raume

$$(2) \qquad \beta\psi + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \beta_3\psi_3 = 0$$

ausmachenden Flächen $\psi$ überein.

Die Jacobi'sche Curve des Netzes $K$ besteht*) aus mehreren Linien $k$; und die diesen Linien entsprechenden Raumcurven, zusammen mit den (vielfach zu rechnenden) dem ganzen Systeme (1) gemeinsamen Curven, ergänzen sich zum vollen Durchschnitte der gegebenen Fläche $\varphi$ mit der Jacobi'schen Fläche des Systems (1). Anders gesagt: die $k$ sind die Bilder der Raumcurven (des ersten Raumes), welche den Punkten entsprechen, wo die Fundamentalcurven des zweiten Raumes (d. h. die den Flächen $\psi$ gemeinsamen Curven) von der der gegebenen Fläche $\varphi$ entsprechenden Ebene geschnitten werden. Haben also die Flächen (1) eine einfache, eine zweifache, ... eine $r$-fache Curve gemein, so wird diese 1.3, 2.7, ... $r(4r-1)$ mal**) im Durchschnitte der gegebenen Fläche $\varphi$ mit der Jacobi'schen Fläche des Systems (1) enthalten sein; der fernere Schnitt dieser Flächen aber wird ausschliesslich durch die Curven $k$ dargestellt, aus denen die Jacobi'sche Curve des Netzes $K$ besteht (mit Rücksicht auf die von den Fundamentalpunkten von $\Pi$ dargestellten Linien von $\varphi$). Wenn (in der gegebenen Fläche $\varphi$) $l_1$ Geraden, $l_2$ Kegelschnitte, $l_3$ (rationale) Curven dritter Ordnung u. s. w. den Linien $k$ der Abbildung $\Pi$ entsprechen, werden die Flächen $\psi$ des zweiten Raumes eine einfache Curve $l_1^{\text{ter}}$ Ordnung, eine zweifache Curve $l_2^{\text{ter}}$ Ordnung, eine dreifache Curve $l_3^{\text{ter}}$ Ordnung, u. s. w. haben. Und die Betrachtung der Ver-

---

*) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Mem. Accad. Bologna, 1865, serie 2, t. 5).

**) Max Nöther in den Math. Annalen, Bd. 2, S. 293.

hältnisse der gegebenen Abbildung Π, des Netzes $K$ und des Ortes $L$ mit den ihnen entsprechenden Raumobjecten, wird uns ohne wesentliche Schwierigkeiten zur Entdeckung der inneren Eigenschaften des Systems (2) führen; womit man aber auch im Stande sein wird, die umgekehrte Transformation als vollständig erklärt anzusehen.

Jedes Netz von Curven, wie $K$, liefert eine rationale Transformation der hier in Betracht kommenden Art. Nun erlaube ich mir noch ein Beispiel anzuführen, um die Fertigkeit und die Fruchtbarkeit der hier vorgeschlagenen Methode einleuchtend zu machen*).

Sei $\varphi$ eine Fläche dritter Ordnung: und 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Fundamentalpunkte ihrer ebenen Abbildung Π. Als Curven $K$ nehme ich die durch 1, $o_1$, $o_2$**) beschriebenen Kegelschnitte an, so dass $L$ eine Curve siebenter Ordnung $1^2.2^3.3^3.4^3.5^3.6^3$ sein wird. Diese Curve zerfällt in einen Kegelschnitt 2.3.4.5.6 und eine Curve fünfter Ordnung $1^2.2^2.3^2.4^2.5^2.6^2$; und die entsprechenden Raumlinien sind eine Gerade $R$ und eine cubische unebene Curve $C_3$, die keinen Punkt gemein haben. Die Flächen des Systems (1) sind also dritter Ordnung und enthalten $R$, $C_3$ und zwei gegebene Punkte $O_1$, $O_2$; und je zwei von denselben schneiden einander in einer Curve fünfter Ordnung ($p=0$), die durch $O_1$, $O_2$ geht und $R$ viermal, $C_3$ achtmal trifft. Solche Curven fünfter Ordnung entsprechen den Geraden des anderen Raumes; folglich sind die den Punkten $O_1$, $O_2$ und den Linien $R$, $C_3$ entsprechenden Theile der Jacobi'schen Fläche des Systems (2), Flächen resp. erster, erster, vierter, achter Ordnung. — Die Jacobi'sche Fläche des Systems (1) begegnet $\varphi$ längs den dreimal zu zählenden $R$, $C_3$; längs einer von der Geraden $o_1 o_2$ dargestellten cubischen Raumcurve; längs zwei von $1 o_1$, $1 o_2$ dargestellten Kegelschnitten und längs fünf von den Punkten 2, 3, 4, 5, 6 dargestellten Geraden. Demnach besitzt das zweite System die folgenden Fundamentalcurven: 1. eine dreifache Gerade $A$, die dem Orte der cubischen Raumcurven entspricht, welche durch $O_1$, $O_2$ gehen, $R$ zweimal und $C_3$ fünfmal schneiden (dieser Ort ist das Hyperboloïd $O_1 O_2 C_3$); 2. eine doppelte Gerade $B_1$, die der Ebene $O_1 R$ entspricht, als dem Orte der Kegelschnitte, die durch $O_1$ gehen, $R$ zweimal und $C_3$ dreimal begegnen; 3. eine andere Doppelgerade $B_2$, die analogerweise der Ebene $O_2 R$ entspricht; 4. eine einfache Curve $C_5$ fünfter Ordnung ($p=0$), welche dem Orte der Geraden entspricht, die $C_3$ zweimal und $R$ einmal schneiden: dieser Ort ist die Fläche vierten Grades $R C_3^2$.

*) Andere Beispiele sind in den Rendiconti del R. Istituto Lombardo (4. maggio und 1. giugno 1871) zu sehen.

**) $o_1$, $o_2$ sind zwei beliebige, aber von den Fundamentalpunkten verschiedene Punkte der Ebene Π.

Die Geraden $A$, $B_1$ haben einen Punkt gemein, weil das Hyperboloïd $O_1 O_2 C_3$ und die Ebene $O_1 R$ längs einem Kegelschnitte sich schneiden; und so treffen sich auch $A$, $B_2$; $B_1$ und $B_2$ aber liegen schief gegen einander. — $A$ und $C_5$ haben zwei Punkte gemein, wegen der zwei den Orten $O_1 O_2 C_3$, $R C_3^2$ gemeinsamen Geraden; und da die Ebene $O_1 R$ drei Sehnen von $C_3$ enthält, so stützt sich $B_1$ auf $C_5$ in drei Punkten; und ähnlicherweise $B_2$ auf $C_5$.

Hieraus folgt, dass die Flächen $\psi$ des Systems (2) Flächen fünfter Ordnung sind, welche die dreifache Gerade $A$, die Doppelgeraden $B_1$, $B_2$ und die einfache rationale Curve $C_5$ gemein haben; und dass den Geraden des ersten Raumes cubische Raumcurven entsprechen, welche $A$, $B_1$, $B_2$, $C_5$ resp. 2, 1, 1, 4mal schneiden (denn diese Zahlen sind die Grade der Orte $O_1 O_2 C_3$, $O_1 R$, $O_2 R$, $R C_3^2$, welche die Jacobi'sche Fläche des Systems (1) ausmachen). Somit ist das System (2) gänzlich bestimmt.

Die Jacobi'sche Fläche dieses Systems enthält die folgenden Orte: 1. die (zweimal zu rechnenden) Ebenen $A B_1$, $A B_2$; 2. die Fläche vierten Grades $A^2 B_1^2 B_2^2 C_5$, welche von den auf $B_1$, $B_2$, $C_5$ sich stützenden Geraden ausgefüllt ist; 3. die Fläche achten Grades $A^5 B_1^3 B_2^3 C_5^2$, welche aus den von $A$ geschnittenen Sehnen von $C_5$ gebildet ist.

Nun entsprechen offenbar:

den von $A$ geschnittenen Geraden die Kegelschnitte, welche $R$ 2mal, $C_3$ 3mal treffen;

den von $B_1$ ($B_2$) geschnittenen Geraden die cubischen Raumcurven, welche durch $O_2$ ($O_1$) gehen und $R$ 2mal, $C_3$ 5mal treffen;

den von $B_1$ und $B_2$ geschnittenen Geraden die Sehnen von $C_3$;

den von $C_5$ einmal geschnittenen Geraden die Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species, welche durch $O_1$, $O_2$ gehen und $R$ 3mal, $C_3$ 6mal treffen;

den zweipunktigen Sehnen von $C_5$ die cubischen Raumcurven, welche durch $O_1$, $O_2$ gehen und $R$ 2mal, $C_3$ 4mal treffen;

den dreipunktigen Sehnen von $C_5$ die Kegelschnitte, welche durch $O_1$, $O_2$ gehen und $R$ einmal, $C_3$ 2mal treffen;

der einzigen vierpunktigen Sehne von $C_5$ die Gerade $O_1 O_2$;

den $A$ und $C_5$ schneidenden Geraden die Geraden, welche $R$ und $C_3$ treffen;

den $B_1$($B_2$) und $C_5$ schneidenden Geraden die Kegelschnitte, welche durch $O_2$($O_1$) gehen und $R$ einmal, $C_3$ 3mal treffen;

den von $B_1$($B_2$) geschnittenen zweipunktigen Sehnen von $C_5$ die Erzeugenden des cubischen Kegels $O_2 C_3$($O_1 C_3$);

den durch $O_1 (O_2)$ gehenden Geraden die Kegelschnitte, welche $C_5$ 4 mal, $B_1$ und $B_2$ einmal treffen;

den Ebenen durch $A$ die Ebenen durch $R$;

den Ebenen durch $B_1 (B_2)$ die Flächen zweiten Grades durch $O_2 C_3$ $(O_1 C_3)$;

den Flächen zweiten Grades durch $A B_1 B_2$ die Flächen zweiten Grades durch $C_3$;

den Ebenen durch $O_1 (O_2)$ die Flächen vierter Ordnung $A^2 B_1 B_2^2 C_5$ $(A^2 B_1^2 B_2 C_5)$;

den Ebenen durch die Gerade $O_1 O_2$ die cubischen Flächen durch $A B_1 B_2 C_5$; u. s. w.

Einer Fläche $F_3$ dritter Ordnung, welche durch $C_5$ geht, entspricht eine Fläche $F_5$ fünfter Ordnung, auf welcher $R$ eine Doppelgerade, $C_3$ eine einfache Curve, $O_1$ und $O_2$ dreifache Punkte sind. Somit hat man eine neue Classe von abbildbaren Flächen fünfter Ordnung. Die gewöhnliche Abbildung von $F_3$ giebt die niedrigste Darstellung von $F_5$; worin den ebenen Schnitten Curven siebenter Ordnung entsprechen, welche einen dreifachen $(a_1)$, sieben doppelte $(1, 2, 3, 4, 5, a_2, a_3)$ und sieben einfache $(0, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23})$ feste Punkte besitzen. Dann entsprechen noch:

den dreifachen Punkten $O_1$, $O_2$ zwei Curven dritter Ordnung, deren eine die Punkte $0, 1, 2, 3, 4, 5, a_1, a_2, a_3, b_{11}, b_{12}, b_{13}$, die andere die Punkte $0, 1, 2, 3, 4, 5, a_1, a_2, a_3, b_{21}, b_{22}, b_{23}$ enthält;

der Doppelgeraden $R$ eine Curve vierter Ordnung

$$1, 2, 3, 4, 5, a_1^2, a_2, a_3, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23};$$

den ebenen Schnitten durch $R$ die Curven dritter Ordnung des Büschels $0.1.2.3.4.5, a_1, a_2, a_3$;

den ferneren Schnitten von $F_5$ durch die Flächen zweiter Ordnung $O_2 C_3$ die Curven dritter Ordnung des Büschels $0.1.2.3.4.5.b_{11}.b_{12}.b_{13}$;

den ferneren Schnitten von $F_5$ durch die Flächen zweiter Ordnung $O_1 C_3$ die Curven dritter Ordnung des Büschels $0.1.2.3.4.5.b_{21}.b_{22}.b_{23}$;

den ebenen Schnitten durch $O_1 O_2$ die Geraden durch $a_1$; u. s. w.

Hieraus erkennt man noch die besondere Lage der Fundamentalpunkte der Abbildung.

Unter die Transformationen dritten Grades, welche umgekehrte Transformationen fünften Grades zulassen, giebt es noch eine, die mit der oben erörterten eine gewisse Analogie darbietet. Die $\psi$ sind noch Flächen fünfter Ordnung, welche eine dreifache Gerade $A$ und zwei Doppelgerade $B_1$, $B_2$ besitzen; die einfache Fundamentalcurve $C_5$ aber ist nicht mehr rational; sie gehört zum Geschlechte $p = 1$ und trifft

$A$ in drei, $B_1$ und $B_2$ in zwei Punkten. Im ersten Raume sind die $\varphi$ Flächen dritter Ordnung, welche einen doppelten (konischen) und zwei einfache feste Punkte haben und ausserdem längs einer (durch die festen Punkte gehenden) Raumcurve vierter Ordnung und erster Species sich schneiden.

Ich schliesse diese Mittheilung; Jeder wird aber die unzählbaren Anwendungen leicht vorhersehen, welche man von dieser unerschöpflichen Quelle von Transformationen auf die Raumgeometrie und insbesondere auf die Untersuchung und Abbildung algebraischer Flächen machen kann.

Mailand, den 1. Juni 1871.

# Ueber die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum und zweier materieller Punkte um einander.*)

Von R. Clausius in Bonn.

Ich habe vor Kurzem, bei Untersuchungen über die mechanische Wärmetheorie, eine neue auf stationäre Bewegungen bezügliche Gleichung aufgestellt**), welche im Zusammenhange steht mit dem Satze von der kleinsten Wirkung, aber sich auf Fälle erstreckt, auf welche dieser Satz keine Anwendung findet. Ich will die Gleichung hier nur in den Formen anführen, welche für die hier beabsichtigten Betrachtungen geeignet sind, indem ich in Bezug auf weitere Umgestaltungen auf meine frühere Abhandlung verweise.

Es sei ein materieller Punkt gegeben, welcher sich unter dem Einflusse einer gegebenen Kraft stationär in geschlossener Bahn bewegt. Die Masse des beweglichen Punktes sei $m$, seine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Coordinaten seien $x$, $y$, $z$, die Componenten der auf ihn wirkenden Kraft $X$, $Y$, $Z$, seine Geschwindigkeit $v$ und die Umlaufszeit $i$. Alle diese Grössen, mit Ausnahme der ersten und letzten, sind im Verlaufe der Bewegung veränderlich, aber jede hat für den ganzen Umlauf einen gewissen Mittelwerth. Einen solchen Mittelwerth wollen wir dadurch von der veränderlichen Grösse unterscheiden, dass wir über das Zeichen, welches die letztere darstellt, einen waagerechten Strich machen, sodass z. B. $\overline{x}$ den Mittelwerth von $x$ bedeutet.

Nun denken wir uns die ursprüngliche Bewegung durch eine andere, von ihr unendlich wenig verschiedene stationäre Bewegung

---

*) Aus den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vom 24. Mai 1871.

**) Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien; Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, S. 167 und Poggendorff's Annalen Bd. 142, S. 433.

ersetzt, welche in veränderter, aber ebenfalls geschlossener Bahn, mit veränderter Geschwindigkeit und unter dem Einflusse einer veränderten Kraft stattfinden kann. Indem wir diese beiden Bewegungen untereinander vergleichen, wollen wir den Unterschied zwischen einer auf die ursprüngliche Bewegung bezüglichen Grösse und der auf die veränderte Bewegung bezüglichen entsprechenden Grösse die Variation dieser Grösse nennen, und durch ein vorgesetztes $\delta$ bezeichnen, sodass z. B. $\delta i$ die Variation der Umlaufszeit $i$ ist. Bei denjenigen Grössen, welche im Verlaufe jeder Bewegung veränderlich sind, kommt es aber noch darauf an, festzustellen, welche Werthe als entsprechende Werthe der Grösse betrachtet werden sollen. Dieses möge in folgender Weise geschehen. Wir nehmen zuerst zwei einander unendlich nahe liegende Stellen der beiden Bahnen als entsprechende Stellen an und rechnen die Bewegungszeiten von den Momenten ab, wo der bewegliche Punkt diese Stellen durchschreitet. Dann setzen wir bei der ursprünglichen Bewegung, indem wir die Bewegungszeit bis zur Erreichung irgend einer anderen Stelle der Bahn mit $t$ bezeichnen:

$$t = i\varphi$$

und bei der veränderten Bewegung setzen wir:

$$t + \delta t = (i + \delta i)\,\varphi;$$

worin $\varphi$ eine veränderliche Grösse ist, welche ich die Phase der Bewegung genannt habe und welche in beiden Bewegungen während eines Umlaufes von 0 bis 1 wächst. Wenn nun in diesen beiden Gleichungen die Grösse $\varphi$ einen und denselben Werth hat, so sind $t$ und $t + \delta t$ entsprechende Werthe der Bewegungszeiten. Aus diesen ergeben sich dann weiter die entsprechenden Stellen der beiden Bahnen und die entsprechenden Werthe aller anderen auf die beiden Bewegungen bezüglichen Grössen.

Nach diesen Erläuterungen wird nun die folgende Gleichung, welche die einfachste Form meiner oben erwähnten Gleichung ist, verständlich sein:

$$(1)\qquad -\overline{(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)} = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i.$$

Wenn die Kraft, welche auf den beweglichen Punkt wirkt, ein Ergal hat, d. h. wenn die Kraftcomponenten sich durch die negativ genommenen partiellen Differentialcoefficienten einer Function der Coordinaten des Punktes darstellen lassen, welche mit $U$ bezeichnet werden möge, so geht die Gleichung über in:

$$(2)\qquad \overline{\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z} = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i.^{*)}$$

*) In meiner oben citirten früheren Abhandlung habe ich noch untersucht, unter welchen Umständen die linke Seite dieser Gleichung als Ausdruck der me-

Die Summe

$$\frac{dU}{dx}\,\delta x + \frac{dU}{dy}\,\delta y + \frac{dU}{dz}\,\delta z$$

darf nicht ohne Weiteres als die Variation des Ergals betrachtet werden und darf daher, wenn man $U$ die Bedeutung beilegt, dass es nicht nur für die ursprüngliche, sondern auch für die veränderte Bewegung das Ergal darstelle, nicht ohne Weiteres mit $\delta U$ bezeichnet werden. Die vorige Gleichung gilt nämlich, wie schon angedeutet, auch für solche Fälle, wo die auf den Punkt wirkende Kraft eine Veränderung erlitten hat, welche man sich mathematisch dadurch ausgedrückt denken kann, dass eine oder mehrere in dem Ergal enthaltene, während einer stationären Bewegung constante Grössen in den beiden stationären Bewegungen verschiedene Werthe haben. In einem solchen Falle muss natürlich bei der Bestimmung der Variation $\delta U$ neben der Verschiedenheit der Coordinaten auch die Verschiedenheit der Constanten berücksichtigt werden.

Wir wollen nun aber annehmen, dass bei denjenigen beiden Bewegungen, welche wir gegenwärtig zu vergleichen haben, ein solcher Unterschied nicht vorkomme, sondern dass das Ergal bei beiden durch eine und dieselbe Function der Coordinaten mit unveränderten Constanten dargestellt werde. In diesem Falle ist die obige Summe die vollständige Variation des Ergals und kann mit $\delta U$ bezeichnet werden, und demgemäss ist die linke Seite der Gleichung (2) der Mittelwerth der Variation des Ergals, oder, was dasselbe ist, die Variation des Mittelwerthes des Ergals, welche durch $\delta \overline{U}$ dargestellt wird. Die Gleichung (2) geht also für diesen Fall über in:

$$(3) \qquad \delta \overline{U} = \frac{m}{2}\,\delta \overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i\,.$$

Diese Gleichung wollen wir nun der Form nach noch etwas vereinfachen. Wir gestalten sie zunächst folgendermaassen um:

$$\delta \overline{U} = m\overline{v^2}\left(\tfrac{1}{2}\,\frac{\delta \overline{v^2}}{\overline{v^2}} + \delta \log i\right) = m\overline{v^2}\,(\tfrac{1}{2}\,\delta \log \overline{v^2} + \delta \log i)$$

$$\delta \overline{U} = m\overline{v^2}\,\delta \log\left(i\sqrt{\overline{v^2}}\right).$$

Hierin wollen wir für das unter dem Logarithmus stehende Produkt ein einheitliches Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(4) \qquad \lambda = i\sqrt{\overline{v^2}}\,.$$

chanischen Arbeit, welche beim Uebergange aus der einen stationären Bewegung in die andere gethan wird, gelten kann. Indessen brauchen wir darauf hier nicht einzugehen, da es sich für die hier beabsichtigten Untersuchungen nicht darum handelt, den Uebergang aus einer stationären Bewegung in eine andere zu verfolgen, sondern nur darum, zwei gegebene, unendlich wenig von einander verschiedene stationäre Bewegungen zu vergleichen.

Dann geht unsere Gleichung über in

$$\delta \overline{U} = m\overline{v^2}\, \delta \log \lambda. \tag{5}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung eine Variation ist, muss auch die rechte Seite eine solche sein. Daraus folgt, dass $m\overline{v^2}$ eine Function von $\lambda$ ist, und demgemäss muss dann auch $\overline{U}$ eine Function von $\lambda$ sein. Für die letztere wollen wir zunächst ein beliebiges Functionszeichen einführen, indem wir setzen:

$$\overline{U} = f(\lambda). \tag{6}$$

Dann lässt sich auch die andere Function, welche $m\overline{v^2}$ darstellt, sofort angeben. Es ist nämlich, wenn $f'(\lambda)$ die erste Ableitung von $f(\lambda)$ bedeutet:

$$\delta \overline{U} = f'(\lambda)\, \delta \lambda.$$

Wenn wir dieses Produkt in die Gleichung (5) einführen und zugleich für die darin angedeutete Variation des Logarithmus ihren Werth setzen, so erhalten wir:

$$f'(\lambda)\, \delta \lambda = m\overline{v^2}\, \frac{\delta \lambda}{\lambda},$$

woraus folgt:

$$m\overline{v^2} = \lambda f'(\lambda),$$

oder, wenn wir noch mit 2 dividiren:

$$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}\lambda f'(\lambda). \tag{7}$$

Ferner wollen wir aus (4) folgende Gleichung bilden:

$$i = \frac{\lambda}{\sqrt{\overline{v^2}}}.$$

Wenn wir hierin für $\overline{v^2}$ den Werth setzen, welcher sich aus der vorigen Gleichung ergiebt, so kommt:

$$i = \sqrt{\frac{m\lambda}{f'(\lambda)}}. \tag{8}$$

Endlich wollen wir noch eine vierte Grösse durch $\lambda$ darstellen. Nach dem Satze von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit hat man die Gleichung:

$$U + \frac{m}{2} v^2 = E,$$

worin $E$ eine im Verlaufe der Bewegung constante Grösse ist, welche wir die Energie nennen wollen. Wenn die Summe der beiden hier an der linken Seite stehenden veränderlichen Grössen während der ganzen Bewegung einen constanten Werth hat, so hat auch die Summe ihrer Mittelwerthe denselben Werth, und wir können daher schreiben:

$$E = \overline{U} + \frac{m}{2}\overline{v^2}.$$

Indem wir hierin die Ausdrücke aus (6) und (7) einsetzen, erhalten wir:

(9) $$E = f(\lambda) + \tfrac{1}{2}\lambda f'(\lambda).$$

Wir können somit, sobald die Form der Function $f(\lambda)$ bekannt ist, vermöge der vier Gleichungen (6), (7), (8) und (9) das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft, die Umlaufszeit und die Energie durch eine und dieselbe Grösse $\lambda$ ausdrücken. Es versteht sich von selbst, dass wir auch aus je zweien dieser Gleichungen $\lambda$ eliminiren und dadurch Beziehungen zwischen je zweien der vier genannten Grössen erhalten können. Denken wir uns dieses in der Weise ausgeführt, dass jede der drei ersten Gleichungen mit der letzten combinirt wird, so erhalten wir drei Gleichungen, welche das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft und die Umlaufszeit als Functionen der Energie bestimmen. Diese Bestimmungsart ist für die Anwendung insofern besonders bequem, als die Energie für jede Bewegung einen constanten Werth hat, welcher sich sofort angeben lässt, wenn nur für irgend eine Stellung des beweglichen Punktes seine Geschwindigkeit bekannt ist.

Es kommt nun nur noch darauf an, die Form der Function $f(\lambda)$ zu finden. Diese hängt natürlich von dem Gesetze ab, dem die auf den Punkt wirkende Kraft unterworfen ist. Besonders leicht ist die Bestimmung der Function, wenn die Kraft *eine von einem festen Centrum ausgehende Anziehungskraft ist, welche durch irgend eine Function der Entfernung dargestellt wird*, und diesen Fall wollen wir jetzt betrachten.*)

Die Entfernung des beweglichen Punktes vom Anziehungscentrum möge mit $r$ und die Function, welche die Grösse der Kraft darstellt, mit $F'(r)$ bezeichnet werden. Wenn wir dann setzen:

(10) $$\int F'(r)\,dr = F(r),$$

so ist $F(r)$ das Ergal, und durch Einführung dieser Function in die Stelle von $U$ geht die Gleichung (6) über in:

(11) $$\overline{F(r)} = f(\lambda).$$

Wenn nun für irgend einen speciellen Fall der Bewegung die dieser Gleichung genügende Form der Function $f(\lambda)$ gefunden werden kann, so gilt dieselbe Form auch allgemein. Ein solcher Fall ist der, wenn der Punkt sich um das Anziehungscentrum in einer *Kreisbahn* bewegt. Dann ist $r$ constant und wir brauchen daher nicht den Mittelwerth von $F(r)$ zu nehmen, sondern können einfach schreiben:

*) Da die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer Centralkraft nicht in geschlossener Bahn stattzufinden braucht, so will ich noch einmal hervorheben, dass die nachfolgenden Formeln sich nur auf solche Bewegungen beziehen sollen, die in geschlossenen Bahnen stattfinden. Für die Anwendung meiner Gleichung auf andere Bewegungen würden noch besondere Auseinandersetzungen nothwendig sein, welche hier zu weit führen würden.

(12) $$F(r) = f(\lambda).$$

Ferner ist in diesem Falle auch die Geschwindigkeit constant und wir können daher auch in der Gleichung (4) an die Stelle des Mittelwerthes $\overline{v^2}$ einfach $v^2$ setzen, wodurch sie übergeht in

$$\lambda = i\sqrt{v^2} = iv.$$

Nun ist aber bei constanter Geschwindigkeit das Produkt $iv$ gleich der Bahnlänge, und da die Bahn in unserem Falle ein Kreis mit dem Radius $r$ ist, so erhalten wir:

$$\lambda = 2\pi r$$

oder:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Dieses in die Gleichung (12) für $r$ eingesetzt, giebt:

(13) $$F\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f(\lambda).$$

Hierdurch ist die Function $f(\lambda)$ bestimmt. Durch Differentiation nach $\lambda$ erhalten wir ferner:

(14) $$\frac{1}{2\pi}F'\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f'(\lambda).$$

Der Einfachheit wegen wollen wir nun noch das neue Zeichen $\varrho$ einführen mit der Bedeutung:

(15) $$\varrho = \frac{\lambda}{2\pi},$$

dann erhalten wir:

(16) $$f(\lambda) = F(\varrho)$$

(17) $$f'(\lambda) = \frac{1}{2\pi}F'(\varrho)$$

(18) $$\lambda f'(\lambda) = \varrho F'(\varrho).$$

Wenden wir dieses auf die Gleichung (11), welche an die Stelle von (6) getreten ist, und auf die Gleichungen (7), (8) und (9) an, so gelangen wir für den Fall, wo die wirksame Kraft eine von einem festen Centrum ausgehende und durch eine Function der Entfernung dargestellte Anziehungskraft ist, zu folgenden Gleichungen:

(19) $$\overline{F(r)} = F(\varrho)$$

(20) $$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{1}{2}\varrho F'(\varrho)$$

(21) $$i = 2\pi\sqrt{\frac{m\varrho}{F'(\varrho)}}$$

(22) $$E = F(\varrho) + \frac{1}{2}\varrho F'(\varrho),$$

worin alle vorkommenden Functionen bekannt sind.

Als noch specielleren Fall wollen wir annehmen, die Anziehungskraft sei irgend einer positiven oder negativen Potenz der Entfernung proportional, wobei wir aber die minus erste Potenz ausnehmen wollen,

welche bei der Integration zum Logarithmus führt und daher besser besonders behandelt wird. Wir setzen also:

$$F'(r) = k r^n, \tag{23}$$

worin $k$ und $n$ Constante sind, deren letztere von $-1$ verschieden ist. Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$F(r) = \frac{k}{n+1} r^{n+1} \tag{24}$$

und durch Anwendung dieser Functionsformen gehen die obigen vier Gleichungen über in:

$$\frac{k}{n+1} \overline{r^{n+1}} = \frac{k}{n+1} \varrho^{n+1} \tag{25}$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{k}{2} \varrho^{n+1} \tag{26}$$

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \varrho^{\frac{1-n}{2}} \tag{27}$$

$$E = k \frac{n+3}{2(n+1)} \varrho^{n+1}. \tag{28}$$

Wenn man mittelst der letzten Gleichung aus den drei ersten $\varrho$ eliminirt, so erhält man:

$$\frac{k}{n+1} \overline{r^{n+1}} = \frac{2}{n+3} E \tag{29}$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{n+1}{n+3} E \tag{30}$$

$$i = 2\pi m^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{n+1}} \left[\frac{2(n+1)}{n+3} E\right]^{\frac{1-n}{2(n+1)}}. \tag{31}$$

Um endlich noch weiter zu specialisiren, wollen wir für $n$ zwei bestimmte Werthe setzen, welche am häufigsten vorkommen.

Zuerst soll angenommen werden, es sei $n = 1$. Dieser Fall entspricht den einfachsten elastischen Schwingungsbewegungen, bei denen die Kraft, mit welcher ein Punkt, der seine Gleichgewichtslage verlassen hat, nach dieser zurückgezogen wird, proportional der Entfernung ist. Für diesen Fall gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$\frac{k}{2} \overline{r^2} = \frac{k}{2} \varrho^2 = \tfrac{1}{2} E \tag{32}$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{k}{2} \varrho^2 = \tfrac{1}{2} E \tag{33}$$

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{34}$$

Die letzte Gleichung sagt aus, dass die Umlaufszeit von der Elongation der Schwingungen unabhängig ist, dass also die Schwingungen isochron sind.

Zweitens soll angenommen werden, es sei $n = -2$, was dem Newton'schen Anziehungsgesetze entspricht, welches in der Bewegung

der Weltkörper herrscht. Für diesen Fall gehen die obigen Gleichungen über in:

$$(35)\qquad -k\,\overline{\frac{1}{r}} = -k\,\frac{1}{\varrho} = 2\,E$$

$$(36)\qquad \frac{m}{2}\,\overline{v^2} = \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{\varrho} = -\,E$$

$$(37)\qquad i = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\varrho^{\frac{3}{2}} = 2\,\pi k\sqrt{m}\,(-\,2\,E)^{-\frac{3}{2}}.$$

Die letzte Gleichung, welche wir auch so schreiben können:

$$i^2 = (2\,\pi)^2\,\frac{m}{k}\,\varrho^3,$$

entspricht dem dritten Kepler'schen Gesetze, welches als sehr specieller Fall in unseren Gleichungen enthalten ist. Es muss aber etwas anders ausgesprochen werden, als es von Kepler geschehen ist und auch jetzt noch häufig geschieht, dass nämlich *die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Cuben der mittleren Entfernungen verhalten.* Dieses ist nicht streng richtig, denn $\varrho$ ist nicht der Mittelwerth von $r$, sondern $\frac{1}{\varrho}$ ist der Mittelwerth von $\frac{1}{r}$. Die andere, strengere Form des Satzes, dass *die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Cuben der grossen Axen der Ellipsen verhalten*, stimmt vollkommen mit unserer Gleichung überein, denn es lässt sich leicht nachweisen, dass $\varrho$ gleich der halben grossen Axe der Ellipse ist, welche bei dieser Art von Centralkraft die Bahn bildet.

Wir wollen uns jetzt zur Bewegung zweier materieller Punkte umeinander wenden.

Nehmen wir zunächst an, es sei irgend eine Anzahl materieller Punkte gegeben, welche sich in stationärer Weise in geschlossenen Bahnen bewegen, und diese Bewegungen erleiden eine unendlich kleine Aenderung, sodass wieder stationäre Bewegungen in geschlossenen Bahnen entstehen, so lautet meine Gleichung für diesen Fall:

$$(38)\qquad -\,\Sigma\overline{(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)} = \Sigma\,\frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + \Sigma m\overline{v^2}\,\delta\log i\,.$$

Sind die Kräfte, welche auf die Punkte wirken, der Art, dass sie ein Ergal haben, welches wir mit $U$ bezeichnen wollen, und setzen wir wieder voraus, dass bei der Veränderung der Bewegung das Ergal eine unveränderte Function der Coordinaten sämmtlicher Punkte bleibe, so können wir, entsprechend der Gleichung (3), setzen:

$$(39)\qquad \delta\,\overline{U} = \Sigma\,\frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + \Sigma m\overline{v^2}\,\delta\log i\,.$$

Wenn die in unserem Systeme wirkenden Kräfte nur aus Anziehungen und Abstossungen bestehen, welche die beweglichen Punkte untereinander ausüben und welche nach irgend einem Gesetze von der Entfernung abhängen, so lässt sich bekanntlich das Ergal sehr einfach

ausdrücken. Sei die Kraft, welche zwei Punkte mit den Massen $m$ und $m_1$ in der Entfernung $r$ aufeinander ausüben, durch $m m_1 \varphi'(r)$ dargestellt, wobei ein positiver Werth der Function einer Anziehung entspricht, sei ferner:

$$\varphi(r) = \int \varphi'(r)\, dr,$$

dann ist das Ergal bestimmt durch die Gleichung:

$$U = \Sigma m m_1 \varphi(r),$$

worin die Summe alle Combinationen der gegebenen Massenpunkte zu je zweien umfasst. Demnach geht die vorige Gleichung für diesen Fall über in:

$$(40) \qquad \delta\, \Sigma m m_1 \overline{\varphi(r)} = \Sigma \frac{m}{2}\, \delta \overline{v^2} + \Sigma m \overline{v^2}\, \delta \log i\,.$$

Wir wollen nun speciell annehmen, dass nur zwei materielle Punkte mit den Massen $m$ und $m_1$ gegeben seien, welche sich unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Anziehung umeinander bewegen. In diesem Falle können wir, wenn wir alle Grössen, die sich auf den zweiten Punkt beziehen, durch Buchstaben bezeichnen, die mit einem Index versehen sind, die vorige Gleichung ohne Anwendung von Summenzeichen so schreiben:

$$m m_1\, \delta \overline{\varphi(r)} = \frac{m}{2}\, \delta \overline{v^2} + \frac{m_1}{2}\, \delta \overline{v_1{}^2} + m \overline{v^2}\, \delta \log i + m_1 \overline{v_1{}^2}\, \delta \log i_1\,.$$

Da nun aber bei solcher Bewegung zweier Punkte umeinander beide Punkte gleiche Umlaufszeit haben, so ist $i_1 = i$, und die beiden letzten Glieder lassen sich daher zusammenfassen. Indem wir zugleich die beiden ersten Glieder der rechten Seite unter ein gemeinsames Variationszeichen bringen, können wir schreiben:

$$(41) \qquad m m_1\, \delta \overline{\varphi(r)} = \tfrac{1}{2}\, \delta \left(m \overline{v^2} + m_1 \overline{v_1{}^2}\right) + \left(m \overline{v^2} + m_1 \overline{v_1{}^2}\right) \delta \log i\,.$$

Dieser Gleichung können wir noch eine vereinfachte Gestalt geben. Es möge dazu als neue Grösse die relative Geschwindigkeit $u$ der beiden Punkte eingeführt werden, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(42) \qquad u^2 = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2.$$

Nun gilt aber auch, wie man leicht durch Auflösen der Klammern ersehen kann, die Gleichung:

$$m m_1 \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 = (m + m_1)\left[m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\right] - \left(m \frac{dx}{dt} + m_1 \frac{dx_1}{dt}\right)^2.$$

Unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass beide Punkte sich nur unter ihrer gegenseitigen Einwirkung in geschlossenen Bahnen umeinander bewegen, muss ihr gemeinsamer Schwerpunkt fest bleiben und es ist daher:

$$m \frac{dx}{dt} + m_1 \frac{dx_1}{dt} = 0,$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$m m_1 \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 = (m + m_1)\left[m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\right].$$

Eben solche Gleichungen gelten für die $y$- und $z$-Richtung, und wenn wir uns diese drei Gleichungen addirt denken, so erhalten wir:

$$m m_1 u^2 = (m + m_1)(m v^2 + m_1 v_1^2)$$

oder:

(43) $$m v^2 + m_1 v_1^2 = \frac{m m_1}{m + m_1} u^2.$$

Wenn man diesen Werth von $m v^2 + m_1 v_1^2$ in die Gleichung (41) einführt und dann das Produkt $m m_1$ forthebt, so kommt:

(44) $$\delta \overline{\varphi(r)} = \frac{1}{m + m_1}\left(\tfrac{1}{2}\delta \overline{u^2} + \overline{u^2}\,\delta \log i\right).$$

Zur noch weiteren Abkürzung wollen wir diese Gleichung in folgender Form schreiben:

(45) $$\delta \overline{\varphi(r)} = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1}\,\delta \log\left(i\sqrt{\overline{u^2}}\right),$$

und hierin wollen wir wieder, wie in dem früheren Falle, für das unter dem Logarithmuszeichen stehende Produkt ein einheitliches Zeichen einführen, indem wir setzen:

(46) $$\lambda = i\sqrt{\overline{u^2}},$$

wodurch wir erhalten:

(47) $$\delta \overline{\varphi(r)} = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1}\,\delta \log \lambda.$$

Diese Gleichung lässt sich nun ganz ebenso behandeln, wie es mit der Gleichung (5) geschehen ist. Da die linke Seite eine Variation ist, muss auch die rechte Seite eine solche sein, und es muss daher $\overline{u^2}$ eine Function von $\lambda$ sein, und daraus folgt weiter, dass auch $\overline{\varphi(r)}$ eine Function von $\lambda$ sein muss. Wir setzen daher vorläufig:

(48) $$\overline{\varphi(r)} = f(\lambda)$$

und stellen uns die Frage, ob sich vielleicht für irgend eine specielle Art von Bewegung die Form der Function $f(\lambda)$ finden lässt. Das kann geschehen, wenn die beiden Punkte sich so umeinander bewegen, dass ihr gegenseitiger Abstand $r$ constant bleibt. Dann brauchen wir von $\varphi(r)$ nicht den Mittelwerth zu nehmen, sondern können schreiben:

(49) $$\varphi(r) = f(\lambda).$$

Ferner ist für diesen Fall auch $u$ constant und die Gleichung (46) geht über in:

$$\lambda = i\sqrt{u^2} = iu.$$

Das hierin vorkommende Produkt $iu$ hat eine einfache Bedeutung. Es ist nämlich die relative Bahnlänge, d. h. die Länge der Bahn, welche wir erhalten, wenn wir uns den einen Punkt ruhend denken

und dem anderen die Geschwindigkeit $u$ zuschreiben. Diese Bahn ist ein Kreis mit dem Radius $r$, und wir erhalten daher:

$$\lambda = i u = 2\pi r$$

und somit:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Diesen Werth von $r$ in (49) eingesetzt, giebt:

(50) $$\varphi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f(\lambda),$$

und hierdurch ist die Form der Function $f(\lambda)$ bestimmt. Führen wir noch, wie früher, das Zeichen $\varrho$ ein mit der Bedeutung

(51) $$\varrho = \frac{\lambda}{2\pi},$$

so kommt:

$$\varphi(\varrho) = f(\lambda),$$

und durch Anwendung dieser Gleichung geht (48) über in:

(52) $$\overline{\varphi(r)} = \varphi(\varrho).$$

Indem wir nun wieder zu der Gleichung (47) zurückkehren, können wir sie dem Vorigen nach in folgender Form schreiben:

$$\delta\varphi(\varrho) = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1}\,\delta\log(2\pi\varrho)$$

oder:

$$\varphi'(\varrho)\,\delta\varrho = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1}\cdot\frac{\delta\varrho}{\varrho},$$

woraus folgt:

(53) $$\overline{u^2} = (m + m_1)\,\varrho\,\varphi'(\varrho).$$

Wenn wir ferner in der Gleichung (46) an die Stelle von $\lambda$ das Produkt $2\pi\varrho$ setzen, so kommt:

$$2\pi\varrho = i\sqrt{\overline{u^2}}$$

oder:

$$i = 2\pi\frac{\varrho}{\sqrt{\overline{u^2}}}.$$

Hierin für $\overline{u^2}$ seinen Werth aus (53) gesetzt, giebt:

(54) $$i = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho}{(m + m_1)\,\varphi'(\varrho)}}.$$

Endlich wollen wir noch die Energie unseres Systems ausdrücken. Es ist nämlich:

$$E = m m_1\,\varphi(r) + \frac{m}{2}v^2 + \frac{m_1}{2}v_1^2$$

$$= m m_1\,\varphi(r) + \frac{1}{2}\frac{m m_1}{m + m_1}u^2$$

und somit auch:

$$E = m m_1\,\overline{\varphi(r)} + \frac{1}{2}\frac{m m_1}{m + m_1}\overline{u^2}.$$

Hierin die Werthe von (52) und (53) eingesetzt, giebt:

(55) $$E = m m_1\left[\varphi(\varrho) + \tfrac{1}{2}\varrho\,\varphi'(\varrho)\right].$$

Wir sind also wieder zu einem System von vier Gleichungen, (52), (53), (54) und (55) gelangt, vermöge deren wir das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft, die Umlaufszeit und die Energie durch $\varrho$ darstellen, oder auch, nach Elimination von $\varrho$, die drei zuerst genannten Grössen als Functionen der Energie ausdrücken können, also als Functionen einer Grösse, deren Werth sich angeben lässt, sobald für irgend einen Abstand der beiden Punkte ihre relative Geschwindigkeit bekannt ist.

Die hier gefundenen vier Gleichungen sind von derselben Form, wie die Gleichungen (19) bis (22), was man auch im Voraus erwarten konnte, da die früher behandelte Bewegung nur ein specieller Fall der zuletzt behandelten ist, nämlich der Grenzfall, zu welchem man gelangt, wenn man die eine Masse gegen die andere als so gross annimmt, dass man sie bei der Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt als ruhend betrachten kann. Es wird daher auch nicht nöthig sein, für die hier gefundenen Gleichungen wieder die speciellen Formen zu entwickeln, welche sie annehmen, wenn die Kraft einer Potenz der Entfernung proportional ist, da diese Formen ganz den früher entwickelten entsprechen.

# Ueber rationale Curven vierter Ordnung.

Von Emil Weyr in Prag.

In einer schönen Abhandlung im dritten Bande (Seite 415) dieser Annalen behandelt Herr Korndörfer einen Gegenstand, mit welchem ich mich theilweise ebenfalls beschäftigt habe. Ich erlaube mir die Grundgleichungen anzuführen, welche ich insbesondere bei Untersuchung der Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species angewendet habe. Durch $\xi$ bezeichne ich einen Punkt der Curve, dessen Coordinaten als rationale Functionen vierten Grades der Veränderlichen $\xi$ ausgedrückt werden.

Es seien nun $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4$ vier Punkte, oder resp. die vier Parameterwerthe von solchen vier Punkten einer Raumcurve vierter Ordnung, die in einer und derselben Ebene liegen. Es ist leicht zu begründen, dass zwischen diesen vier Parametern die Gleichung besteht:

$$(1)\qquad A_0 + A_1(\xi)_1 + A_2(\xi)_2 + A_3(\xi)_3 + A_4(\xi)_4 = 0$$

wobei die $A$ nur von der Curve abhängige Constanten, und $(\xi)_i$ die Summe der Produkte der Parameter ist, von denen jedes $i$ Factoren enthält, die von einander verschieden sind.

Die Gleichung (1) kann die Grundlage einer Behandlung der Curven sein. Man gelangt mittelst derselben zu dem System der dreipunktig schneidenden Sekanten u. s. f.

Wir wollen speciell jenen Fall berücksichtigen, in welchem unsere Curve einen Doppelpunkt besitzt. Für diesen Fall muss zwischen den Coefficienten $A$ eine Beziehung stattfinden, welche wir leicht finden, indem wir ausdrücken, dass es zwei Werthe $\xi_3\,\xi_4$ giebt, welche mit *irgend* zwei Werthen $\xi_1\,\xi_2$ die Gleichung (1) befriedigen. Diese besonderen zwei Werthe von $\xi_3$ und $\xi_4$ werden dann die Parameterwerthe sein, welche den beiden Nachbarpunkten des Doppelpunktes entsprechen. Man erhält für diesen Fall folgende drei Gleichungen, welche von den Parametern des Doppelpunktes erfüllt werden müssen:

$$A_4\xi_3\xi_4 + A_3(\xi_3 + \xi_4) + A_2 = 0,$$
$$A_3\xi_3\xi_4 + A_2(\xi_3 + \xi_4) + A_1 = 0,$$
$$A_2\xi_3\xi_4 + A_1(\xi_3 + \xi_4) + A_0 = 0,$$

woraus sich sofort die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten ergiebt, welche von **Brill** im dritten Bande dieser Annalen (p. 457) entwickelt worden ist. Wenn wir dem Parameter $\xi$ eine solche Bedeutung unterlegen, dass die Werthe 0 und $\infty$ dem Doppelpunkte entsprechen, so wird $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, und Gleichung (1) kann in die Form:

$$(2) \qquad \xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4 = K$$

gebracht werden. Für die vier Wendeberührebenen erhält man die Gleichung:

$$\xi^4 = K,$$

woraus sich sofort ergiebt, dass ihre vier Berührungspunkte in derselben Ebene liegen. Wenn man die vier Parameter derselben wirklich hinschreibt, so ergiebt sich ferner, dass die vier Punkte ein harmonisches System bilden. Ueberhaupt ist die Gleichung (2) sehr geeignet für eine einfache Untersuchung der Curve.

Im Falle, dass die Curve eine Spitze (Rückkehrpunkt) besitzt, bleibt eine einzige Wendeberührebene übrig. Wählt man die Bedeutung des Parameters $\xi$ in diesem Falle so, dass dem Rückkehrpunkt der Werth $\infty$ und dem Berührungspunkt der Wendeberührebenen der Werth 0 entspricht, so nimmt (1) die einfache Form an:

$$(3) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung lassen sich in einfacher Weise die von **Cremona** über die developpable Fläche fünfter Ordnung (welche von den Tangenten unserer Curve gebildet wird) aufgestellten Sätze (siehe Comptes rendus 1861) nachweisen.

Rom, Ostern 1871.

# Notiz über die Vertheilung der Elektricität auf einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper.

Von J. W. P. Godt in Leipzig.

Das Problem der elektrischen Vertheilung auf einem Körper von der genannten Beschaffenheit ist von Mehler im 68. Bande (Seite 134) des Crelle-Borchardt'schen Journals in völlig allgemeiner Weise gelöst worden. In den folgenden Zeilen soll nur ein *specieller* Fall des Problems in Betracht gezogen, aber gezeigt werden, dass man in diesem speciellen Falle auf einem etwas einfacheren Wege zur Lösung des Problems gelangen kann.

Bedient man sich der in dem genannten Aufsatze angewandten Coordinaten $\vartheta$, $\omega$, $\varphi$, welche mit den rechtwinkligen in dem Zusammenhange stehen:

$$x = \frac{a}{i} \frac{\sin \vartheta i \cos \varphi}{p^2},$$

$$y = \frac{a}{i} \frac{\sin \vartheta i \sin \varphi}{p^2},$$

$$z = a \frac{\sin \omega}{p^2},$$

wo
$$p^2 = \cos \vartheta i - \cos \omega,$$

so ist $\omega = \beta$ die Gleichung einer Kugelkalotte, die über einem festen Hauptkreise steht und deren Mittelpunkt $M$ auf der $z$-Achse liegt. Die Coordinaten dieses Punktes $M$ sind: $\vartheta = 0$, $\omega = 2\beta$, $\varphi$ beliebig.

Die Gleichung $\vartheta =$ const. gehört einem Ringe von kreisförmigem Querschnitt an, und die Gleichung $\varphi =$ const. einer von der $z$-Achse begrenzten Halbebene.

Ist nun gegeben ein Punkt $P$ mit den Coordinaten $\vartheta_1$, $\omega_1$, $\varphi_1$, so findet man den ihm in Bezug auf die Kalotte $\beta$ conjugirten harmonischen Pol, indem man die Gerade $MP$ zieht und ihren zweiten Durchschnittspunkt mit dem Ringe $\vartheta_1$ aufsucht. Der so gefundene Pol $B_1$ besitzt, wie eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, die Coordinaten $\vartheta_1$, $2\beta - \omega_1$, $\varphi_1$. Wäre nun im Punkte $P$ die Masse $m$ vereinigt, so würde man ihr Potential auf Punkte der Kalotte $\beta$

ersetzen können, indem man in $B_1$ die Masse $m\sqrt{\frac{B_1 M}{PM}}$ anbrächte. Diese letztere Masse aber lässt sich noch in anderer Weise darstellen. Es hat nämlich die Entfernung $r$ zweier Punkte $\vartheta$, $\omega$, $\varphi$ und $\vartheta_1$, $\omega_1$, $\varphi_1$ den Werth:

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\frac{\cos\vartheta i \cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i \sin\vartheta_1 i \cos(\varphi - \varphi_1) - \cos(\omega - \omega_1)}{(\cos\vartheta i - \cos\omega)(\cos\vartheta_1 i - \cos\omega_1)}},$$

und unter Anwendung dieser Formel findet man:

$$\sqrt{\frac{B_1 M}{PM}} = \sqrt{\frac{\cos\vartheta_1 i - \cos\omega_1}{\cos\vartheta_1 i - \cos(2\beta - \omega_1)}} = \frac{p(P)}{p(B_1)},$$

wenn man nämlich unter $p(P)$ den Ausdruck $p$ versteht, bezogen auf den Punkt $P$.

Es mögen zwei Kalotten $\omega = \beta$ und $\omega = \gamma$ construirt gedacht werden. Die auf der ersteren befindlichen Punkte mögen mit $(\beta)$, die auf der letzteren befindlichen mit $(\gamma)$ bezeichnet werden. Diese beiden Kalotten $\beta$ und $\gamma$ zerlegen den ganzen Raum in zwei Theile $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$, von denen einer endlich, der andere unendlich ist. Bei dem vorliegenden Problem kommt es wesentlich darauf an, eine Function $V$ zu ermitteln, welche im Raume $\mathfrak{R}$ der Bedingung $\Delta V = 0$, sowie den bekannten Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit Genüge leistet, und welche ausserdem in jedem Punkte der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ gleich gross ist mit der reciproken Entfernung dieses Punktes von einem festen Punkte $P$, der innerhalb des Raumes $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Lage hat. Man kann diese Function $V$ in einzelnen Fällen als das Potential eines in $\mathfrak{R}_1$ befindlichen Systems von Massenpunkten darstellen.

Es sei z. B. der Raum $\mathfrak{R}$ der endliche, $\vartheta_1$, $\omega_1$, $\varphi_1$ die Coordinaten von $P$, und $\beta < \omega_1 < \gamma$. Man denke sich in $P$ die Masseneinheit concentrirt, construire die Pole $B_1$ und $C_1$ von $P$ in Bezug auf $\beta$ und $\gamma$, und denke sich in denselben Massen, welche respective auf die Punkte $(\beta)$ und $(\gamma)$ äquipotential sind mit jener in $P$ concentrirten Masseneinheit; alsdann erhält man nach dem Obigen für die Coordinaten und Massen dieser Punkte $B_1$ und $C_1$ folgende Werthe.

| Punkte: | Coordinaten: | Massen: |
|---|---|---|
| $B_1$, | $\vartheta_1,\ 2\beta - \omega_1,\ \varphi_1$, | $\frac{p(P)}{p(B_1)}$, |
| $C_1$, | $\vartheta_1,\ 2\gamma - \omega_1,\ \varphi_1$, | $\frac{p(P)}{p(C_1)}$. |

Es übt nun aber $B_1$ auf die Punkte $(\gamma)$, und $C_1$ auf die Punkte $(\beta)$ ein Potential aus. Diese Potentiale müssen zerstört werden. Wir haben daher den Pol von $B_1$ für $\gamma$, und von $C_1$ für $\beta$ aufzusuchen und daselbst geeignete Massen anzubringen. So erhalten wir

| die Punkte: | mit den Coordinaten: | und Massen: |
|---|---|---|
| $C_2$, | $\vartheta_1,\ 2\gamma - 2\beta + \omega_1,\ \varphi_1,$ | $-\frac{p(P)}{p(C_2)}$, |
| $B_2$, | $\vartheta_1,\ 2\beta - 2\gamma + \omega_1,\ \varphi_1,$ | $-\frac{p(P)}{p(B_2)}$. |

$C_2$ und $B_2$ üben wieder auf ($\beta$) und ($\gamma$) Potentiale aus, die zerstört werden müssen. Fährt man daher fort, Paare von Massenpunkten hinzuzufügen, so wird man die vorgeschriebenen Oberflächenwerthe genau erhalten, sobald irgend einmal ein solches Punktepaar zusammenfällt. Es ist aber die allgemeine Form für die Coordinaten der in Rede stehenden Punktepaare folgende:

$C_{2n})\ \vartheta_1,\ 2n\delta + \omega_1,\ \varphi_1, \qquad B_{2n+1})\ \vartheta_1,\ -2n\delta + 2\beta - \omega_1,\ \varphi_1,$

$B_{2n})\ \vartheta_1,\ -2n\delta + \omega_1,\ \varphi_1, \qquad C_{2n+1})\ \vartheta_1,\ 2(n+1)\delta + 2\beta - \omega_1,\ \varphi_1,$

wo zur Abkürzung $\gamma - \beta = \delta$ gesetzt worden ist. Zwei solche Punkte $B$, $C$ fallen zusammen, wenn sich ihre $\omega$ Coordinaten nur um $2\pi$ unterscheiden, also

$$C_{2n} \quad \text{mit } B_{2n}, \quad \text{wenn } \delta = \frac{\pi}{2n},$$

$$B_{2n+1} \text{ mit } C_{2n+1}, \text{ wenn } \delta = \frac{\pi}{2n+1} \text{ ist.}$$

Man erhält also überhaupt auf diese Weise ein bestimmtes endliches Punktsystem, wenn $\delta$, der Winkel, den beide Kalotten am Rande miteinander bilden, ein *aliquoter* Theil von $\pi$ ist. Ist solches nicht der Fall, hat aber $\delta$ ein *rationales* Verhältniss zu $\pi$, so wird man allerdings auch in diesem Falle ein bestimmtes endliches Punktsystem erhalten. Soll aber das Potential des Systems die gesuchte Function repräsentiren, so muss das System ganz *ausserhalb* $\mathfrak{R}$ liegen; und dies tritt nur ein in jenem specielleren Falle.

Dass es im specielleren Falle eintritt, erkennt man leicht, wenn man setzt $\delta = \frac{2\pi}{m}$, und bedenkt, dass man, wie schon bemerkt, die $\omega$ Coordinaten um $2\pi$ vermehren oder vermindern kann; denn man kann den $\omega$ Coordinaten der Punkte mit ungeradem Index die Form geben:

$$2\beta - \omega_1 - s\frac{2\pi}{m}, \quad \text{wo} \quad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m-1;$$

und denen der Punkte mit geradem Index die Form:

$$\omega_1 + s\frac{2\pi}{m}, \quad \text{wo} \quad s = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1.$$

Diese Formen zeigen, dass alle Punkte *ausserhalb* des Raumes $\mathfrak{R}$ liegen. Das Potential dieses Systems, welches also die gesuchte Function $V$ darstellt, nimmt, wenn man Kürze halber

$$\cos\vartheta i \cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i \sin\vartheta_1 i \cos(\varphi - \varphi_1) = \cos\eta i$$

setzt, folgende Gestalt an:

$$\frac{p\,.\,p(P)}{a\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{s=0}^{s=m-1}\left(\cos\eta i-\cos\left(\omega-2\beta+\omega_1+s\frac{2\pi}{m}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\\ -\sum\limits_{s=1}^{s=m-1}\left(\cos\eta i-\cos\left(\omega-\omega_1-s\frac{2\pi}{m}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right\}.$$

Das gleiche Resultat findet man, wenn $\mathfrak{R}$ der unendliche Raum ist. Diese Formel hat Mehler a. a. O. abgeleitet aus seiner allgemeinen, für jeden *beliebigen* Werth von $\delta$ gültigen Formel. Uebrigens kann man auch umgekehrt von der hier gefundenen Formel aus zu jener von Mehler gegebenen allgemeinen Formel gelangen, ohne dabei freilich ihre Gültigkeit für einen anderen als den hier betrachteten speciellen Fall zu erweisen.

Leipzig, im Juni 1871.

# Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung.

Von Rudolf Sturm in Bromberg.

---

Diese Flächen der vierten und fünften Ordnung, die eine endliche Zahl von einfachen Geraden besitzen und von Herrn Clebsch grösstentheils schon untersucht worden sind und zwar auf Grund ihrer Abbildbarkeit, haben mich seit längerer Zeit ebenfalls beschäftigt und ich erlaube mir vor einer umfangreichen Veröffentlichung meiner synthetischen Untersuchungen auf Einladung des Herrn Clebsch schon hier auszugsweise Mittheilungen zu machen.

**1.** Nach dem allgemeinen Princip, dass eine Gerade auf einer Fläche $n^{ter}$ Ordnung liegt, wenn sie mit ihr $n+1$ Punkte gemein hat, ist bekannt, dass die Flächen von höherer als der $3^{ten}$ Ordnung vielfache Punkte oder Curven besitzen müssen, um Gerade enthalten zu können.

Werden einzelne vielfache Punkte im Allgemeinen ausgeschlossen, so ergiebt sich, dass eine Fläche $4^{ter}$ Ordnung eine *endliche* Zahl von Geraden besitzt, wenn sie eine Doppelcurve hat, an die nicht von jedem Punkte eine Sehne gelegt werden kann; also wenn sie mit einer doppelten Geraden ($F_1^4$) oder mit einem doppelten Kegelschnitt behaftet ist ($F_2^4$). Eine Fläche $5^{ter}$ Ordnung enthält einfache Geraden, wenn sie eine Doppelcurve ohne dreifache Secanten, an die von jedem Punkte des Raumes mindestens eine Sehne geht, oder wenn sie eine dreifache Gerade enthält. Ausser dieser Fläche mit einer dreifachen Geraden $\mathfrak{F}_3^5$ sind also mit einer endlichen Zahl von Geraden noch behaftet: die Fläche mit zwei windschiefen doppelten Geraden $F_2^5$, die mit einer doppelten cubischen Raumcurve $F_3^5$, die mit einer doppelten Raumcurve $4^{ter}$ Ordnung und $1^{ter}$ Species $F_4^5$ und endlich die mit einer doppelten Raumcurve $5^{ter}$ Ordnung, die einen dreifachen Punkt hat, $F_5^5$. Wie $F_1^4$ und $\mathfrak{F}_3^5$ (und die allgemeine Fläche $3^{ter}$ Ordnung) enthalten alle Flächen $n^{ter}$ Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden $\mathfrak{F}_{n-2}^n$ eine endliche Zahl von einfachen Geraden; desshalb mögen diese Flächen hier mit betrachtet werden.

**2.** Mit Hilfe geradliniger Flächen sind leicht folgende Resultate zu erhalten: Die Fläche 4^ter^ Ordnung mit einer doppelten Curve $\delta^{\text{ter}}$ Ordnung, ($\delta = 1, 2$) besitzt stets $\lambda = 8\delta(3-\delta)$ einfache Geraden, die sich alle auf die Doppelcurve stützen und deren jede von $\lambda_1 = 16\delta - 4\delta^2 - 11$ andern getroffen wird. $\lambda$ ist in beiden Fällen 16, $\lambda_1$ ist resp. 1, 5.

Die Fläche $5^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Doppelcurve $\delta^{\text{ter}}$ Ordnung, die $h$ scheinbare Doppelpunkte hat, ($F_2^5 : \delta = 2, h = 1$; $F_3^5 : \delta = 3, h = 1$; $F_4^5 : \delta = 4, h = 2$; $F_5^5 : \delta = 5, h = 3$) hat stets

$$20h - \frac{\delta}{2}\left\{(7+4\varepsilon)\delta - 15\right\}$$

einfache Gerade, die sich alle zweimal auf die Doppelcurve stützen; bei $F_2^5$ ist $\varepsilon = 1$, sonst $\varepsilon = 0$. Es ist also $\lambda$ resp. 13, 11, 14, 10. Bei $F_2^5$ sind alle Geraden windschief; freilich auch bei $F_3^5$; doch gilt für diese, wie für $F_4^5$ und $F_5^5$ der Satz, dass jede einfache Gerade von $\lambda_1 = 4h + 11 - \frac{1}{2}\delta(13-\delta)$ andern getroffen wird (also von 0, 1, 3).

Endlich auf einer Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{F}^n_{n-2}$ mit einer $(n-2)$-fachen Geraden befinden sich stets $\lambda = 6n - 8$ einfache Geraden, welche der $(n-2)$-fachen Geraden begegnen, $3n - 4$ Paare bilden und sich sonst nicht schneiden. Für $F_1^4 = \mathfrak{F}_2^4$ ist $\lambda$ schon oben ermittelt; für $\mathfrak{F}_3^5$ ist $\lambda = 22$ und bei der allgemeinen Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung bekommt man freilich nur die einer beliebigen Geraden begegnenden 10 Geraden, aus denen dann jedoch die übrigen ebenso abgeleitet werden können.

**3.** Auf den meisten der zu betrachtenden Flächen giebt es Kegelschnitte. Bei den Flächen $4^{\text{ter}}$ Ordnung stützen sie sich in $\delta$ Punkten auf die Doppelcurve $D$. Jeder dieser Kegelschnitte wird von $4\delta(3-\delta)$ Geraden getroffen, je zwei Kegelschnitte mit $\alpha$ (ausserhalb $D$ gelegenen) Begegnungspunkten zugleich von $2\delta(4-\delta-\alpha)$, drei Kegelschnitte endlich mit $\alpha+\beta+\gamma$ Schnittpunkten (ausserhalb $D$) von $\delta\,[6-\delta-(\alpha+\beta+\gamma)]$ einfachen Geraden.

Bei unsern Flächen $5^{\text{ter}}$ Ordnung (mit Ausschluss der $F_2^5$, die sehr oft eine gesonderte Betrachtung erfordert) stützen sich auf einen der Fläche angehörigen und der Doppelcurve $D$ in $\theta$ ($\overline{<}\ \delta$) Punkten begegnenden Kegelschnitt $8h + 2\theta\delta - (\delta-1)(5\theta - \delta)$ Geraden, auf zwei Kegelschnitte, welche $D$ resp. in $\theta$, $\theta_1$ Punkten und einander in $\alpha$ Punkten begegnen, $(4-\alpha)h + \theta\theta_1 - 2(\delta-1)(\theta+\theta_1-\delta)$ Gerade.

Die Flächen $\mathfrak{F}^n_{n-2}$ enthalten — mit Ausnahme von $F^3$ und $\mathfrak{F}_2^4 = F_1^4$ — keine Kegelschnitte. Ein specieller Fall der $\mathfrak{F}_3^5$, bei dem zu der dreifachen Geraden noch zwei doppelte treten, wird am Ende betrachtet werden.

**4.** Für sämmtliche Flächen $n^{\text{ter}}$ Ordnung ($n \overline{<} 6$) mit einer Doppelcurve $\delta^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $h$ scheinbare Doppelpunkte hat und durch

mindestens eine Fläche $2^{ten}$ Grades $F^2$ geht, deren eine Schaar von der Doppelcurve in $n-3$ Punkten getroffen wird, also unter unsern Flächen für $F_1^4$, $F_2^4$, $F_2^5$, $F_3^5$, $F_4^5$ ($F_5^5$ ist wegen des dreifachen Punktes, der die Formeln zu sehr compliciren würde, noch ausgeschlossen) gelten folgende Sätze:

Die Classe der Developpablen, welche von den Berührungsebenen längs der Doppelcurve eingehüllt wird, ist

$$\chi = 4n^2 - 24n - 3\delta n + 2\delta^2 + 8\delta + 36 - 4h$$

(in obiger Reihenfolge: 2 (ein Doppelbüschel), 4, 6 (zwei dreifache Büschel), 9, 12); die Zahl der Cuspidal- oder Rückkehrpunkte auf der Doppelcurve (in denen die ersten Polarflächen aller Punkte einander und die Fläche berühren) ist

$$\omega = 2\delta n - 2\delta^2 - 2\delta + 4h$$

(4, 4, 12 = 2 . 6, 10, 8); die Classe der Fläche ferner ist

$$m = n^3 - 6n^2 + (25 - 3\delta)\, n + 2\delta\,(\delta - 1) - 4h - 36$$

(20, 12, 34, 27, 20).

Die Ordnung des Kegels aus einem Punkte $o$ ausserhalb an der Fläche und zugleich die seiner Berührungscurve (welche der Doppelcurve $D$ in den $\omega$ Rückkehrpunkten und $\chi$ andern Punkten begegnet), oder die Classe eines beliebigen ebenen Schnitts und auch der längs derselben der Fläche umschriebenen Developpablen, welche Grösse ich kurz den Rang der Fläche nennen will, ist

$$r = n\,(n-1) - 2\delta$$

(10, 8, 16, 14, 12).

Die Zahl der aus einem solchen Punkte an die Fläche gehenden Osculanten (Wendetangenten) ist

$$\begin{aligned}\sigma &= (n-2)\, r - \chi \\ &= n^3 - 7n^2 + (26 + \delta)\, n - 2\delta\,(\delta + 2) + 4h - 36\end{aligned}$$

(18, 12, 42, 33, 24). Aus $m$, $r$ und $\sigma$ sind nun die Anzahl $\tau$ der von $o$ ausgehenden doppelten Tangenten, die Classe $\iota$ der von den stationären Ebenen eingehüllten Developpablen $\Sigma$ (spinode torse des Herrn Cayley) und die Classe $\xi$ der Enveloppe der doppelten Berührungsebenen zu ermitteln (node couple-torse):

| | $\tau$ | $\iota$ | $\xi$ |
|---|---|---|---|
| $F_1^4$ | 8 | 48 | 113 |
| $F_2^4$ | 4 | 24 | 26 |
| $F_2^5$ | 40 | 96 | 409 |
| $F_3^5$ | 28 | 72 | 236 |
| $F_4^5$ | 20 | 48 | 112. |

Die Fläche $\xi^{ter}$ Classe zerfällt bei allen 5 Flächen: da jede einfache Gerade $G$ die $D$ in $n-3$ Punkten trifft, so berühren alle durch eine $G$ gelegte Ebene die Fläche doppelt; die Berührungspunkte bilden eine Involution und zwei von den doppelten Ebenen durch $G$ — die Asymptoten-Ebenen — werden stationär und zwar je in zwei auf einander folgenden Punkten von $G$ und sind deshalb wiederum stationäre Ebenen von $\Sigma$.

Es bleibt also nach Abzweigung der $\lambda$ Büschel eine Developpable $\Phi$ von der Classe $\xi-\lambda$ (97, 10, 396, 225, 98) übrig; bei $F_1^4$ und $F_2^5$ zweigen sich noch das doppelte Büschel um die doppelte Gerade und die beiden dreifachen Büschel um die beiden doppelten Geraden ab, so dass die übrig bleibende Enveloppe der Doppelebenen $96^{ter}$ resp. $390^{ter}$ Classe ist.

**5.** Wird der Pol $o$ auf eine einfache Gerade $G$ gelegt, so ergiebt sich, dass durch jede solche Gerade

$$\lambda_1+\eta=m-7$$

Ebenen gehen, welche die Fläche ausser auf $G$ noch ein drittes Mal berühren: in $\lambda_1$ Ebenen zerfällt der fernere Schnitt $(n-1)^{ter}$ Ordnung in eine zweite Gerade und eine Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung, in $\eta$ Ebenen aber zerfällt er — im Allgemeinen — nicht, sondern bekommt zu den $\delta-(n-3)$ auf $D$ gelegenen Doppelpunkten noch einen ausserhalb dieser Curve gelegenen im dritten Berührungspunkte. Für $F_1^4$, $F_2^4$, $F_3^5$, $F_4^5$ hat $\eta$ die Werthe 12, 0, 20, 12; die Fläche $F_2^5$ macht eine Ausnahme: bei ihr ist, vorzugsweise wegen der 26 vierfachen Ebenen, die sie allein von allen diesen Flächen besitzt und welche durch je eine der beiden Doppelgeraden und eine der 13 einfachen Geraden gebildet werden:

$$\lambda_1+\eta=m-11, \text{ also}$$

da $\lambda_1=0$, ist $\eta=23$*).

Die Curve $S'$ der Pole einer Geraden $G$ in Bezug auf die Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung in ihren Ebenen (oder die Schnittcurve der ersten Polarflächen sämmtlicher Punkte von $G$ ausser $D$ und $G$) ist bei den 3 Flächen $F_2^4$, $F_3^5$, $F_4^5$, deren Doppelcurve nicht geradlinig ist, von der Ordnung $s'=n^2-2n-\delta$, trifft $D$ in $2n^2-13n+2\delta+21$ Punkten, darunter die $\omega$ Cuspidalpunkte, in denen sie die Fläche $F$ berührt, und die Gerade $G$ in $n-1$ Punkten, unter denen sich die Berührungspunkte $g_0$ der beiden Asymptotenebenen durch $G$ befinden, in denen die Curve $S'$ die Fläche $F$ ebenfalls tangirt, weil dort die sämmtlichen Polarflächen der Punkte von $G$ einander und die Fläche

*) Dies stimmt nicht mit der Angabe des Herrn Clebsch, ist aber von ihm als richtig anerkannt.

$F$ berühren; ferner geht $S'$ durch die dritten Berührungspunkte der $\lambda_1 + \eta$ Ebenen.

**6.** Holen wir für die Fläche $F_5^5$, für welche der dreifache Punkt $a$ ihrer Doppelcurve $D^5$ auch dreifach ist und deren voller Schnitt mit dem Kegel 2ten Grades $(a, D^5)$ durch $D^5$ allein gebildet wird, diese Resultate nach: $\chi = 12$, $\omega = 8$, $m = 12$, $\sigma = 18$, $\tau = 12$, $\iota = 24$, $\zeta = 25$, also die Fläche $\Phi$ von der Classe 15, weil es 10 Geraden giebt; $\lambda_1 + \eta$ ist auch hier $= m - 7$, mithin da $\lambda_1 = 3$, $\eta = 2$. In sämmtlichen Ebenen von $\Phi$ muss wegen der 7 Doppelpunkte die Schnittcurve in einen Kegelschnitt $K$ und eine Curve 3ter Ordnung $K^3$ zerfallen, die sich viermal auf $D^5$ und zweimal ausserhalb (in den beiden Berührungspunkten) durchschneiden. Der fünfte Punkt von $D^5$ gehört der Curve $K^3$ als Doppelpunkt an. Durch jede Gerade $G$ gehen $\eta = 2$ Ebenen, deren fernerer Schnitt 4ter Ordnung in zwei Kegelschnitte zerfällt, die sich dreimal auf $D$ und das vierte Mal in dem nicht auf $G$ gelegenen Berührungspunkt der Ebene durchschneiden.

Von der Polcurve $S'$ einer Geraden $G$, welche 10ter Ordnung ist, wird $D^5$ in 15 Punkten getroffen, unter denen sich der dreifache Punkt, durch den $S'$ nur einmal geht, und die 8 Cuspidalpunkte befinden; sonst ist es mit dieser Curve wie oben.

**7.** Eine viel ausgedehntere Untersuchung lässt sich für die Flächen $n$ter Ordnung veranstalten, welche eine gewisse — natürlich durch die Ordnung der Fläche beschränkte — Anzahl vielfacher Geraden haben, zu denen also unsere Flächen $F_1^4 = \mathfrak{F}_2^4$, $F_2^5$, $\mathfrak{F}_3^5$ und überhaupt alle Flächen $\mathfrak{F}_{n-2}^n$, ferner die geradlinigen Flächen $n$ten Grades $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ mit einer $\varrho$-fachen $(\varrho \overline{<} n-1)$ und einer $(n-\varrho)$-fachen Geraden gehören. Letztere sind, obgleich sie nicht dem Thema entsprechen, bei diesen allgemeinen Betrachtungen, denen sie sich anschmiegen, von mir nicht ausgeschlossen worden. Wir denken uns $\delta_1$ $\varrho_1$-fache, $\delta_2$ $\varrho_2$-fache, ... $\delta_i$ $\varrho_i$-fache, ... $\delta_p$ $\varrho_p$-fache Geraden (die Gesammtvielfachheit ist also $\sum\limits_1^p \delta_i \varrho_i$; es ist ersichtlich, dass $\sum\limits_1^p \delta_i \varrho_i (\varrho_i - 1) \overline{<} n\,(n-1)$ sein muss, was wohl aber nicht das einzige Kriterium ist), alle gegen einander windschief, wie es den oben aufgeführten Beispielen entspricht.

Der Rang ist

$$r = n\,(n-1) - \sum_1^p \delta_i \varrho_i (\varrho_i - 1),$$

also bei $F_1^4$, $F_2^5$, $\mathfrak{F}_3^5$ resp. 10, 16, 14, bei den $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ ist

$$r = 2\varrho\,(n-\varrho),$$

welche Symmetrie nach $\varrho$ und $n - \varrho$ bei diesen Flächen überall stattfinden muss.

Auf jeder $\varrho_i$-fachen Geraden giebt es stets $\omega_i = 2(n-\varrho_i)(\varrho_i - 1)$ Cuspidalpunkte; die Classe der Fläche $F$ ist ferner

$$m = n(n-1)^2 - \sum_1^p \delta_i \left\{(3\varrho_i^2 - 2\varrho_i - 1)n - 2\varrho_i(\varrho_i^2 - 1)\right\},$$

bei $F_1^4$, $F_2^5$, $\mathfrak{F}_3^5$ also 20, 34, 28; bei den geradlinigen Flächen $n^{\text{ten}}$ Grades mit einer $\varrho$-fachen und einer $(n-\varrho)$-fachen Geraden $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ ergiebt sich, wie zu erwarten, $m = n$.

Ferner ist

$$\sigma = n(n-1)(n-2) - \sum_1^p \delta_i (\varrho_i - 1)\left\{3\varrho_i n - 3n - 2\varrho_i^2 + \varrho_i\right\},$$

also bei $F_1^4$, $F_2^5$, $\mathfrak{F}_3^5$ resp. 18, 42, 30, bei den $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ ist

$$\sigma = 6\varrho(n-\varrho) - 3n.$$

Eine einfache Formel ergiebt sich noch für die Classe $\iota$ der Developpablen $\Sigma$

$$\iota = 4n(n-1)(n-2) - 4\sum_1^p \delta_i \varrho_i (\varrho_i - 1)(3n - 2\varrho_i - 2),$$

also für $F_1^4$, $F_2^5$, $F_3^5$ ist $\iota = 48$, 96, 72 und für $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ ist $\iota = 0$, wie es zu erwarten war.

Die allgemeinen Formeln für $\tau$ und $\zeta$ sind zu complicirt; es ist bequemer diese Grössen jedesmal besonders zu berechnen.

| | | $\tau$ | $\zeta$ |
|---|---|---|---|
| $F_1^4(\mathfrak{F}_2^4)$ | : | 8 | 113 |
| $F_2^5$ | : | 40 | 409 |
| $\mathfrak{F}_3^5$ | : | 32 | 263 |
| $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ | : | $2\varrho^2(n-\varrho)^2 - 10\varrho(n-\varrho) + 4n$ | $\frac{1}{2}n(n-1) - \varrho(n-\varrho)$; |

bei der Fläche $\mathfrak{F}_3^5$ besteht die Enveloppe der Doppeltangentenebenen aus den 22 Büscheln um die einfachen, dem Büschel um die dreifache Gerade und einer Developpablen $\Psi$ $240^{\text{ter}}$ Classe; bei den Flächen $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ ist diese Enveloppe aus dem Büschel $(n-\varrho)$-facher Ebenen um die $\varrho$-fache und aus dem Büschel $\varrho$-facher Ebenen um die $(n-\varrho)$-fache Gerade zusammengesetzt.

Für die Flächen $\mathfrak{F}^n_{n-2}$ $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden ergeben sich, wie schon die Zahl der einfachen Geraden, so auch die übrigen Singularitäten in einer überaus einfachen Gestalt:

$$r = 2(2n-3),\ w = 4(n-3),\ m = 4(2n-3) = 2r,\ \sigma = 6(2n-5),$$
$$\tau = 8(n-3)^2,\ \iota = 24(n-2),\ \zeta = 32n^2 - 138n + 153;$$

von der Fläche $\zeta^{\text{ter}}$ Classe zweigen sich aber die Büschel um die $(n-2)$-fache Gerade und um die $6n-8$ einfachen Geraden, welche sämmtlich Doppelebenen enthalten, ab, so dass eine Developpable $\Psi$ von der

Classe $\zeta_1 = 16(n-2)(2n-5)$ bleibt. Bei der allgemeinen Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung, die auch zu den $\mathfrak{F}^n_{n-2}$ gehört, zerfällt diese Developpable in die 16 Büschel der die ursprüngliche Gerade nicht treffenden Geraden.

**8.** Nehmen wir nun wieder die allgemeine Fläche $F$ mit dem System von vielfachen Geraden $\Sigma\delta_i\varrho_i$ an: wenn auf derselben einzelne oder unzählig viele einfache Geraden existiren, so berühren sich stets die ersten Polarflächen aller Punkte einer solchen Geraden $G$ mit sämmtlichen $\varrho_i - 1$ Mänteln, die durch eine von $G$ getroffene $\varrho_i$-fache Gerade von $F$ gehen. Der Einfachheit wegen beschäftigen wir uns nur mit dem (sämmtliche für uns besonders interessante Flächen umfassenden) Falle, dass die einfachen Geraden sich auf alle vielfachen stützen. Der fernere Schnitt $S'$ der oben genannten Polarflächen — die Polcurve der Geraden $G$ in Bezug auf die Curven $C^{n-1}$ in ihren Ebenen — ist von der Ordnung

$$s' = n^2 - 2n - \sum_1^p \delta_i\varrho_i(\varrho_i - 1);$$

sie trifft eine $\varrho_\lambda$-fache Gerade in $\psi_\lambda = 2\varrho_\lambda n - 2\varrho_\lambda^2 - n$ Punkten, unter denen sich nicht die $\omega_\lambda$ Cuspidalpunkte befinden und in denen auch $S'$ die Fläche $F$ diesmal nicht berührt.

Der Geraden $G$ begegnet $S'$ in $\pi = 2n - 4 - 2\sum_1^p \delta_i(\varrho_i - 1)$ Punkten; diese sind sämmtliche Asymptotenpunkte der Geraden $G$, in denen dieselben also je von einer Curve $C^{n-1}$ tangirt wird. Die betreffende Ebene — Asymptotenebene — ist eine stationäre Ebene der Fläche $\Sigma$ und in ihrem Berührungspunkte mit $F$ auch die Berührungsebene der sämmtlichen ersten Polarflächen der Punkte von $G$, so dass auch $S'$ die $F$ berührt.

Die ferneren Schnittpunkte $(S', F)$ liefern die Zahl der Ebenen durch $G$, die noch ausserhalb $G$ und der vielfachen Geraden einen Berührungspunkt haben; bezeichne $\lambda_1'$ die Zahl der die $G$ treffenden andern einfachen Geraden, in denen aber der durch dies Zerfallen von $C^{n-1}$ in eine Gerade und eine $C^{n-2}$ hinzukommende neue Berührungspunkt nicht auf einer vielfachen Geraden liegt, habe $\eta$ hingegen die frühere Bedeutung, so ist

$$\lambda_1' + \eta = m - 5n + 8 - \sum_1^p \delta_i(n - 6\varrho_i + 4);$$

bei $F_1^4$ und $F_3^5$ ist $\lambda_1 = 1$, aber $\lambda_1' = 0$, also $\eta$ resp. 12, 20, $s'$ resp. 6, 9, $\psi$ resp. 4, 7 und $\pi = 2$. Bei $F_2^5$ ist schon $\lambda_1 = 0$, also auch $\lambda_1'$, mithin $\eta = 23$; $\psi = 7$; $\pi = 2$; $s' = 11$.

Bei den Flächen $\mathfrak{F}^n_{n-2}$ überhaupt ist $s' = 3(n-2)$, $\pi = 2$, $\psi = 3n - 8$, $\eta = 4(2n-5)$, da $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1' = 0$, also $\eta = m - 7 - \lambda_1$,

wie oben. Bei der allgemeinen Fläche 3ter Ordnung ist also $\eta = 4$: diese 4 Ebenen enthalten die 4 Geradenpaare, welche jede der 10 aus der ursprünglichen Geraden abgeleiteten Geraden treffen, ohne die ursprüngliche zu enthalten.

Bei den geradlinigen Flächen $F^n_{\varrho,\, n-\varrho}$ ist $s' = 2\varrho(n-\varrho) - n$; $\pi = 0$, und $\psi = 2\varrho(n-\varrho) - n$ für beide vielfache Geraden. Dies zeigt, dass die Curve $S'$ in $2\varrho(n-\varrho) - n$ Gerade zerfällt, die sich alle auf die beiden vielfachen Geraden stützen, aber nicht auf die Gerade $G$, deren Polcurve $S'$ ist; $\eta = 0$, was auch zu erwarten war, da zwei Generatricen sich nur auf einer vielfachen Geraden treffen können.

Enthält eine Fläche $F^n$ eine $(n-1)$-fache Gerade, so ist sie schon geradlinig, während bei $F^n$ mit einer $\varrho$-fachen Geraden ($\varrho < n-1$) noch eine $(n-\varrho)$-fache Gerade zutreten muss, um die Geradlinigkeit zu bewirken. Jedoch bedingt die $(n-1)$-fache Directrix noch eine einfache Directrix, die dann als vielfache Gerade mitgezählt werden muss.

**9.** Es sei $d$ ein Punkt einer nicht geradlinigen Doppelcurve $D$ $\delta^{\text{ter}}$ Ordnung mit $h$ scheinbaren Doppelpunkten einer Fläche $F$ (oder eines nicht geradlinigen Bestandtheils dieser Doppelcurve), und $T_1\, T_2$ seien die beiden Berührungsebenen in $d$. Der Schnitt jeder dieser beiden Ebenen hat einen dreifachen Punkt in $d$, von dessen Aesten zwei dem von der Ebene berührten Mantel, der dritte, welcher die Tangente von $D$ berührt, dem andern angehört, und $\delta - 2$ Doppelpunkte. Der Berührungskegel aus $D$ ist von der Ordnung $r - 4$ und von der Classe $m$. Die Berührungscurve $T''$ hat noch die Ordnung $r$, geht viermal durch $d$, begegnet $D$ in den $\omega$ Cuspidalpunkten und ausserdem in $\chi''$ Punkten, darunter $d$ vierfach; $\chi - \chi''$ ist gleich $4\delta - 4h - 8$ und demnach bei denjenigen unserer Flächen, die der obigen Bedingung genügen, $F_2^4$, $F_3^5$, $F_4^5$, $F_5^5$, gleich Null, weil $\delta - h = 2$ ist.

Bei einem conischen Doppelpunkte giebt es stets 6 vierpunktig berührende Geraden; bei einem biplanaren hingegen nur 4: die 4 Tangenten der Berührungscurve $T''$. Dieselben sind bekanntlich für sämmtliche existirende Polarflächen von $d$ (die $(n-1)^{\text{te}}$ existirt nicht, die $(n-2)^{\text{te}}$ besteht aus $T_1$, $T_2$) vierpunktig berührende Geraden und es repräsentirt demnach $d$ 16 Begegnungspunkte von $T''$ mit der zweiten Polarfläche von $d$. Ist mithin $\sigma''$ die Zahl der aus $d$ an $F$ gehenden Osculanten und $\tau''$ die der Bitangenten, die nicht in $d$ selbst osculiren resp. berühren, so findet sich

$$\sigma - \sigma'' = 4(5 + h - \delta) \quad ; \quad \tau - \tau'' = 4r - 28\,.$$

Bei unsern 4 Flächen ($\delta - h = 2$) ist $\sigma - \sigma'' = 12$; bei $F_2^4$ ersichtlich $\sigma'' = 0$, also $\sigma = 12$. Bei allen vier ist $\tau'' = 0$, also $\tau = 4r - 28$.

Die Zahl der stationären und doppelten Ebenen aus $d$ an $F$ ändert sich nicht, freilich der Kegel aus $d$ hat ausser den $\zeta$ Doppelebenen, die auch die Fläche $F$ doppelt berühren, noch die beiden doppelten Ebenen $T_1 T_2$, die ihn je längs der beiden in ihnen liegenden vierpunktig berührenden Geraden tangiren.

**10.** Wenden wir uns nun wieder zu den Flächen mit vielfachen Geraden $\left(\sum_1^p \delta_i \varrho_i\right)$, die einander nicht begegnen. Zunächst bemerken wir, dass es auf jeder $\varrho_\lambda$ fachen Geraden $D_\lambda$ $\pi_\lambda = 2\varrho_\lambda(n - \varrho_\lambda - 1)$ Asymptotenpunkte giebt, in denen der fernere Schnitt $(n - \varrho_\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung einer gewissen, durch $D_\lambda$ gehenden Ebene diese Gerade $D_\lambda$ berührt; diese Ebene — Asymptotenebene der Geraden $D_\lambda$ — berührt die Fläche $F$ wiederum in zwei aufeinander folgenden Punkten stationär (ist demnach eine stationäre Ebene der Devoloppablen $\Sigma$) und hat noch $n - \varrho_\lambda - 2$ gewöhnliche Berührungen; jede andere Ebene durch $D_\lambda$ ist eine $(n - \varrho_\lambda)$fache Tangentenebene.

Liegt nun der Pol $d$ auf $D_\lambda$, so gehört diese Gerade sämmtlichen existirenden Polarflächen von $d$ auch $\varrho_\lambda$-fach an; die letzte existirende Polarfläche ist die $(n - \varrho_\lambda)^{\text{te}}$, welche aus den $\varrho_\lambda$ in $d$ berührenden Ebenen besteht. Dieselben sind auch für alle Polarflächen die Berührungsebenen, während in den anderen Punkten von $D_\lambda$ $F$ und die Polarflächen verschiedene Berührungsebenen haben.

Der Berührungskegel aus $d$ ist von der Ordnung $r - 2\varrho_\lambda$ und von der Classe $m - (n - \varrho_\lambda)$; die Berührungscurve $T''$ hat die Ordnung $r - \varrho_\lambda$, geht $\varrho_\lambda$-mal durch $d$ (und ihre $\varrho_\lambda$ Tangenten sind die $\varrho_\lambda$ $F$ und alle Polarflächen $(\varrho_\lambda + 2)$-punktig berührenden Geraden), trifft $D_\lambda$, auf der der Punkt $d$ liegt, in ihren $\pi_\lambda$ Asymptotenpunkten, hingegen jede andere vielfache, z. B. $\varrho_i$ fache Gerade $(D_i)$, in den $\omega_i$ Cuspidalpunkten und den $\chi_i = n - \varrho_i$ mit $\delta$ beweglichen Berührungspunkten der Ebene $(d, D_i)$. Die zweite Polarfläche von $d$ hat mit $T''$ in dem Punkte $d$ $\varrho_\lambda(\varrho_\lambda + 2)$ Punkte, in den $\pi_\lambda$ Asymptotenpunkten je $\varrho_\lambda$ Punkte, in den Cuspidalpunkten einer $\varrho_i$-fachen Geraden $D_i$, durch welche sie ja $(\varrho_i - 2)$-mal geht, je $\varrho_i - 2$ Punkte und in den $\chi_i$ Punkten von $D_i$ $\varrho_i - 1$ Punkte gemein. Wenn nun $\sigma''$, $\tau''$, $\iota''$, $\zeta''$ die früheren Bedeutungen haben, nur dass der Pol jetzt in $d$ liegt, so ergiebt sich:

$$\sigma - \sigma'' = 3(2\varrho_\lambda - 1)(n - \varrho_\lambda),$$

$$\tau - \tau'' = 2\varrho_\lambda r + 2\varrho_\lambda^2 n^2 - 2(2\varrho_\lambda^3 + 2\varrho_\lambda^2 + 5\varrho_\lambda - 2)n + 2\varrho_\lambda(\varrho_\lambda^3 - 2\varrho_\lambda^2 + 5\varrho_\lambda - 2);$$

der Kegel aus $d$ hat nämlich ausser den $\tau''$ Doppelkanten noch eine $2\varrho_\lambda(n - \varrho_\lambda - 1)$-fache Kante $D_\lambda$; ferner

$$\iota - \iota'' = 3 \,.\, 2\varrho_\lambda(n - \varrho_\lambda - 1) = 3\pi_\lambda.$$

Der Verlust wird durch die $\pi_\lambda$ stationär die Developpable $\Sigma$ je längs

$D_\lambda$ (als Generatrix) berührenden Asymptotenebenen ausgeglichen, welche den Tangentialkegel aus $d$ und zwar alle längs der vielfachen Kante $D_\lambda$ tangiren, aber nicht stationäre Ebenen desselben sind.

Endlich

$$\zeta - \zeta'' = mn - \varrho_\lambda m - 8\varrho_\lambda n + \tfrac{1}{2}\{17\varrho_\lambda(\varrho_\lambda + 1) - n(n+1)\};$$

sei nun $\Psi$ die Enveloppe der nach Abzug der durch die vielfachen Geraden gehenden vielfachen Berührungsebenen übrig bleibenden Doppeltangentenebenen, und bezeichne $\zeta_1$ und $\zeta_1''$ die Classe dieser Enveloppe und die Zahl der von $d$ an sie gehenden und den Kegel aus $d$ doppelt berührenden Ebenen, so ist

$$\zeta_1 - \zeta_1'' = \zeta - \zeta'' - \tfrac{1}{2}(n - \varrho_\lambda)(n - \varrho_\lambda - 1) = (n - \varrho_\lambda)(m - n - 8\varrho_\lambda) + 8\varrho_\lambda.$$

Dieser Verlust wird zuerst gedeckt durch die $\pi_\lambda$ Asymptotenebenen, die zur Geraden $D_\lambda$ gehören und deren jede stationär zur Fläche $\Sigma$, einfach zum Büschel $D_\lambda$ und $2(n - \varrho_\lambda - 2)$fach zur Fläche $\Psi$ gehört; der Rest, welcher

$$(n - \varrho_\lambda)(m - 4\varrho_\lambda n - n + 4\varrho_\lambda^2 + 4\varrho_\lambda)$$

beträgt, besteht aus den $\varphi_\lambda$ Ebenen durch $D$, deren Schnitt $(n - \varrho_\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung ausser dem durch die vielfachen Geraden veranlassten vielfachen Punkt noch einen Doppelpunkt $q$ in Folge einer ausserhalb $D_\lambda$ geschehenden Berührung bekommt, und welche je $n - \varrho_\lambda$ Ebenen von $\Psi$ repräsentiren, aber den Kegel aus $d$ nicht doppelt, sondern einmal (wegen des ausserhalb $D_\lambda$ liegenden Berührungspunktes) berühren; also

$$\varphi_\lambda = m - n - 4\varrho_\lambda(n - \varrho_\lambda - 1);$$

diese $\varphi_\lambda$ Ebenen, die $\pi_\lambda$ Asymptotenebenen und die $\varrho_\lambda$ Berührungsebenen in $d$ sind die gemeinsamen Ebenen des Büschels um $D_\lambda$ und des Kegels aus $d$, dessen Klasse $m - (n - \varrho_\lambda)$ ist, wobei die $\pi_\lambda$ Ebenen, welche den Kegel längs der Axen des Büschels berühren, doppelt zu rechnen sind.

**11.** Die Curve $S''$, welche den sämmtlichen ersten Polarflächen der Punkte von $D_\lambda$ [die durch $D_\lambda$ $\varrho_\lambda$ mal, durch jede andere $\varrho_i$-fache Gerade $(\varrho_i - 1)$ mal gehen] ausser den vielfachen Geraden gemein ist, — die Curve der Pole der Geraden $D_\lambda$ in Bezug auf die Curven $(n - \varrho_\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung in den Ebenen durch $D_\lambda$ — ist von der Ordnung

$$s'' = (n-1)^2 - 2\varrho_\lambda + 1 - \sum_1^p \delta_i(\varrho_i - 1)^2;$$

diese Curve $S''$ trifft die Gerade $D_\lambda$ in ihren $\pi_\lambda$ Asymptotenpunkten, jede andere ($\varrho_i$fache) Gerade in deren $\omega_i$ Cuspidalpunkten; in allen diesen Punkten berühren die sämmtlichen ersten Polarflächen der Punkte von $D_\lambda$ einander und die Fläche $F$, sodass auch die Curve $S''$ die $F$ tangirt; die sonstigen Schnittpunkte $(S'', F)$ sind die ausserhalb $D_\lambda$ gelegenen Berührungspunkte der eben erwähnten $\varphi_\lambda$ Ebenen.

Bei $F_2^5$ ist $\sigma - \sigma'' = 27$; also $\sigma'' = 15$, da $\sigma = 42$; ersichtlich ist $\tau'' = 0$, also $\tau = \tau - \tau'' = 40$; $\omega$ (die Zahl der Cuspidalpunkte auf *einer* Geraden) $= 6$; $\pi$ (die Zahl der Asymptotenpunkte auf jeder der beiden Doppelgeraden) $= 8$; $s'' = 11$; $\varphi = 13$. Die durch eine Doppelgerade gehenden Ebenen, deren Schnittcurve ausser dem durch die zweite Doppelgerade veranlassten Doppelpunkte noch einen zweiten durch eine nicht auf der ersteren stattfindende Berührung bekommt, sind die 13 durch die einfachen Geraden gehenden Ebenen.

**12.** Bei den Flächen $\mathfrak{F}^n_{n-2}$, zu denen ja auch $F_1^4$ und $\mathfrak{F}_3^5$ gehören, wird $\sigma - \sigma'' = 6(2n-5)$ und $\tau - \tau'' = 8(n-3)^2$, also da $\sigma'' = \tau'' = 0$, so haben $\sigma$ und $\tau$ diese Werthe, was mit den früheren Angaben übereinstimmt. Ferner $\varphi = 3n - 4 = \frac{\lambda}{2}$, also gleich der Hälfte der Zahl der einfachen Geraden der Fläche; in der That, die Curven in den Ebenen durch die $(n-2)$-fache Gerade sind ja Kegelschnitte $K$, welche wegen des Doppelpunkts zerfallen müssen. Ferner $s'' = 2n - 3$; endlich die Zahl der Asymptotenpunkte auf der $(n-2)$-fachen Geraden ist $\pi = 2(n-2)$: also ist die Curve der Pole der $(n-2)$-fachen Geraden $D$ in Bezug auf die Kegelschnitte $K$ in den Ebenen um dieselbe von der Ordnung $2n - 3$ und trifft die $D$ in deren $2(n-2)$ Asymptotenpunkten, folglich ist sie $0^{\text{ten}}$ Geschlechts, wie auch zu erwarten war. Die Curve $M$ der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte, auf welcher auch die Scheitel der $3n - 4$ Geradenpaare liegen, ist von der Ordnung $2n - 2$ und trifft die $D$ in $2n - 3$ Punkten, ist also ebenfalls $0^{\text{ten}}$ Geschlechts. $D$ ist demnach für $2n - 3$ Kegelschnitte Durchmesser; ferner giebt es unter den $K$ stets $2n - 2$ Parabeln. Die Zahl der gleichseitigen Hyperbeln unter ihnen ist $n$. Wir bemerken, dass dies auch für die Kegelschnitte in den Ebenen um eine Gerade der allgemeinen Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung gilt.

**13.** Sehen wir zu, wie sich die Sache bei den geradlinigen Flächen $F^n_{\varrho,\,n-\varrho}$ gestaltet; die Zahl der Cuspidalpunkte auf der $\varrho$-fachen Geraden $D'$ ist $\omega' = 2(n-\varrho)(\varrho - 1)$, die der Asymptotenpunkte (und Asymptotenebenen) dieser Geraden ist $\pi' = 2\varrho(n - \varrho - 1)$; vertauschen wir $\varrho$ und $n - \varrho$, so erhalten wir für die andere vielfache Gerade $D''$ $\omega'' = \pi'$, $\pi'' = \omega'$. Die Reciprocität der Fläche zeigt sich auch in der That an den beiden vielfachen Geraden. Jedem Asymptotenpunkte der einen Geraden gehört ein Cuspidalpunkt der anderen zu: längs der Verbindungslinie derselben berührt die Asymptotenebene der ersten Geraden (sodass die Fläche an dieser Stelle developpabel wird) und mit der anderen vielfachen Geraden bildet diese Linie die Tangentenebene des Cuspidalpunktes (Cuspidalebene) der zweiten Geraden, in welche zwei Berührungsebenen zusammengefallen sind. Die Asymptotenebene berührt in allen Punkten dieser ausgezeichneten

Generatrix, alle übrigen Ebenen durch dieselbe berühren nur im Cuspidalpunkte. Solcher ausgezeichneten Generatricen $G_0$ giebt es

$\gamma = \gamma' + \gamma'' = 2\varrho(n - \varrho - 1) + 2(n - \varrho)(\varrho - 1) = 2(2\varrho n - 2\varrho^2 - n)$.

Sei nun $d$ ein Punkt auf der $\varrho$-fachen Geraden $D$, so besteht die Berührungscurve des von ihm ausgehenden Kegels, welcher von der Ordnung $r - \varrho = 2\varrho(n - \varrho) - \varrho$ ist, aus den $\varrho$ Generatricen, welche durch $d$ gehen, und den $\gamma'$ Generatricen $G_0$, welche durch die Asymptotenpunkte von $D'$ gehen; der Kegel selbst aus $d$, welcher von der Ordnung $r - 2\varrho = 2\varrho(n - \varrho - 1)$ und der Classe $m - n + \varrho = \varrho$ (da $m = n$ ist) sein muss, zerfällt in einen Tangentenebenenkegel $\varrho^{\text{ter}}$ Classe und $0^{\text{ter}}$ Ordnung, bestehend aus den Büscheln um die $\varrho$ aus $d$ gehenden Generatricen, und einen Tangentenkegel $0^{\text{ter}}$ Klasse und $2\varrho(n - \varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher aus den Strahlbüscheln um $d$ in den Ebenen besteht, welche $d$ mit den $\gamma'$ Generatricen $G_0$ verbinden.

Der oben gefundene Werth $\sigma - \sigma''$ ist hier illusorisch (er macht $\sigma''$ negativ); da entweder ($\varrho = n - 1$) eine zweite Polarfläche von $d$ gar nicht existirt, oder (wenn $\varrho < n - 1$) dieselbe einen Theil der dem Punkte $d$ zugehörigen Berührungscurve (die Generatricen durch $d$) ganz enthält, so kann natürlich das oben angegebene Resultat nicht richtig sein; der andere Bestandtheil der Berührungscurve — die $\gamma'$ Geraden $G_0$ — haben mit der zweiten Polarfläche von $d$ ausserhalb $D'$, $D''$ keinen Punkt gemein, also $\sigma'' = 0$; auch $\tau'' = 0$.

Die ersten Polarflächen aller Punkte von $D'$ haben ausser $D'$ und $D''$ die $\gamma'$ Generatricen $G_0$ gemein [$s'' = 2\varrho(n - \varrho - 1)$]; bilden dieselben ja auch einen Bestandtheil sämmtlicher Berührungscurven.

---

**14.** Wenn auf einer Fläche $F$ der Gesammtwerth der vielfachen Curven $\sum\limits_1^p \delta_i \varrho_i$ ist, so hat die Wendecurve $W$ der Fläche (spinode curve) — die Berührungscurve der Fläche $\Sigma$ oder die Curve der Punkte, deren beide Osculanten sich vereinigt haben oder deren Krümmung Null ist — die Ordnung

$$\psi = 4n(n-2) - 4\sum_1^p \delta_i \varrho_i (\varrho_i - 1);$$

sodass auf der Kernfläche $Q_0^{4(n-2)}$ — dem Orte der Doppelpunkte des Gebüsches sämmtlicher Polarflächen oder derjenigen Punkte, deren vorletzte Polarflächen Kegel sind — jede $\varrho_i$-fache Curve von $F$ $4(\varrho_i - 1)$-fach ist. Bei den Flächen $F_2^4$, $F_2^5$, $F_3^5$, $F_4^5$, $F_5^5$ ist $\psi = 16$, 44, 36, 28, 20; bei der letzten Fläche geht $W$ nicht durch den dreifachen Punkt; bei den Flächen $\mathfrak{F}_{n-2}^n$ ist $\psi = 12(n-2)$, also bei $F_1^4$, $\mathfrak{F}_3^5$ resp. 24, 36; und bei den Flächen $F_{\varrho,\,n-\varrho}^n$ ist $\psi = 4(2\varrho n - 2\varrho^2 - n) = 2\gamma$:

$W$ besteht aus den doppelt gelegten $\gamma$ singulären Generatricen; wo eine Fläche developpabel ist, hat sie auch die Krümmung Null.

Durch die Cuspidalpunkte geht $W$ stets zweimal — dort ersichtlich mit beiden Aesten die Polarflächen aller Punkte (ausgenommen, wenn Pol und Cuspidalpunkt der nämlichen vielfachen Geraden angehören) berührend —; die Zahl der sonstigen Begegnungspunkte $(W, D)$ beträgt bei $F_1^4$, $F_2^4$, $F_2^5$, $F_3^5$, $F_4^5$, $F_5^5$, $\mathfrak{F}_3^5$ resp. 8, 8, 32, 32, 32, 24, 12. Bei den drei Flächen $F_1^4$, $F_2^5$, $\mathfrak{F}_3^5$ ist diese Zahl gleich der doppelten Zahl der Asymptotenpunkte der vielfachen Geraden, weil überhaupt die Wendecurve stets jede Gerade einer Fläche (einfache oder vielfache) in ihren Asymptotenpunkten berührt.

Eine Curve $(n - \varrho_\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine $\varrho_\lambda$-fache Gerade von $F$ ergänzt, die keiner anderen vielfachen Curve begegnet, trifft die Curve $W$ in

$$\psi' = 4\,n^2 - 4\,n - 8\,\varrho_\lambda n + 8\,\varrho_\lambda^2 - 4\sum_1^p \delta_i\,\varrho_i\,(\varrho_i - 1)$$

Punkten; $\psi - \psi'$ ist aber $= 4\,(2\,\varrho_\lambda n - 2\,\varrho_\lambda^2 - n)$ d. i. gleich der doppelten Zahl der Asymptoten- und Cuspidalpunkte auf der $\varrho_\lambda$-fachen Geraden.

Es bestehe ein voller ebener Schnitt $C$ von $F$ aus zwei Curven $n'^{\text{ter}}$ und $n''^{\text{ter}}$ Ordnung, $C'$ und $C''$; von $\delta_i$ $\varrho_i$-fachen Punkten von $C$ mögen $\delta_i^0$ gar nicht zu $C'$, also $\varrho_i$-fach zu $C''$, $\delta_i^1$ einfach zu $C'$, $(\varrho_i - 1)$-fach zu $C''$, .... $\delta_i^\varkappa$ $\varkappa$-fach zu $C'$, $(\varrho_i - \varkappa)$-fach zu $C''$, ... $\delta_i^{\varrho_i}$ $\varrho_i$-fach zu $C'$, gar nicht zu $C''$ gehören, sodass $\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\varrho_i} \delta_i^\varkappa = \delta_i$; die Zahl der gemeinsamen Punkte von $C'$ und $C''$ auf den vielfachen Curven ist also

$$\Theta = \sum_{i=1}^{i=p}\ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\varrho_i-1} \delta_i^\varkappa\,(\varrho_i - \varkappa)\,\varkappa = \sum_{i=1}^{i=p}\ \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\varrho_i} \delta_i^\varkappa\,\varkappa\,(\varrho_i - \varkappa)\,;$$

in den $\beta = n'n'' - \Theta$ übrigen Punkten $(C', C'')$ berührt die gemeinsame Ebene die Fläche $F$.

Wenn nun $\psi'$ und $\psi''$ die Zahl der Begegnungspunkte der Wendecurve mit $C'$ und $C''$ bedeutet, so ist

$$\psi' = 4\,n'n - 8\,n' - 4\sum_{i=1}^{i=p}\Big((\varrho_i - 1)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\varrho_i} \delta_i^\varkappa\,\varkappa\Big) \text{ und}$$

$$\psi'' = 4\,n''n - 8\,n'' - 4\sum_{i=1}^{i=p}\Big((\varrho_i - 1)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\varrho_i} \delta_i^\varkappa\,(\varrho_i - \varkappa)\Big).$$

**15.** Ist $R$ ein Cuspidalpunkt einer Doppelcurve $D$, die nicht geradlinig ist, so haben sich die beiden (in der Tangente $t$ von $D$ sich schneidenden) Berührungsebenen $T_1$ und $T_2$ in eine $T_{12}$ — die Cuspidalebene*) — vereinigt: ihr Schnitt hat $\delta - 2$ Doppelpunkte

*) Ich gebrauche dies Wort in einer anderen Bedeutung als Herr Weyr.

und in $R$ einen dreifachen Punkt mit zwei (in die Gerade $t$) zusammengefallenen Tangenten: die Tangente $l$ des dritten Astes ist die einzige vierpunktig berührende Gerade von $R$. Alle Ebenen durch diese Gerade berühren die Fläche: geht ja doch jeder Tangentialkegel durch den Cuspidalpunkt. Die Schnittcurve einer solchen Ebene berührt sich selbst und die $l$ in $R$. Dieses Büschel von Tangentenebenen sondert sich zweifach vom Berührungskegel aus $R$ ab, sodass der übrige Kegel $(r-8)^{\text{ter}}$ Ordnung und $(m-2)^{\text{ter}}$ Klasse ist. Er hat sechs stationäre und $2m-14$ doppelte Ebenen weniger als der aus einem beliebigen Punkte. Die Gerade $l$ enthält er doppelt und die Cuspidalebene berührt er nur längs $t$.

**16.** Jeder Punkt $d$ einer vielfachen ($\varrho_\lambda$-fachen) Geraden hat $\varrho_\lambda$ Geraden, welche $(\varrho_\lambda + 2)$-punktig berühren: die Tangenten in $d$ an die Curven $(n-\varrho_\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung in den $\varrho_\lambda$ Berührungsebenen; bei einem Cuspidalpunkte fallen zwei dieser Ebenen zusammen in die Cuspidalebene (deren Schnitt hier sich nicht wesentlich von dem der übrigen Berührungsebenen unterscheidet), also auch zwei der $(\varrho_\lambda + 2)$-punktig berührenden Geraden in die der Cuspidalebene; diese Gerade $l$ zeichnet sich dadurch aus, dass alle durch sie gelegten Ebenen die Fläche im Cuspidalpunkte tangiren. Sie gehört dem übrigen Kegel aus dem Cuspidalpunkte doppelt an: derselbe hat sechs stationäre und $2m-12$ Doppelebenen weniger und eine um 2 kleinere Klasse, als die Kegel aus den gewöhnlichen Punkten der vielfachen Geraden. Dieser Verlust muss jedenfalls durch zum Büschel um $l$ gehörige stationäre und doppelte Tangentenebenen der Fläche gedeckt werden, die dann ihren (resp. ihren einen) Contactpunkt im Cuspidalpunkte haben.

Die den Cuspidalpunkten einer geradlinigen Fläche (z. B. der $F^n_{\varrho,\,n-\varrho}$) zugehörigen Geraden $l$ sind die $\gamma$ ausgezeichneten Generatricen.

**17.** Gehen wir nun an die gesonderte Betrachtung der sieben Flächen $F_1^4$, $F_2^4$; $F_2^5$, $F_3^5$, $F_4^5$, $F_5^5$, $\mathfrak{F}_3^5$. Den grösseren Theil der Untersuchungen nehmen die Curven $3^{\text{ter}}$, $4^{\text{ter}}$, seltener höherer Ordnung ein, welche von meistens durch die vielfache Curve und gewöhnlich noch andere schon bekannte Curven der Fläche (Geraden, Kegelschnitte, ebene Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung) gelegte Flächen $2^{\text{ter}}$ und $3^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. Dieselben sind zum grossen Theil schon durch die Abhandlungen des Herrn Clebsch bekannt: meine Untersuchungen sind frei von jeder Abbildbarkeit und bewegen sich auf rein synthetischem Boden. Bei diesen Curven wird stets der Rang (die Ordnung der Tangentenfläche), die Zahl der Schnittpunkte mit der vielfachen Curve und mit den einfachen Geraden, den Kegelschnitten der Fläche ermittelt, ferner die Mächtigkeit und Zahl der Schaaren, in denen sie vorkommen, resp. die Zahl der vereinzelt vorkommenden Curven, endlich die Zahl der Begegnungspunkte zweier (meistens

gleichartiger) Curven. Werden die Curven, durch welche die erzeugende Fläche (ausser durch die vielfache Curve) gelegt ist, die zugehörigen Curven genannt, so wird die Schnittpunktzahl zweier Curven, deren Ermittelung mit Hülfe der bekannten Sätze über die gegenseitige Position solcher Curven geschieht, welche einen vollen Durchschnitt zweier Flächen 2ter oder 3ter Ordnung zusammensetzen*), stets als Function der Zahl der Identitäten zwischen den zugehörigen Curven und der Schnittpunkte der nicht identischen zugehörigen Curven angegeben. Wiederholt ist nachzuweisen, dass gewisse Curven oder Curvenschaaren auf verschiedene Weisen erzeugt werden können. Auf genauere Mittheilungen über diese sehr ausgedehnten Untersuchungen einzugehen, ist natürlich in diesem Auszuge nicht möglich; es genüge, bei Gelegenheit ein Beispiel anzuführen.

**18.** *Die Fläche 4ter Ordnung* $F_1^4$ *mit einer doppelten Geraden* $D$**) besitzt 16 einfache Geraden, welche 8 Paare bilden, und ausser den Kegelschnitten in den Ebenen durch $D$ noch 128 einzelne Kegelschnitte, welche zu je zweien in einer die Fläche dreifach berührenden Ebene liegen. Auf einen solchen Kegelschnitt stützen sich 8 windschiefe Geraden, von denen 7 die achte bestimmen; auf zwei Kegelschnitten mit $\alpha$ Begegnungspunkten (ausserhalb $D$) $6-2\alpha$ Gerade, auf 3 Kegelschnitte mit $\alpha+\beta+\gamma$ Begegnungspunkten $5-(\alpha+\beta+\gamma)$ Gerade; auf $n$ ($\overline{<}$ 7) Gerade stützen sich $2^{7-n}$ Kegelschnitte. Es giebt je 1792, 4480, 1792 Kegelschnittdupel mit 0, 1, 2 Begegnungspunkten; die folgende Tabelle zeigt, von wie vielen Kegelschnitten ein Dupel mit $\alpha$ Begegnungspunkten in $\beta+\gamma$ Punkten getroffen wird:

| $\beta+\gamma$ : | $0+0$ | $0+1$ | $1+1$ | $0+2$ | $1+2$ | $2+2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha=0$ : | 12 | 30 | 40 | 0 | 30 | 12 |
| $\alpha=1$ : | 6 | 32 | 36 | 12 | 32 | 6 |
| $\alpha=2$ : | 0 | 30 | 40 | 24 | 30 | 0. |

Die Zahl der Kegelschnitttripel (2, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0) ist resp. 0, 26880, 21504, 71680, 53760, 0, 53760, 71680, 26880, 7168.

**19.** Herr Clebsch hat sich nur mit den Raumcurven 3ter Ordnung auf der Fläche beschäftigt: deren giebt es

1) 448 einzelne, deren jede die $D$ einmal trifft und drei windschiefen Geraden zweimal, den Paar-Genossinnen derselben gar nicht, übrigen einmal begegnet;

---

*) M. s. z. B. des Vfs. Flächen 3ter Ordnung Cap. V.

**) Clebsch, Math. Annalen Bd. 1, S. 257 ff. Da diese Flächen jetzt die Geometer — besonders hinsichtlich ihrer Abbildbarkeit — in umfangreichem Masse beschäftigen (Clebsch, Cayley, Cremona, Korndörfer, Nöther, Geiser), so citire ich nur solche Abhandlungen, die auf die betreffende Fläche besonders eingehen.

2) 128 Büschel von Raumcurven $3^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die $D$ zweimal treffen, 8 Kegelschnitten dreimal und 8 Geraden einmal begegnen: auf jeden der 8 Kegelschnitte stützt sich nur eine der 8 Geraden, sodass also (um von diesen Curven einmal ein Beispiel zu geben) jedes Büschel auf 8 Weisen erzeugt werden kann, nämlich mit Hülfe einer Fläche $2^{\text{ten}}$ Grades, die durch $D$, je einen der 8 Kegelschnitte und diejenige der 8 Geraden gelegt ist, die denselben trifft. Seien die Kegelschnitte, aus denen zwei Curven dieser Art (und alle ihre Büschelgenossinnen) abgeleitet sind, $S_1$ und $S_2$, und $G_1$ und $G_2$ die Geraden, also die zugehörigen Kegelschnitte und Geraden der beiden Curven (oder Büschel); sei ferner $\varepsilon = 1$ oder 0, je nachdem $G_1$ und $G_2$ identisch sind oder nicht, ebenso $\varphi = 1$ oder 0, je nachdem $S_1$ und $S_2$ identisch sind oder nicht, und sei $\alpha\,(= 0, 1, 2, 3)$ die Zahl der Begegnungspunkte (ausserhalb $D$) der nicht identischen $S_1$ und $S_2$, $\beta\,(= 0, 1)$ die der Schnittpunkte der nicht identischen $G_1$, $G_2$, $\gamma\,(= 0, 1, 2)$ die Zahl der Punkte $(G_1 S_2)$ und $(G_2 S_1)$, falls keine Identität stattfindet, so begegnen sich beide Curven in

$$i = 3\varphi - 2\varphi^2 + \varepsilon - 2\,\varepsilon\varphi + (\alpha + \beta + \gamma)$$

Punkten. Zwischen solchen Grössen, wie $\varepsilon$, $\varphi$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ finden grösstentheils gewisse leicht zu ermittelnde Beziehungen statt.

**20.** Es giebt ferner auf der Fläche:

3) 112 Netze von Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung $1^{\text{ter}}$ Species, deren jede der Geraden $D$ und zwei windschiefen einfachen Geraden zweimal, den Genossinnen der letzteren gar nicht, den 12 übrigen einmal, 32 Kegelschnitten $S$ je einmal und dreimal und 64 gar nicht begegnet;

4) 128 Netze von Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung $2^{\text{ter}}$ Species, deren jede $D$ dreimal, einen Kegelschnitt $S$ viermal und alle 8 auf ihn sich stützenden Geraden einmal trifft; endlich

5) 4480 einzelne Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung $2^{\text{ter}}$ Species, von welchen jede der Doppelgeraden $D$ zweimal, einer einfachen Geraden dreimal (wovon einmal auf $D$), 3 Geraden zweimal, den Genossinnen dieser 4 Geraden gar nicht, den 8 Geraden der 4 übrigen Paare einmal begegnet und resp. 8, 32, 48, 32, 8 Kegelschnitte $S$ in 4, 3, 2, 1, 0 Punkten trifft.

**21.** Jede Curve $4^{\text{ter}}$ Ordnung $1^{\text{ter}}$ Species der Fläche ist mit unendlich vielen anderen derselben Species je durch eine Fläche $2^{\text{ten}}$ Grades verbunden, deren Geraden von beiden zweimal getroffen werden; eine Curve aber der $2^{\text{ten}}$ Species ist in dieser Weise mit einer einzigen anderen $2^{\text{ten}}$ Species (von derselben Sorte) durch eine solche Fläche verbunden, gegen deren Geraden sich beide entgegengesetzt verhalten. So viele Punkte, als zweien Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung (von derselben oder von verschiedenen Species) gemein sind, sind auch stets zwei (oder den zwei)

ihnen verbundenen Curven gemein; diese allgemeinen Bemerkungen gelten übrigens für alle Flächen $4^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die Fläche der Doppeltangentenebenen besteht aus 17 Büscheln und einer Developpablen $\Psi$ $96^{\text{ster}}$ Klasse; von den 264 dreifachen Berührungsebenen gehören die 8 Geradenpaarebenen zu 3 Büscheln, die $16 \cdot 12 = 192$ Ebenen, welche eine Gerade und eine Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem Doppelpunkte enthalten, zu einem Büschel und zweimal zu $\Psi$, die 64 Kegelschnittpaar-Ebenen dreimal zu $\Psi$.

**22.** *Die Fläche* $4^{\text{ter}}$ *Ordnung* $F_2^4$ *mit einem doppelten Kegelschnitte* $D^2$*) hat 16 Gerade, deren jede von 5 anderen getroffen wird. Diese Geraden bilden 40 Paare, 80 Dupel (welche 40 windschiefe Vierseite erzeugen), 160 Tripel mit je einer Schneidenden, 40 Quadrupel ohne windschiefe Geraden, welche 20 Doppelvieren erzeugen, von denen wieder je zwei einander ergänzen, alle 16 Geraden umfassend, ferner 80 Quadrupel mit je einer windschiefen Geraden, die demnach 16 Quintupel bewirken, deren jedes mit allen seinen Geraden einer der 16 Geraden begegnet. Die 40 Paare bilden 10 Gruppen von je 4 gegeneinander windschiefen Paaren und je 2 Gruppen, die alle 16 Geraden umfassen, ergänzen einander. Alle diese bekannten Eigenschaften werden auf rein geometrischem Wege, ohne jede Abbildung hergeleitet. Daran schliesst sich die Ermittelung der 5 Schaaren oder Doppelreihen von Kegelschnitten und ihrer Beziehung zu den Geraden: Jede Doppelreihe ist einer Geradenpaar-Doppelgruppe so zugeordnet, dass die Paare jeder Gruppe zu der einen Reihe gehören und auf die andere sich stützen. Also auf einen Kegelschnitt (und alle seine Reihengenossen) stützen sich 8 Gerade, 4 windschiefe Paare bildend, auf 2 Kegelschnitte mit $\alpha$ Begegnungspunkten (und alle ihre Genossen) $8 - 4\alpha$ Gerade und auf 3 Kegelschnitte mit $\alpha + \beta + \gamma$ Begegnungspunkten $8 - 2(\alpha + \beta + \gamma)$ Gerade: Kegelschnitte aus derselben Reihe, aus verbundenen Reihen, aus verschiedenen Schaaren haben 0, 2, 1 Begegnungspunkte.

Auf sämmtliche Kegelschnitte zweier verbundener Reihen stützt sich keine Gerade, auf 2 verschiedene Reihen $R_1$, $R_2$ (d. h. aus verschiedenen Schaaren) 4 windschiefe Geraden, ein Doppelvier-Quadrupel, dessen zugehöriges Quadrupel die beiden verbundenen Reihen $R_1'$, $R_2'$ trifft, während die beiden Quadrupel der ergänzenden Doppelvier die Reihen $R_1 R_2'$, $R_1' R_2$ treffen; auf 3 Reihen stützen sich 2 windschiefe Gerade und das zum Vierseit vervollständigende Dupel auf die beiden verbundenen Reihen; auf 4 Reihen eine Gerade, auf 5 eine oder keine. Auf jede Gerade stützen sich 5 (verschiedene) Reihen, auf jedes Dupel

*) Kummer, Journ. f. Math. Bd. 64, S. 66; Clebsch, ebenda Bd. 69, S. 142; Geiser ebenda Bd. 70, S. 249; Cremona, Rendiconti dell' Istituto Lombardo 9. u. 23 März 1871.

3 verschiedene Reihen (auf ein Paar nur eine Reihe), auf jedes Tripel zwei verschiedene Reihen, welche noch von der das Tripel zum Quadrupel vervollständigenden Geraden getroffen werden.

**23.** Darauf wird nachgewiesen, dass die Ebenen zweier Kegelschnitte aus verbundenen Reihen durch einen Punkt gehen und einen Kegel $2^{ten}$ Grades einhüllen. Da sie alle doppelt berühren, so bilden diese 5 Kummer'schen Kegel mit den 16 Büscheln die Developpable der doppelten Tangentialebenen (Nr. 4.). Die Berührungspunkte bilden je eine Curve $4^{ter}$ Ordnung $1^{ter}$ Species, welche $D^2$ in den Cuspidalpunkten trifft. In jeder Schaar kommt es viermal vor, dass zwei Kegelschnitte derselben Ebene sich berühren. Jeder Kegelschnitt wird von 2 verbundenen berührt; in jeder Reihe giebt es 4 Geradenpaare und 4 Parabeln: die Mittelpunkte bilden eine Curve $4^{ter}$ Ordnung $2^{ter}$ Species.

Die Fläche kann erzeugt werden durch zwei projectivische Flächenbüschel $2^{ter}$ Ordnung, deren Grundcurve aus $D^2$ und je einem Kegelschnitt $S_1$, $S_2$ aus derselben Reihe besteht, oder durch ein solches Büschel $(D^2, S_1)$ und das projectivische Tangentialebenenbüschel des zugehörigen Kummer'schen Kegels, wenn die Ebene $S_1$ dem Ebenenpaare $(S_1, D^2)$ entspricht: in beiden Fällen erzeugen die verbundenen Kegelschnitte die Fläche.

Die Curven $3^{ter}$ und $4^{ter}$ Ordnung sind schon durch Herrn Clebsch hinreichend bekannt; es möge genügen, hier noch eine Eigenschaft der Curven $4^{ter}$ Ordnung $2^{ter}$ Species zu erwähnen: dieselben bilden 40 dreifach unendliche Schaaren (Gebüsche), jede einem Doppelvier-Quadrupel zugehörig, dessen Geraden die Curven des Gebüsches zweimal treffen, während die des zugehörigen Quadrupels sie gar nicht und alle 8 der ergänzenden Doppelvier sie einmal treffen: die Kegelschnitte der beiden Reihen, welche das Quadrupel der gar nicht treffenden Geraden gemein haben, begegnen allen Curven des Gebüsches dreimal, die der verbundenen Reihen (auf die sich die zweimal treffenden Geraden stützen) einmal, die der 6 übrigen zweimal.

**24.** Die Herren Moutard und Laguerre*) haben die Enveloppe aller Kugeln, welche eine feste Kugel $W$ (mit dem Centrum $O$) orthogonal schneiden, während die Mittelpunkte eine Curve oder Fläche erfüllen, die anallagmatische Fläche dieser Curve oder Fläche in Bezug auf $W$ genannt. Die anallagmatische Fläche einer Geraden ist ein Kreis, auf dessen Ebene (in der $O$ liegt) im Mittelpunkte die Gerade senkrecht ist; die anallagmatische Fläche einer Curve ist also der Ort der anallagmatischen Kreise der Tangenten; die anallagmatische Fläche einer Ebene degenerirt zu 2 Punkten, die zu beiden Seiten der Ebene gleich weit abstehen und auf dem Lothe aus $O$ liegen. Die anallag-

*) Ausführlicheres ist mir über die Untersuchungen derselben nicht bekannt.

matische Fläche einer Fläche 2ten Grades $F^2$ ist 4ter Ordnung und hat den unendlich fernen Kugelkreis zur Doppelcurve: sie ist zugleich der Ort der anallagmatischen Punkte aller Berührungsebenen von $F^2$, in welchen beiden Punkten je die Kugel aus dem Berührungspunkte der Ebene die Fläche tangirt, und der Ort der anallagmatischen Kreise aller Geraden von $F^2$, welche 2 verbundene Kreisreihen liefern: in derselben Ebene liegen Kreise, deren Geraden parallel sind, und der Scheitel des zugehörigen Kummer'schen Kegels, dessen Ebenen auf den Kanten des Asymptotenkegels von $F^2$ senkrecht sind, ist $O$; die 4 Paare einer Reihe entspringen den 4 Geraden der zugehörigen Schaar von $F^2$, welche $W$ tangiren. Auch die anderen Kegelschnittschaaren bestehen aus Kreisen und es giebt immer 5 Flächen $F^2$, welche in Bezug auf 5 gewisse Kugeln dieselbe anallagmatische Fläche haben.

**25.** Bei dieser bis jetzt wohl am meisten betrachteten Fläche wollen wir auch auf die Specialfälle eingehen, wenn sie *vereinzelte Knotenpunkte ausser der Doppelcurve* $D^2$ hat.*) Durch jeden Knotenpunkt gehen stets 4 binäre Gerade, d. h. solche, welche je zwei Gerade des allgemeinen Falles vertreten. Die unären Geraden haben die Eigenschaften des allgemeinen Falles behalten: die Ebenen durch die binären Geraden sind nur einfach berührende. Der Anschmiegungskegel eines Knotenpunktes zweigt sich vom Tangentialkegel aus demselben ab und zwar seiner Ordnung nach dreifach, seiner Klasse nach zweifach; der übrig bleibende eigentliche Tangentialkegel zerfällt meistens in einen Tangentenkegel und einen Tangentialebenenkegel. Bei mehr als einem Knotenpunkte kann die Verbindungslinie zweier entweder nicht der Fläche angehören: dann befinden sich unter den Ebenen ihres Büschels, welche alle in 2 Kegelschnitten schneiden, aber im Allgemeinen nicht berühren, zwei ausgezeichnete Ebenen $\Delta$, welche die Fläche in einem Kegelschnitte $H$ tangiren; oder die Gerade gehört der Fläche an und vertritt 2 binäre (oder 4 unäre) Geraden, ist also quaternär: dann berührt auch nur eine Ebene $T_0$ durch diese Gerade auf derselben und zwar längs der ganzen Geraden und durchschneidet also noch in einem Kegelschnitte; alle übrigen Ebenen durch die quaternäre Gerade durchschneiden in der Geraden und einer Curve 3ter Ordnung, die sich in den Knotenpunkten und auf $D^2$ treffen. Wenn der Kummer'sche Kegel einer (binären) Kegelschnittschaar zum Ebenenbüschel degenerirt, so vermischen sich die beiden Reihen der Schaar; eine solche Degeneration findet statt bei einer Knotenpunkts-Verbindungsgeraden, die nicht der Fläche angehört.

*) Die Herren Kummer, Cayley und Korndörfer haben sich mit diesen Specialfällen schon beschäftigt; letzterer Math. Annalen Bd. 1. S. 592 und Bd. 2. S. 41.

**26.** Wir haben hier fünf Flächen zu betrachten:

a) *Die Fläche mit einem Knotenpunkte.* Dieselbe hat 4 binäre und 8 unäre Geraden: jede binäre wird von 3 binären und 2 unären, jede unäre von einer binären und 3 unären Geraden getroffen. Es giebt 3 Paare unärer Kegelschnittreihen mit je 2 unären und einem binären Paar und ein Paar binärer Reihen mit je 4 unär-binären Paaren: alle Kegelschnitte dieser beiden binären Reihen treffen sich in $N_1$, der der Scheitel des Kummer'schen Kegels ist, dessen Ebenen nur einfach berühren; die aus verbundenen Reihen nochmals. Die Fläche $\Sigma$ der stationären Ebenen ist $18^{\text{ter}}$ Klasse; die der doppelten Berührungsebenen besteht aus den Büscheln um die 8 unären Geraden und den 3 unären Kummer'schen Kegeln; der Kegel aus $N_1$ ausser dem Anschmiegungskegel aus dem binären Kummer'schen Kegel und den Büscheln um die 4 binären Geraden.

b) *Die Fläche mit zwei Knotenpunkten* $N_1$, $N_2$, *deren Verbindungsgerade ihr nicht angehört:* diese hat 8 binäre Geraden, durch jeden $N$ vier; jede Gerade wird nur von einer des anderen $N$ getroffen; das Büschel um $N_1 N_2$ bildet den degenerirten binären Kummer'schen Kegel und enthält 2 conische Doppelebenen $\Delta$; sonst giebt es 3 Paare unärer Kegelschnittreihen mit je 2 binären Geradenpaaren, deren Scheitel in den $N$ liegen. Die Fläche $\Sigma$ ist $6^{\text{ter}}$ Klasse, ihre Berührungscurve ist $12^{\text{ter}}$ Ordnung und setzt mit den beiden $H$ die Wendecurve zusammen; die Fläche der zusammenhängenden Doppelebenen besteht aus den 3 unären Kummer'schen Kegeln. Der Tangentialkegel aus einem $N$ zerfällt in einen Tangentenkegel (die beiden Strahlbüschel in den $\Delta$) und einen Tangentenebenenkegel (die Ebenenbüschel um die 4 binären Geraden).

c) *Die Fläche besitzt* 2 *Knotenpunkte* $N_1$, $N_2$, *deren Verbindungsgerade ihr angehört:* sie hat dann eine quaternäre Gerade $N_1 N_2$, durch jeden $N$ noch 2 binäre und ferner 4 unäre Geraden; jede binäre Gerade begegnet der quaternären, ihrer Genossin und 2 unären, jede unäre 2 binären von verschiedenen $N$ und einer unären, welche die beiden anderen binären trifft. Es giebt ein Paar unärer Reihen, von denen die eine die beiden unären Paare und die Gerade $N_1 N_2$ doppelt, die andere die beiden binären Paare und den Ergänzungskegelschnitt $S_0$ der $N_1 N_2$ in der Ebene $T_0$, welche längs $N_1 N_2$ berührt, enthält, und 2 Paare binärer Reihen mit je 2 unär-binären und einem quaternär-binären Paare. Die binären Kummer'schen Kegel sind wieder $2^{\text{ten}}$ Grades und haben ihre Scheitel resp. in $N_1$, $N_2$, durch welchen Punkt auch alle ihre Kegelschnitte gehen. Der Kegel z. B. aus $N_1$ besteht aus dem Kummer'schen Kegel ($N_1$) und den Büscheln um die beiden binären Geraden. Die Developpable $\Sigma$ und die der Doppelebenen ist auch hier $6^{\text{ter}}$ Klasse, die Berührungscurve der ersteren ist $14^{\text{ter}}$ Ord-

nung und die Wendecurve wird durch die quaternäre Gerade (doppelt) vervollständigt; längs dieser Geraden ist die Fläche gewissermassen developpabel; die andere Developpable ist zusammengesetzt aus dem unären Kummer'schen Kegel und den Büscheln der 4 unären Geraden. Die Ebene $T_0$ berührt nicht blos längs $N_1 N_2$, sondern auch in zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Tangente von $S_0$ im nicht auf $D^2$ gelegenen Schnittpunkte mit $N_1 N_2$; $T_0$ berührt in diesem Punkte die $\Sigma$ und längs dieser Tangente den unären Kummer'schen Kegel.

**27.** d) *Die Fläche mit* 3 *Knotenpunkten* $N_1 N_2 N_3$; zwei der 3 Verbindungslinien gehören der Fläche an, die dritte nicht; seien jene $N_1 N_2$, $N_1 N_3$. Längs derselben berührt also je eine Ebene $T_0$; durch $N_2$, $N_3$ gehen noch je 2 binäre Geraden, welche sich noch zweimal ausserhalb der Knotenpunkte treffen; in dem Büschel durch $N_1 N_2$ giebt es wieder 2 einzelne Doppelebenen $\Delta$, welche längs Kegelschnitten $H$ tangiren; es giebt 3 Kegelschnittschaaren: eine unäre mit einem ordentlichen Kummer'schen Kegel $V^2$, dessen Ebenen alle zweimal berühren, eine binäre, deren Kummer'scher Kegel noch 2ten Grades ist und seinen Scheitel in $N_1$ hat und von einmal berührenden Ebenen eingehüllt wird, und noch eine binäre Schaar, deren Kegel zum Büschel $N_1 N_2$ degenerirt, dessen Ebenen im Allgemeinen nicht berühren. Zur ersten binären Schaar gehören das quaternäre Paar und die beiden binären Paare, zur zweiten die 4 quaternär-binären Paare, zur unären Schaar die beiden binären Paare und die beiden quaternären Geraden als zusammengefallene Geraden. Der Kegel aus $N_1$ besteht nur aus dem Kummer'schen Kegel $(N_1)$; der aber z. B. aus $N_2$ aus 2 Strahlenbüscheln und 2 Ebenenbüscheln. Die Developpable $\Sigma$ ist 6ter Klasse und berührt die Fläche längs einer Curve 8ter Ordnung, welche mit den beiden Kegelschnitten $H$ und den beiden (doppelten) quaternären Geraden die Wendecurve bildet; die zusammenhängenden Doppelebenen umhüllen nur eine Developpable 2ter Klasse: den unären Kummer'schen Kegel.

e) *Die Fläche mit* 4 *Knotenpunkten* $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$; sie enthält 4 ein windschiefes Vierseit bildende Verbindungsgeraden $N_1 N_2$, $N_2 N_3$, $N_3 N_4$, $N_4 N_1$; ausserdem keine Geraden. Längs jeder der 4 quaternären Geraden wird sie von einer Ebene $T_0$ berührt: in den Büscheln durch $N_1 N_3$, $N_2 N_4$ giebt es wieder je 2, also im Ganzen 4 conische Doppelebenen $\Delta$. In diesen Büscheln befinden sich die binären Kegelschnittschaaren, deren Kegel also degenerirt sind; ausserdem giebt es eine unäre mit ordentlichem Kummer'schen Kegel $V^2$. Der Tangentialkegel aus jedem $N$ besteht nur aus 2 Strahlenbüscheln. Eine Fläche $\Sigma$ existirt nicht, die Wendecurve besteht aus den 4 Kegelschnitten $H$ und den 4 doppelt gezählten quaternären Geraden; die

zweipunktig berührenden Doppelebenen umhüllen nur den $V^2$. Die Generaleigenschaft dieser Fläche (4ter Ordnung 4ter Klasse) ist, dass *sie sich selber reciprok ist*; was eine reiche Fülle von Eigenthümlichkeiten hervorruft, von denen hier nur einige erwähnt werden. Von den 6 Schnittlinien der 4 conischen Doppelebenen $\Delta$ sind 2 identisch mit den nicht auf der Fläche liegenden Knotenpunktsgeraden $N_1 N_3$, $N_2 N_4$; die 4 übrigen — die also ein windschiefes Vierseit bilden — sind die vierpunktig berührenden Geraden der 4 Cuspidalpunkte von $D^2$, welche den 4 quaternären Geraden reciprok sind. Alle Punkte einer dieser Geraden haben die nämliche Berührungsebene $(T_0)$; alle Ebenen durch eine jener Geraden den nämlichen Berührungspunkt, den Cuspidalpunkt (Nr. 15.).*) Die Tangentialkegel aus den Punkten von $D^2$ zerfallen in 2 Kegel 2ten Grades (deren gemeinsame Kanten durch die $N$ gehen), von denen einer bei den Cuspidalpunkten in ein (doppeltes) Ebenenbüschel degenerirt; die Tangentenebenen von $V^2$ durchschneiden in 2 Kegelschnitten (deren gemeinsame Tangenten in den $\Delta$ liegen), von denen einer in den Ebenen $T_0$ in eine doppelte Gerade ausartet. Die 4 Ebenen $T_0$ treffen sich im Scheitel von $V^2$.

Die beiden Kegelschnitte in den Ebenen durch die Geraden $N_1 N_3$, $N_2 N_4$ haben 2 Punkte $N$ und 2 Punkte von $D^2$ gemein; der Kegel aus einem Punkte einer dieser Geraden, z. B. der $N_1 N_3$, zerfällt ebenfalls in 2 Kegel 2ten Grades, welche 2 Ebenen $\Delta$ und 2 Ebenen von $V^2$ gemein haben; die Berührungscurven dieser beiden Kegel sind 2 Kegelschnitte, deren im Allgemeinen verschiedene Ebenen durch $N_2 N_4$ gehen; die beiden Kegel aus einem der Knotenpunkte vereinigen sich in den Anschmiegungskegel, dessen Berührungscurve durch die beiden quaternären Geraden, freilich im Allgemeinen nur durch den Knotenpunkt repräsentirt wird. Reciprok: längs der Kegelschnitte in den Ebenen durch $N_1 N_3$ oder $N_2 N_4$ sind der Fläche Kegel 2ten Grades umschrieben, die ihre Spitzen auf $N_2 N_4$ oder $N_1 N_3$ haben; der längs eines $H$ umschriebene Kegel ist zwar im Allgemeinen die Ebene $\Delta$, wird aber wegen der 2 Cuspidalpunkte auf $H$ durch die Büschel um deren vierpunktig berührende Geraden, denen $\Delta$ gemein ist, dargestellt.

**28.** Unter diesen Flächen mit Knotenpunkten befinden sich einige bekanntere Flächen; z. B. zu den Flächen a) gehört die Fusspunktenfläche eines Punktes $P$ in Bezug auf eine $F^2$. Doppelkegelschnitt ist der unendlich ferne Kugelkreis $C^2_\infty$; Knotenpunkt der Pol $P$. Alle Geraden sind imaginär: die 4 binären sind Lothe aus $P$ auf Tangentenebenen, welche zugleich in denselben liegen. Von den unären

---

*) Eigentlich müsste man von beiden Arten Geraden gleichartig sagen, dass sie der Fläche angehören, oder dass sie ihr nicht angehören.

Kegelschnittschaaren (Kreisschaaren) ist nur eine reell; die beiden binären Reihen werden durch die Fusspunktskreise von $P$ in Bezug auf die Büschel um die Geraden von $F^2$ gebildet. Es giebt aus $P$ stets 3 Lothe, die zugleich auf 2 Geraden derselben Schaar normal sind, und 2 Lothe, die auf 2 (parallelen) Geraden aus verschiedenen Schaaren senkrecht sind; letztere liegen auf dem Kegel 2ten Grades der 6 Normalen aus $P$ auf $F^2$. Den Schnitt der Fusspunktenfläche mit $F^2$ bilden die beiden Fusspunktscurven von $P$ in Bezug auf die Geraden der beiden Schaaren; dieselben sind 4ter Ordnung 2ter Species und treffen sich (ausserhalb $C^2_\infty$) in den Fusspunkten der 6 Normalen.

Ein Beispiel der Fläche b) ist die, welche durch Rotation eines Kegelschnitts $K$ um eine nicht in seiner Ebene liegende Axe $A$ entsteht.*) Der Doppelkreis gehört zu den Parallelkreisen, welche die binäre Schaar bilden: Knotenpunkte sind die gemeinsamen unendlich fernen Punkte aller Parallelkreise. Die Kegelschnitte in jeder der 3 unären Schaaren sind alle congruent; verbundene Kegelschnitte spiegeln sich stets gegenseitig in der Meridianebene, die durch ihre beiden Schnittpunkte geht, ab. Die 3 Kummer'schen Kegel sind Rotationskegel um $A$.

Liegt $A$ in der Ebene von $K$, so wird die Rotationsfläche eine Fläche e); die beiden weiteren Knotenpunkte sind die Punkte $(K, A)$; während vorher der rotirende Kegelschnitt eine der 6 unären Reihen erzeugte, bildet er hier die zweite binäre Schaar: die conischen Doppelebenen $\Delta$ dieser Schaar sind nothwendig imaginär und schneiden die Parallelkreis-Ebenen in den gemeinsamen Asymptoten der beiden Kreise, gehen also resp. durch einen der beiden unendlich fernen Knotenpunkte.

Ein zweites Beispiel für die Fläche b) liefert die anallagmatische Fläche eines Kegelschnittes $K$ in Bezug auf eine Kugel $W$ (um $O$); Doppellinie ist $C^2_\infty$, also alle Kegelschnitte sind Kreise. Die binäre Schaar wird gebildet durch die anallagmatischen Kreise der Tangenten von $K$, deren Mittelpunkte die Fusspunktscurve von $O$ in Bezug auf $K$ ausfüllen und von denen je 2 in derselben Ebene liegende parallelen Tangenten entsprechen. Diese Ebenen drehen sich um den auf der Ebene von $K$ normalen Durchmesser von $W$, in welchen der anallagmatische Kreis der unendlich fernen Geraden der Ebene von $K$ degenerirt ist: Knotenpunkte sind die auf diesem Durchmesser liegenden anallagmatischen Punkte dieser Ebene. Die anallagmatischen Flächen aller Kegelschnitte einer $F^2$ sind der anallagmatischen Fläche der $F^2$ selbst (Nr. 24.) eingeschrieben und berühren sie längs einer Curve 4ter Ordnung 2ter Species, deren je 2 — zwei symmetrischen Kegelschnitten zugehörig — auf einem Kegel 2ten Grades mit dem Scheitel $O$ liegen.

*) Salmon-Fiedler, anal. Geom. des Raumes Bd. II. S. 354.

**29.** Auch diese Fläche liefert einen speciellen Fall mit 4 Knotenpunkten, die bekannte Dupin'sche Cyclide*), deren Doppelkegelschnitt ebenfalls $C^2_\infty$ ist. Wie dieselbe als Enveloppe zweier sich gegenseitig berührender Kugelschaaren $Q$ und $V$ erzeugt wird, setzen wir voraus. Die Berührungskreise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ dieser Kugeln mit der Cyclide, welche zugleich die Krümmungslinien derselben sind, bilden die beiden binären Kreisschaaren. Die Mittelpunkte $\mu$ und $\mu'$ der Kugeln $Q$ und $V$ (zugleich die Krümmungscentra für die Cyclide und zwar $\mu$ ein stets festes für alle Punkte eines $\mathfrak{M}$ und bewegliches für die eines $\mathfrak{P}$, die $\mu'$ umgekehrt) liegen in 2 aufeinander senkrechten Ebenen $E$ und $E'$ und erzeugen je einen Kegelschnitt $M$ und $M'$, von denen jeder durch die Brennpunkte des anderen geht, sodass der eine Kegelschnitt Ellipse, der andere Hyperbel ist. Nehmen wir z. B. an, dass jede Kugel $V$ die Kugeln $Q$ entweder alle ausschliesst oder alle einschliesst; so ist $M$ eine Ellipse, $M'$ ein Hyperbel, von deren Aesten der eine die Centra der ausschliessenden, der andere die der einschliessenden Kugeln $V$ enthält. Für jede der beiden Kugelschaaren $Q$ und $V$ giebt es eine Kugel $W$ resp. $W'$, welche alle orthogonal schneidet; ihre Centra $O$ und $O'$ liegen auf der Geraden $(E, E')$. Die Cyclide ist also sowohl die anallagmatische Fläche von $M$ in Bezug auf $W$, als auch von $M'$ in Bezug auf $W'$; freilich liegen diesmal die Mittelpunkte $O$ und $O'$ in den Ebenen von $M$ und $M'$. Die Lothe $A'$ und $A$ auf $E$ in $O$ und auf $E'$ in $O'$ — welche in den Ebenen $E'$ und $E$ liegen — sind die Axen der Büschel der Ebenen der binären Kreisschaaren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$; die Knotenpunkte sind die Schnittpunkte $(A', W')$ und $(A, W)$, die nicht alle 4 reell sein können; alle 4 (quaternären) Geraden sind imaginär. Auch von den conischen Doppelebenen $\Delta$ sind stets nur 2 reell, in unserem Falle die zur Schaar der Kreise $\mathfrak{M}$ gehörigen: in diese Ebenen sind die Kugeln aus den beiden unendlich fernen Punkten von $M'$ degenerirt.

Die Curven der Mittelpunkte der Kreise $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ sind die (hier ebenen) Fusspunktscurven von $O$ resp. $O'$ in Bezug auf $M$ resp. $M'$. Der Tangentialkegel aus einem Punkte von $A$ resp. $A'$ zerfällt in zwei Rotationskegel (2ten Grades), und die Berührungscurven sind 2 Kreise $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{M}$.

**30.** Tritt bei einer Fläche 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden $D'$ noch eine zweite die erste treffende Doppelgerade $D''$ hinzu, so bekommen wir eine Fläche mit einem Doppelkegelschnitte, der in ein Geradenpaar aufgebrochen ist**): die Fläche bildet also gewissermassen den Uebergang zwischen $F_1{}^4$ und $F_2{}^4$. Sowohl $D'$ als $D''$ werden von

*) Ebenda, Bd. II. S. 349, 353, 359.

**) Korndörfer, math. Annalen Bd. 3, S. 496.

8 Geradenpaaren getroffen, aber es lässt sich (mit Hülfe windschiefer Flächen) leicht erkennen, dass je 4 dieser Geradenpaare sich in der anderen Doppelgeraden vereinigen, sodass also bei jeder Geraden nur 4 Paare einfacher Geraden sind. Jede einfache Gerade der einen Doppelgeraden trifft (ausser ihrer Paargenossin) 4 gegeneinander windschiefe Geraden der anderen, wodurch sich 40 Paare ergeben wie bei $F_2^4$. Die Kegelschnitte in den Ebenen durch $D'$ und $D''$ bilden 2 verbundene Reihen: diese beiden Ebenenbüschel repräsentiren einen Kummer'schen Kegel, weshalb es nur 4 eigentliche giebt, welche 4 Kegelschnittschaaren liefern, die, ermöglicht durch *zwei* Doppelgeraden, an die Stelle der 128 einzelnen Kegelschnitte getreten sind. Der Punkt $(D'D'')$ absorbirt auf beiden Geraden je 2 Cuspidalpunkte, sodass auf den einzelnen Geraden nur noch je 2 eigentliche, auf beiden zusammen aber 4, also wie bei $D^2$, sind.

**31.** Hinsichtlich *der Fläche* $5^{ter}$ *Ordnung* $F_2^5$ *mit* 2 *gegeneinander windschiefen doppelten Geraden* $D'D''$*) sind viele ihr besonders zukommende Eigenschaften bei der allgemeinen Untersuchung im ersten Theile vorgekommen, zumal diese Fläche in vielen Fällen eine besondere Betrachtung erheischte. Kegelschnitte besitzt diese Fläche bekanntlich nur in den 26 vierfachen Ebenen, welche durch eine doppelte und eine der 13 einfachen Geraden gehen, die ja beide Doppelgeraden treffen; dieselben führen, wie es scheint, nicht zu besonders interessanten Eigenschaften. Die Curven $6^{ter}$ Ordnung und $0^{ten}$ Geschlechts (mit einer Schaar fünffacher Secanten), welche von einer durch $D'D''$ gelegten $F^2$ ausgeschnitten werden, hat Herr Clebsch besprochen, ebenso ihr durch einen Doppelpunkt bewirktes Zerfallen in 2 ebene Curven $3^{ter}$ Ordnung, deren Ebenen durch $D'$ und $D''$ gehen, oder in eine der 13 Geraden und eine Curve $5^{ter}$ Ordnung $0^{ten}$ Geschlechts. Sie kann aber ersichtlich noch weiter in 2 Gerade und eine Curve $4^{ter}$ Ordnung und $0^{ten}$ Geschlechts oder in 3 Gerade und eine Curve $3^{ter}$ Ordnung zerfallen. Der Curven $5^{ter}$ Ordnung giebt es 13 Netze, derjenigen $4^{ter}$ Ordnung 78 Büschel, der Curven $3^{ter}$ Ordnung 286 einzelne. Diese Curven $6^{ter}$, $5^{ter}$, $4^{ter}$, $3^{ter}$ Ordnung begegnen den 0, 1, 2, 3 zugehörigen Geraden einmal, den übrigen nicht. Die Curven $4^{ter}$ Ordnung jedes Büschels sind die Durchschnitte der entsprechenden Flächen zweier projectivischen Flächenbüschel $2^{ter}$ und $3^{ter}$ Ordnung, deren Grundcurven die beiden $D$ gemeinsam haben.

**32.** *Die Fläche* $5^{ter}$ *Ordnung* $F_3^5$ *mit einer doppelten cubischen Raumcurve* $D^3$**) hat 11 einander nicht begegnende einfache Geraden $G$. Die Flächen $2^{ten}$ Grades durch $D^3$ führen zu einem Netze Curven

*) Clebsch, math. Annalen Bd. I. S. 306.
**) Derselbe Bd. I. S. 284.

$4^{\text{ter}}$ Ordnung $2^{\text{ter}}$ Species $R^4$, welche $D^3$ je in 7 Punkten treffen. Wird $F^2$ noch durch eine oder 2 der Geraden $G$, die sich ja alle in 2 Punkten auf $D^3$ stützen, getroffen, so erhält man 11 Büschel von cubischen Curven $R^3$, die der $D^3$ fünfmal begegnen, und 55 Kegelschnitte $K$, welche $D^3$ dreimal treffen. Die $R^4$ treffen keine der Geraden, die $R^3$ und $K$ nur ihre zugehörigen (eine oder zwei). Zwei Kegelschnitte $K$ mit $\alpha$ Begegnungspunkten haben $1 - \alpha$ gemeinsame zugehörige Gerade. Jeder $K$ wird demnach von 36 anderen in 1, von 18 in 0 Punkten getroffen, von keinem in 2 Punkten; ein Dupel mit keinem Begegnungspunkte wird von 9 Kegelschnitten in $0 + 0$, von 16 in $0 + 1$, von 28 in $1 + 1$ Punkten, ein Kegelschnittdupel mit einem Begegnungspunkte von 4 in $0 + 0$, von 28 in $1 + 0$, von 21 in $1 + 1$ Punkten getroffen. Die Anzahl der Tripel (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) und (1, 1, 1) ist resp. 1485, 3960, 13860, 6930. Die ersten zerfallen in 1320, bei denen eine Gerade alle 3 Kegelschnitte trifft, und 165, bei denen dies nicht der Fall ist.

Die Curven $R^4$ treffen jeden $K$ einmal, die $R^3$ 10 Kegelschnitte nicht, die übrigen einmal. In den $R^3$ eines Büschels schneiden sich die entsprechenden Flächen zweier projectivischer Büschel $2^{\text{ter}}$ und $3^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Grundcurve die $D^3$ gemein haben.

Jeder $K$ wird durch eine Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathsf{K}^3$ ergänzt; auf jede $\mathsf{K}^3$ stützen sich 9 Gerade und auf 2 Curven $\mathsf{K}^3$ mit $\beta\,(= 1, 2)$ Schnittpunkten $9 - \beta$ Gerade.

Ausserdem giebt es, ohne dass wahrscheinlich damit die Curven dieser beiden Ordnungen erschöpft sind, 462 einzelne unebene Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung $Q^3$, welche $D^3$ in 4 Punkten begegnen, 5 Geraden $G$ begegnen und die 15 Kegelschnitte, die sich auf je 2 der 6 anderen Geraden stützen, dreimal treffen, den 10 aber, die sich auf je 2 der getroffenen Geraden stützen, gar nicht, also ihrer Ergänzungscurve dreimal begegnen; ferner 330 Büschel Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung $2^{\text{ter}}$ Species $Q^4$, welche $D^3$ sechsmal treffen, 4 Geraden begegnen und den 6 Kegelschnitten, welche sich auf je 2 dieser 4 Geraden stützen, gar nicht, den Ergänzungscurven $3^{\text{ter}}$ Ordnung also viermal begegnen; dann 165 Büschel Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung $1^{\text{ter}}$ Species $V^4$, welche $D^3$ fünfmal treffen, 8 Geraden begegnen und die 3 Kegelschnitte, welche den Dupeln der 3 nicht getroffenen Geraden zugehören, dreimal begegnen.

Eine $Q^3$ wird von einer Fläche $F^3$ ausgeschnitten, die durch $D^3$ und beliebige 3 Kegelschnitte $K$, deren zugehörige Geraden die 6 nicht getroffenen sind, gelegt ist, oder auch durch eine $F^3$, welche durch $D^3$, eine der 10 dreimal getroffenen $\mathsf{K}^3$ und die 3 Geraden $G$ gelegt ist, die $\mathsf{K}^3$ und $Q^3$ treffen. Eine $Q^4$ wird durch eine $F^3$ ausgeschnitten, die durch $D^3$, eine viermal getroffene $\mathsf{K}^3$ und die 2 Geraden $G$ geht, welche $\mathsf{K}^3$ und $Q^4$ treffen; endlich eine $V^4$ entsteht, wenn $F^3$

durch $D^3$, zwei der dreimal getroffenen Kegelschnitte $K$ und die auf beide sich stützende Gerade gelegt ist, oder wenn $F^3$ durch $D^3$, einen dreimal von $V^4$ getroffenen Kegelschnitt, eine getroffene Gerade $G$ und einen jenen und diese treffenden (der $V^4$ dann nur zweimal begegnenden) Kegelschnitt gelegt ist.

Durch die 55 Ebenen, welche einen Kegelschnitt $K$ und eine Curve 3ter Ordnung $K^3$ enthalten, kommen zu den 220 früher gefundenen dreifachen Berührungsebenen, die je zweimal auf einer Geraden der Fläche und das dritte Mal ausserhalb berühren und desshalb der Fläche $\Phi$ 225ter Classe nur zweifach angehören, noch 55 Ebenen hinzu, die in den 3 nicht auf $D^3$ gelegenen Punkten ($K$, $\mathsf{K}^3$) tangiren und $\Phi$ dreifach angehören.

**33.** *Die Fläche* 5ter *Ordnung* $F_4^5$ *mit einer doppelten Raumcurve* 4ter *Ordnung* 1ter *Species* $D^4$*) hat 14 Gerade, welche 7 Paare bilden; dieselben gehören zu dem Büschel Kegelschnitte $K$, das von den $F^2$ durch $D^4$ ausgeschnitten wird. Diese Kegelschnitte $K$ bilden den Durchschnitt der entsprechenden Flächen zweier projectivischen Büschel 2ter und 3ter Ordnung, deren Grundcurven die $D^4$ gemeinsam ist. Die Geraden $G$ treffen — wie bei allen unsern Flächen 5ter Ordnung — die $D^4$ je zweimal; die $K$ thun es viermal. Jeder $K$ wird von einer Curve 3ter Ordnung $K^3$ ergänzt. Die beiden nicht auf $D^4$ gelegenen Punkte ($K$, $K^3$), sind die Berührungspunkte der gemeinsamen Ebene. Die Kegelschnitte $K$ haben keinen Punkt gemein, also haben je zwei Curven $K^3$ einen gemeinschaftlichen Punkt; dieser Punkt ist nicht veränderlich, sondern ein fester, also ausgezeichneter Punkt der Fläche $V$; die Schaar $K^3$ wird nämlich aus $F_4^5$ durch das cubische Flächenbüschel ausgeschnitten, dessen Grundcurve aus $D^4$, zwei beliebigen Kegelschnitten $K$ und der Schnittgeraden der Ebenen der letzteren besteht: der Punkt $V$, durch den alle $K^3$ gehen, ist der fünfte Schnittpunkt dieser Schnittgeraden mit $F_4^5$. Die $K$ sowohl wie die $K^3$ werden durch Flächenbüschel eingeschnitten; also geht durch jeden Punkt von $F_4^5$ nur ein $K$ und nur eine $K^3$. Demnach hüllen die Ebenen der $K$, $K^3$ — welche die $F_4^5$ doppelt berühren — einen Kegel 2ten Grades $V^2$ ein, dessen Spitze $V$ ist. Die Fläche $F_4^5$ ist folglich das Erzeugniss der Durchschnittscurven der entsprechenden Flächen des Büschels $D^4$ und Berührungsebenen des Kegels $V^2$ (ein Beispiel für unsere Fläche ist desshalb die Wendepolarfläche einer Geraden in Bezug auf eine Fläche 3ter Ordnung**): die 7 Geradenpaare entspringen den Schnitt-

*) Clebsch, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 15; Math. Annalen Bd. 3, S. 45.

**) Des Verfassers Flächen 3ter Ordnung Nr. 35.

punkten der Geraden mit der cubischen Fläche selbst und mit deren Kernfläche).

Die Berührungspunkte der den $V^2$ einhüllenden Doppelebenen bilden eine Curve 5ter Ordnung $V^5$ 2ter Species (d. h. mit 4 scheinbaren Doppelpunkten), welche durch $V$ geht und $D^4$ in den 8 Cuspidalpunkten trifft.

Sechs Paare zusammengehöriger Curven $K$ und $K^3$ berühren sich, so dass ihre Ebene eine stationäre Ebene der Fläche $\Sigma_{48}$ ist. Der zweite Kegel aus $V$ ausser $V^2$ an $F_4^5$ ist 6ter Ordnung und 16ter Classe, und berührt längs einer durch $V$ gehenden Curve 7ter Ordnung; beide Kegel haben 6 Ebenen gemein, die längs derselben Kante beide berühren, ferner die Tangentenebene in $V$, die 7 Geradenpaarebenen und 12 Ebenen, in denen die Curve $K^3$ einen Doppelpunkt hat; so dass wir also unter den Ebenen des $V^2$ $7 + 12 = 19$ dreifache Berührungsebenen haben. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte $K$ bilden eine Curve 6ter Ordnung, wesshalb es unter diesen Kegelschnitten 6 Parabeln giebt.

**34.** Die Fläche enthält noch 64 einzelne Kegelschnitte $S$, die sich dreimal auf $D^4$ stützen; jeder wird von 7 Geraden (aus jedem Paare einer) getroffen; auf je 5 (windschiefe) Gerade 1 2 3 4 5 stützen sich 2 Kegelschnitte $S$ (in Folge eines Satzes des Herrn Lüroth*), von denen der eine 6, 7, der andere deren Genossinnen 6', 7' trifft; von den beiden $S$, welche sich auf die Genossinnen jener ersten 1', 2', 3', 4', 5' stützen, trifft der eine 6, 7', der andere 6', 7. Jeder Kegelschnitt $S$ wird durch eine $S^3$ ergänzt, welche sich auf die 7 andern Geraden stützt, im vierten Punkte der $D^4$ einen Doppelpunkt hat und deren drei nicht auf $D^4$ gelegene Begegnungspunkte mit $S$ Berührungspunkten der Ebene sind, so dass wir 64 neue dreifache Ebenen haben.

Die Fläche der Doppelebenen besteht aus den 14 Büscheln, dem Kegel $V^2$ und einer Fläche $\Psi$ 96ter Classe.

Die 251 dreifachen Berührungsebenen der Fläche vertheilen sich also auf diese 3 Bestandtheile folgendermassen:

1. Die $12 . 14 = 168$ Ebenen, deren Schnitt aus einer Geraden und einer Curve 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten besteht, von denen einer nicht auf $D^4$ liegt, gehören je zu einem Büschel und zweifach zu $\Psi$.

2. Die 7 Geradenpaarebenen, welche ausserdem eine Curve 3ter Ordnung enthalten, gehören zu 2 Büscheln und zu $V^2$.

3. Die 12 Ebenen ($K$, $K^3$), deren $K^3$ einen Doppelpunkt hat, gehören einfach zu $V^2$ und zweifach zu $\Psi$.

4. Die 64 Ebenen ($S$, $S^3$) gehören dreifach zu $\Psi$.

Andere dreifache Ebenen giebt es nicht.

---

*) Math. Annalen Bd. 3, S. 124.

Auf je $n \overline{\lessgtr} 6$ windschiefe Geraden der Fläche stützen sich $2^{6-n}$ Kegelschnitte $S$ und ebenso viele Curven $S^3$.

Auf zwei Kegelschnitte $S$ mit $\alpha$ (= 0, 1, 2) Begegnungspunkten stützen sich zugleich $5 - 2\alpha$ Gerade; ebenso viele auf die beiden Ergänzungscurven, welche $1 + \alpha$ Begegnungspunkte haben, und auf einen Kegelschnitt und die Ergänzungscurve des andern, die sich in $2 - \alpha$ Punkten treffen, stützen sich $2 + 2\alpha$ Gerade.

Jeder Kegelschnitt $S$ wird gar nicht von 21 andern (von denen jeder 10 der übrigen in einem und die andern 10 in einem Punkte trifft), in zwei Punkten von 7 (die sich alle nicht treffen) und von 35 in einem Punkte getroffen.

Folgende Tabelle zeigt, von wie vielen Kegelschnitten ein Dupel mit $\alpha$ Begegnungspunkten in $\beta + \gamma$ Punkten getroffen wird:

| $\beta + \gamma$ : | $0+0$, | $0+1$, | $0+2$, | $1+1$, | $1+2$, | $2+2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 0$ : | 10 | 20 | 0 | 20 | 10 | 2 |
| $\alpha = 1$ : | 6 | 24 | 6 | 18 | 8 | 0 |
| $\alpha = 2$ : | 0 | 30 | 12 | 20 | 0 | 0. |

Die Zahl der Dupel mit 0, 1, 2 Begegnungspunkten ist resp. 672, 1120, 224, die Zahl der Tripel (000), (001), (002), (011), (012), (022), (122), (122) und (222) ist resp. 2240, 6720, 0, 13440, 6720, 1344, 4480, 0, 0.

**35.** Mit Hilfe von Flächen 3ter Ordnung, welche durch $D^4$ gelegt sind, (Flächen 2ten Grades durch $D^4$ führen nur zu den Kegelschnitten $K$) habe ich folgende Curvenarten ermittelt:

1. Eine vierfach unendliche Schaar Curven 5ter Ordnung 2ter Species, $R^5$ (12. Ranges), deren jede der $D^4$ 8mal begegnet und mit ihr die Grundcurve eines cubischen Büschels bildet, das zur Erzeugung der Fläche mit dem Büschel 2ter Ordnung durch $D^4$ verwandt werden kann: die Durchschnittscurven entsprechender Flächen sind die $K$. $R^5$ trifft jeden $K$ zweimal, jede $G$ einmal, jeden $S$ zweimal; jede $R^5$ ist mit einer gewissen andern auf derselben $F^2$ gelegen: beide begegnen sich achtmal auf $D^4$ und in 5 Punkten ausserdem, in denen die $F^2$ tangirt: alle diese $F^2$ sind dem Kegel $V^2$ eingeschrieben. Die Berührungscurve $V^5$ befindet sich unter den $R^5$ und ist sich selbst associirt.

2. 14 doppelt unendliche Schaaren Raumcurven 4ter Ordnung 1ter Species $R^4$: jede (und mit ihr alle Schaargenossen) trifft eine Gerade $G$ zweimal, die übrigen einmal, alle $K$ zweimal, die $D^4$ sechsmal, je 32 Kegelschnitte $S$ zweimal oder einmal;

3. 84 einzelne Raumcurven 3ter Ordnung $R^3$, von welchen jede die $D^4$ viermal, alle $K$ zweimal, 2 Geraden $G$ zweimal, die übrigen einmal, 16 Kegelschnitte $S$ gar nicht, 32 einmal, 16 zweimal trifft;

4. 64 dreifach unendliche Schaaren Raumcurven 5ter Ordnung 4ter Species $Q^5$ (8. Ranges, also mit einer vierfachen Secante), deren

jede die $D^4$ in 9 Punkten einen $S$ viermal, je 7 Gerade (die diesem $S$ zugehören) gar nicht, die übrigen einmal, alle $K$ einmal trifft;

5. 64 Netze von Raumcurven 4ter Ordnung 2ter Species $Q^4$, von denen jede $D^4$ in 7 Punkten trifft, 7 Kegelschnitten $S$ dreimal begegnet und 7 Geraden begegnet (von denen jede einen der 7 Kegelschnitte $S$ trifft, und welche sich alle 7 auf einen und denselben $S$ stützen, den einzigen von $Q^4$ gar nicht getroffenen).

6. 64 Büschel Raumcurven 3ter Ordnung $Q^3$, deren jede $D^4$ in 5 Punkten trifft, einem $S$ dreimal begegnet und dessen 7 Geraden nicht trifft, wohl aber die andern;

7. 84 dreifach unendliche Schaaren von Curven 5ter Ordnung 3ter Species (10. Ranges) $S^5$, von welchen jede der $D^4$ in 8 Punkten begegnet, alle $K$ zweimal, 2 Gerade zweimal, ihre Genossinnen gar nicht, die übrigen 10 einmal trifft und 16, 32, 16 Kegelschnitte $S$ resp. in 1, 2, 3 Punkten schneidet.

8. 280 Büschel von Raumcurven 4ter Ordnung 2ter Species $S^4$, deren jede $D^4$ in 6 Punkten trifft, drei Gerade zweimal, ihre Genossinnen nicht, die 8 übrigen einmal und je 8, 24, 24, 8 Kegelschnitte $S$ in 0, 1, 2, 3 Punkten schneidet.

Auf detaillirte Mittheilungen über die Zahl der gegenseitigen Schnittpunkte dieser Curven, von denen auch mehrere auf verschiedene Arten erzeugt werden können, z. B. $Q^3$ auf drei, $Q^4$ auf zwei Arten, können wir uns hier, wie oben gesagt, nicht einlassen.

**36.** *Die Fläche* 5ter *Ordnung* $F_5^5$ *mit einer Doppelcurve* 5ter *Ordnung* $D^5$, *die einen dreifachen Punkt a hat**), der dann auch ein dreifacher Punkt der Fläche ist, besitzt 10 einfache Geraden, welche alle die $D^5$ zweimal treffen. Jede wird von 3 andern unter einander windschiefen Geraden geschnitten; auf je 2 windschiefe Geraden stützt sich eine Gerade. Diese 10 Geraden bilden 30 Dupel und 30 Tripel; welche letzteren zweierlei Art sind: 10 haben je eine Gerade, welche sämmtliche 3 Geraden des Tripels trifft; die 20 andern bilden 10 Doppeldreien: jede Gerade einer Doppeldrei trifft zwei Geraden des Tripels derselben, zu dem sie nicht gehört, hingegen je die dritte, ihre Gegengerade, nicht; ein Tripel der ersteren Art liefert kein Quadrupel, wohl aber die der zweiten: jedes solche Tripel hat eine windschiefe und zwar zwei Tripel einer Doppeldrei dieselbe; es giebt 5 Quadrupel:

0, 1, 2, 3; 0, 4, 5, 6; 1, 4, 8, 9; 2, 5, 7, 9; 3, 6, 7, 8.

*) Auf dieselbe wurde ich brieflich von Herrn Clebsch aufmerksam gemacht, wie er auch schon in einer Note Math. Ann. Bd. 3, S. 75 auf sie hingewiesen hat; eine eingehende Bearbeitung scheint sie noch nicht gefunden zu haben.

Die gemeinschaftliche Gerade zweier Quadrupel ist die gemeinsame Windschiefe der beiden übrig bleibenden Tripel, welche eine Doppeldrei bilden; die 3 Schneidenden dieser Geraden (die also ausserhalb beider Quadrupel sind) treffen je 2 Gegengerade dieser Doppeldrei. Alle 6 ausserhalb eines Quadrupels stehenden Geraden treffen dasselbe zweimal und bilden 3 Paare.

**37.** Sämmtliche Doppeltangentenebenen der Fläche $F_5^5$, die nicht durch eine Gerade derselben gehen, umhüllen eine Developpable 15ter Classe; ihre Schnittcurven zerfallen in einen Kegelschnitt $K$ und eine Curve $K^3$, die sich viermal auf $D^5$ begegnen, während $K^3$ im fünften Punkte der $D^5$ einen Doppelpunkt hat. Auf jeden Kegelschnitt $K$ stützen sich 4 Gerade eines Quadrupels, auf jede Curve $K^3$ die 6 übrigen Geraden, deren 3 Paare zu den verbundenen Kegelschnitten gehören. 2 Kegelschnitte mit $\alpha$ Begegnungspunkten werden zugleich von $4 - 3\alpha$ Geraden getroffen; ihre ergänzenden Curven, welche $1 + \alpha$ Begegnungspunkte haben, von $6 + 3\alpha$ und ein Kegelschnitt und die Erzeugungscurve des andern von $3\alpha$ Geraden.

Kegelschnitte mit 2 Begegnungspunkten giebt es also nicht; und alle 4 Geraden, die einen Kegelschnitt treffen, treffen auch alle, die jenem nicht begegnen. Die Kegelschnitte $K$ bilden also 5 Schaaren, jede einem Quadrupel zugehörig; die Curven $K^3$ ebenfalls 5 Schaaren, jede den 3 Paaren zugehörig, die ausserhalb des Quadrupels stehen und zu dessen Kegelschnittschaar gehören. Zwei Kegelschnitte derselben Schaar treffen sich nicht, zwei aber aus verschiedenen Schaaren einmal (ausserhalb $D^5$). Die Fläche 15ter Classe zerfällt also in 5 Developpablen 3ter Classe $\Phi_3$. Durch jeden Punkt der Fläche geht aus jeder Schaar ein Kegelschnitt, aber zwei Curven $K^3$. Durch jeden Punkt $d$ von $D^5$ gehen 2 Kegelschnitte $K$ und 3 Curven $K^3$, von denen zwei die beiden Kegelschnitte ergänzen, die dritte in $d$ ihren Doppelpunkt hat; durch den dreifachen Punkt $a$ gehen 3 Kegelschnitte und 3 Curven $K^3$, die alle ihre Doppelpunkte in $a$ haben, und zu den 3 Kegelschnitten so als Ergänzungscurven gehören, dass die 3 Aeste beider Curven auf die 3 Mäntel vertheilt sind. Viermal zerfällt in jeder Schaar $K^3$ in eine Gerade und einen Kegelschnitt, der nicht zur verbundenen Schaar gehört. Die Gerade ist die gemeinschaftliche der beiden Quadrupel der Schaar dieses Kegelschnitts und der verbundenen Schaar. Durch jede der 10 Geraden gehen 2 solche Ebenen zweier Kegelschnitte (m. s. Nr. 6.), welche 4 Kegelschnitte zu je zweien in derselben Schaar liegen.

Das volle System der Doppelebenen besteht aus den 10 Büscheln um die Geraden und den 5 Flächen $\Phi_3$. Dreifache Tangentenebenen hat die Fläche $F_5^5$ 35, nämlich die 15 Geradenpaarebenen, welche je zu 2 Büscheln und einer Fläche $\Phi_3$, und die 20 Kegelschnittschaar-

ebenen, welche zu einem Büschel und zwei Flächen $\Phi_3$ gehören. Jede der 10 Geraden berührt zwei Flächen $\Phi_3$ doppelt und die drei übrigen einfach.

Die Mittelpunkte der Kegelschnitte $K$ einer Schaar bilden eine Curve 4ter Ordnung $M^4$, folglich giebt es in jeder Schaar 4 Parabeln.

Die Curve der Berührungspunkte der Ebenen jeder der 5 Developpablen $\Phi_3$ mit $F_5{}^5$ ist 7ter Ordnung; sie wird von jeder dieser Ebenen in deren beiden Berührungspunkten tangirt und in 3 andern Punkten geschnitten. Die letztern liegen auf der Curve $K^3$ der Ebene und in ihnen berühren sich diese $K^3$ und der Kegelschnitt, in welchem die Ebene die Developpable $\Phi_3$ (welche 4ter Ordnung ist) durchschneidet ausser in der (die beiden Berührungspunkte verbindenden) Berührungsgeneratrix. Die Schnittpunkte dieser Generatricen mit $F_5{}^5$ erzeugen eine Curve 6ter Ordnung. Die 14 Punkte, in denen die oben erwähnte Berührungscurve 7ter Ordnung einer der 5 Flächen $\Phi_3$ der Doppelcurve $D^5$ begegnet, sind die 8 Cuspidalpunkte von $D^5$ und 6 andere Punkte. Die Ebenen der Fläche $\Phi_3$, deren einer Berührungspunkt mit $F_5{}^5$ ein Cuspidalpunkt ist, gehen nicht durch die Tangente von $D^5$, sondern gehören zu dem Büschel Tangentenebenen, das zur Axe die (einzige) vierpunktig berührende Gerade des Cuspidalpunktes hat (Nr. 15.); $K$ und $K^3$ berühren sich und diese Gerade im Cuspidalpunkte. In den 6 andern Punkten ist aber die Ebene von $\Phi_3$ eine der beiden Tangentenebenen des Punktes von $D^5$; $K$ und $K^3$ gehen zusammen dreimal durch denselben, also letztere zweimal. Der Kegelschnitt und der eine Ast von $K^3$ gehören beide zu dem von der Ebene berührten Mantel, der andere Ast von $K^3$, welcher die Tangente von $D^5$ berührt, zum andern. Beide Curven treffen sich noch in drei Punkten von $D^5$ und im zweiten Berührungspunkte.

**38.** Vermittelst der Flächen 3ter Ordnung durch $D^5$ — welche nothwendig in $a$ einen conischen Doppelpunkt haben, zu dem ein zweiter tritt, wenn die Fläche durch eine der Curven $K^3$ gelegt wird — erhalten wir folgende Curven:

1. eine fünffach unendliche Schaar von Curven 5ter Ordnung 3ter Species*) (10. Ranges) $R^5$, welche $D^5$ in 10 Punkten, allen Geraden einmal, allen Kegelschnitten $K$ zweimal begegnen; je zwei begegnen sich in 5 Punkten.

2. 10 dreifach unendliche Schaaren von Curven 4ter Ordnung 2ter Species $R^4$, welche $D^5$ in 8 Punkten, einer Geraden zweimal, deren

*) Curve 5ter Ordnung erster Species ist unsere Curve $D^5$, sie ist nicht ohne den dreifachen Punkt möglich, hat aber die geringste Anzahl scheinbarer Doppelpunkte, die bei einer Curve 5ter Ordnung möglich ist.

Schneidenden gar nicht, den übrigen einmal begegnen, die Kegelschnitte der beiden Schaaren, zu deren Quadrupel die erste Gerade gehört, einmal, die der drei andern Schaaren zweimal trifft.

3) 5 doppelt unendliche Schaaren von Raumcurven $3^{\text{ter}}$ Ordnung $R^3$, welche $D^5$ sechsmal begegnen, die Kegelschnitte einer Schaar zweimal, die der 4 andern einmal, die Geraden, welche jener Schaar zugehören, gar nicht, die übrigen einmal treffen; zu diesen Curven $R^3$ gehören auch die ebenen Curven $K^3$, bei denen zwei der 6 Punkte auf $D^5$ sich in einen Doppelpunkt vereinigt haben.

$D^5$ setzt mit einer $R^3$ und der aus $a$ an diese Curve gehenden (zweifachen) Secante die Grundcurve eines cubischen Büschels zusammen; es lassen sich leicht mit Hilfe von zwei Curven $R^3$ derselben Schaar (die sich einmal begegnen) zwei projectivische Flächenbüschel herstellen, deren Erzeugniss die Fläche $F_5^5$ (und eine durch $a$ gehende Ebene) ist.

Auch für diese Curven ist die Zahl der gegenseitigen Schnittpunkte ermittelt.

**39.** *Die Fläche* $5^{\text{ter}}$ *Ordnung* $\mathfrak{F}_3^5$ *mit einer dreifachen Geraden* $D_3$ enthält 11 Geradenpaare, die zu den Kegelschnitten in den Ebenen durch $D_3$ gehören. Ausser diesen Kegelschnitten besitzt sie im Allgemeinen keine, auch nicht Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung. Sie enthält 220 Netze von Curven $5^{\text{ter}}$ Ordnung und $2^{\text{ter}}$ Species (12. Ranges), welche der $D_3$ dreimal, zwei einfachen Geraden zweimal, deren Genossinnen gar nicht, den übrigen je einmal begegnen; ferner 1320 einzelne Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung und $1^{\text{ter}}$ Species, welche die $D_3$ und 3 einfache Geraden zweimal, deren Genossinnen gar nicht, die übrigen einmal treffen. Je 4 Curven letzterer Art, denen die 4 Tripel eines Quadrupels als Tripel der zweimal getroffenen Geraden zugehören, haben einen Punkt gemein. Die Fläche kann stets durch ein cubisches Flächenbüschel, zu dessen Grundcurve $D_3$ gehört, und eine ihm projectivische Ebeneninvolution, deren Axe diese $D_3$ ist, erzeugt werden.

**40.** Zu der dreifachen Geraden können auf dieser Fläche noch eine oder zwei gegen einander windschiefe doppelte Geraden, die beide der $D_3$ begegnen, treten, ohne unendlich viele Geraden auf der Fläche zu veranlassen. Bezeichne $\delta$ $(= 1, 2)$ die Zahl dieser Doppelgeraden, so vereinigt jede derselben 4 Geradenpaare der Fläche, wie wiederum mit Hilfe geradliniger Flächen leicht zu erkennen ist, so dass nur noch $11 - 4\delta$ Paare von einfachen Geraden bleiben. Cuspidalpunkte sind die Punkte, in denen die dreifache Gerade von den $\delta$ doppelten getroffen wird; ausserdem enthält jene $8 - 2\delta$ Cuspidalpunkte und jede dieser 3. Der Rang $r$ ist $14 - 2\delta$, die Classe $m$ ist $28 - 6\delta$; die Zahl der Wendetangenten aus einem beliebigen Punkte $30 - 6\delta$, die der Doppeltangenten $32 + 2\delta^2 - 15\delta$; endlich die Developpablen

der stationären und der doppelten Berührungsebenen haben die Classen $72 - 18\delta$ und $263 + 18\delta^2 - 137\delta$.

Die interessantere der beiden Flächen ist die mit zwei Doppelgeraden $D'$, $D''$, auf welche auch Herr Cremona*) in seiner neuesten Abhandlung die Aufmerksamkeit lenkt. Sie kann auch als Fläche $F_2^5$, bei der zu den beiden windschiefen Geraden noch eine beide treffende dreifache Gerade getreten ist, angesehen werden. Von den 13 Geraden der $F_2^5$ haben sich 9 in die dreifache Gerade vereinigt: die Fläche hat also 6 Geraden $G$, welche die $D_3$ treffen und 3 Paare bilden, und 4 unter einander windschiefe Geraden $L$, welche die $D'$, $D''$ treffen. Jede der $L$ trifft 3 windschiefe $G$ und jede der $G$ wird von zwei $L$ getroffen, was, wenn $11'$, $22'$, $33'$ die 3 Paare der $G$ und I, II, III, IV die 4 Geraden $L$ sind, durch folgende Tabelle veranschaulicht wird: I : 1, 2, 3; II : 1, 2', 3'; III : 1', 2, 3'; IV : 1', 2', 3. Es giebt ausser der Schaar in den Ebenen durch $D_3$ 4 Schaaren von Kegelschnitten auf dieser Fläche, welche sich auf alle 3 vielfachen Geraden, auf je eine Gerade $L$ und die drei sie treffenden Geraden $G$ stützen. Je zwei Kegelschnitte aus derselben Schaar begegnen sich nicht und haben alle 4 einfachen Geraden gemeinsam, je zwei aus verschiedenen Schaaren begegnen sich einmal und stützen sich nur auf eine Gerade $G$ zugleich. Kegelschnitte mit zwei Begegnungspunkten giebt es nicht; auf 2 Kegelschnitte mit $\alpha$ Begegnungspunkten stützen sich nämlich $3 - 2\alpha$ Gerade $G$ und $1 - \alpha$ Gerade $L$. Die Kegelschnitte werden durch Curven 3ter Ordnung ergänzt, welche auf $D_3$ einen Doppelpunkt haben; die gemeinsame Ebene berührt die Fläche doppelt und die von den Ebenen jeder Schaar eingehüllte Developpable ist 12ter Classe. Diese 4 Developpablen und die Büschel um die 13 vielfachen und einfachen Geraden bilden die Developpable 61ter Classe der Doppeltangentenebenen; auch die Ebenen durch die doppelten Geraden sind hier nur Doppelebenen, nicht wie bei $F_2^5$ dreifache.

**41.** Auch zu $F_2^5$ und $F_3^5$ lässt sich noch je eine Doppelgerade hinzufügen, ohne dass die Fläche geradlinig wird, sobald nur diese neue Gerade $D_1$ die bisherige Doppelcurve $D'D''$ resp. $D^3$ zweimal trifft (weil dann von keinem Punkte der $D_1$ noch eine zweite auch noch $D'D''$ resp. $D^3$ doppelt treffende Gerade möglich ist). Die Fläche $F_2^5$ geht durch diese Hinzufügung von $D_1$ in eine Fläche $F_3^5$ über; von den 13 Geraden, welche $D'$ und $D''$ treffen, haben 4 sich in $D_1$ concentrirt, so dass 9 bleiben, zu denen dann, um die 11 bei $F_3^5$ nothwendigen zu vervollständigen, die beiden Geraden in den Ebenen $(D_1, D')$ und $(D_1, D'')$ treten. Jede der Geraden $D'D''$ hat in dem

*) Sulle trasformazioni razionali nello spazio. Rendiconti dell' Istituto Lombardo. vol. IV. fasc. IX (4. Mai 1871).

Schnittpunkte mit $D_1$ zwei von ihren 6 Cuspidalpunkten; zu den 8 eigentlichen, welche sie behalten haben, bringt $D_1$ zwei neue hinzu, um die 10 der $D^3$ vollzählig zu machen; im Ganzen müsste es auf $D_1$ auch 6 geben, aber 4 haben sich in den beiden Punkten $(D_1 D')$ und $(D_1 D'')$ vereinigt.

Die Fläche $F_3{}^5$ verwandelt sich durch die Hinzufügung von $D_1$ in eine $F_4{}^5$; von den 11 Geraden, welche $D^3$ zweimal treffen, vereinigt $D_1$ 6, so dass nur 7 einfache bleiben. Es giebt aber auch 7 Geraden, welche $D_1$ und $D^3$ je einmal treffen, was mit Hilfe geradliniger Flächen wiederum leicht ermittelt werden kann; je eine dieser 7 trifft eine jener, und wir erhalten die 7 Paare der $F_4{}^5$. Die Curve $D^3$ verliert 4 Cuspidalpunkte und hat also nur noch 6, zu denen 2 auf $D_1$ hinzukommen.

Bromberg, den 1. Juni 1871.

# Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen $5^{ten}$ Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Der vorliegende Aufsatz hat vorzugsweise die verschiedenen Formen zum Gegenstande, welche einer Gleichung $5^{ten}$ Grades durch eine höhere Transformation gegeben werden können. Es wird zunächst gezeigt, wie man jede höhere Transformation einer binären Form geometrisch interpretiren kann (§ 1.); wie insbesondere für die Gleichungen $5^{ten}$ Grades noch das Studium der quadratischen Transformation ausreicht, welche auf die Untersuchung eines ebenen Fünfseits zurückführt (§ 3.). Diese Untersuchung knüpft insbesondere an gewisse mit dem Fünfseit verbundene Curven an, deren Gleichungen durch das Verschwinden von zugehörigen Formen sich ausdrücken, und welche eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften und Zusammenhänge zeigen (§§ 6—13.). Insbesondere steht in genauem Zusammenhange mit der bei der Lösung der Gleichung $5^{ten}$ Grades so wichtigen Jerrard'schen Form eine gewisse Curve $30^{ter}$ Classe, welche sich als Raumcurve $6^{ter}$ Ordnung, als der vollständige Durchschnitt einer Fläche $3^{ter}$ Ordnung mit einer Fläche $2^{ter}$ Ordnung abbildet. Aber diese Fläche $3^{ter}$ Ordnung selbst hat bemerkenswerthe Eigenschaften (§ 16.); ihre 27 Geraden werden mit Hilfe einer Gleichung $5^{ten}$ Grades gefunden; unter den 36 Paaren von Abbildungen aber, welche sie auf der Ebene zulässt, ist eins sogar rational, und zwei Abbildungen der Fläche werden also durch eine quadratische Gleichung gefunden. Die Fundamentalpunkte einer solchen Abbildung bilden dann ein in seiner Art nur auf eine Weise mögliches System von 6 Punkten, welche auf 10 verschiedene Arten zu einem Brianchon'schen Sechseck geordnet werden können (§ 17.), und man kann mittelst algebraisch lösbarer Gleichungen unendlich viele Punkte der Ebene finden, von welchen nach den Ecken des Sechsecks Strahlen gehen, welche durch die Modulargleichung für die Transformation $5^{ter}$ Ordnung der elliptischen Functionen verbunden sind (§ 19.).

So erhält man als eine erste Anwendung der im Eingange der Abhandlung entwickelten allgemeinen Principien eine vollständige geometrische Uebersicht über die Zusammenhänge, welche zwischen den Gleichungen $5^{\text{ten}}$ Grades und ihren Resolventen bestehen, insbesondere über den Zusammenhang mit der Jerrard'schen Form und der Modulargleichung. Dabei ergiebt sich zugleich eine Reihe bemerkenswerther rein geometrischer Resultate, welche geeignet scheinen, die Fruchtbarbeit der entwickelten Anschauungen und Methoden darzuthun.

## § 1.

## Geometrische Interpretation für höhere Transformationen binärer Formen.

Bezeichnen wir durch $f(\lambda) = 0$ eine gegebene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades. Die allgemeinste eindeutige algebraische Transformation derselben erhalten wir, indem wir eine neue Unbekannte $\xi$ einführen, welche mit $\lambda$ durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \xi = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$$

verbunden ist; wobei denn $\varphi$ und $\psi$ ganze Functionen von $\lambda$ bedeuten*). Denkt man sich $f(\lambda)$ durch die Substitution $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ und Multiplication mit $x_2{}^n$ in eine binäre Form $f(x_1, x_2)$ verwandelt, so kann $f(\lambda) = 0$ durch $f(x_1, x_2) = 0$ ersetzt werden; zugleich geht dann $\xi$ in den Quotienten zweier homogener Functionen von gleich hoher Ordnung über. Daher wird man von vorn herein darauf geführt, die Functionen $\varphi$, $\psi$ sich im Allgemeinen als von gleicher Ordnung zu denken, wie im Folgenden geschehen soll.

Denken wir uns $f(\lambda)$ in seine Factoren zerlegt:

$$f(\lambda) = k\,.\,(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\ldots\,(\lambda - \lambda_n),$$

so sind die entsprechenden Factoren der transformirten Gleichung:

$$\varphi(\lambda_1) - \xi\psi(\lambda_1), \quad \varphi(\lambda_2) - \xi\psi(\lambda_2), \ldots,$$

und man kann bis auf eine Potenz von $k$ das Produkt dieser Factoren als die linke Seite der transformirten Gleichung betrachten.

Aber an diese Darstellung knüpft sich eine geometrische Interpretation, namentlich mit Rücksicht auf die Substitutionen $2^{\text{ter}}$ und $3^{\text{ter}}$ Ordnung.

*) Ueber Transformationen dieser Art vgl. Gordan in Borchardt's Journal, Bd. 71, p. 164 und die Abhandlung des Verf. im 15. Bande der Schriften der Kgl. Ges. zu Göttingen, p. 65.

Seien $\varphi$, $\psi$ quadratische Functionen; bezeichnen wir sie durch:

$$\varphi(\lambda) = y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3$$
$$\psi(\lambda) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 .$$

Die Factoren der transformirten Gleichung werden dann:

$$(y_1 - \xi x_1) + \lambda_i (y_2 - \xi x_2) + \lambda_i^2 (y_3 - \xi x_3) .$$

Interpretiren wir also $y$ und $x$ als irgend zwei in einer Ebene gewählte Punkte, so können wir die Werthe der $\xi$, welche der transformirten Gleichung entsprechen, durch die Werthe darstellen, welche der Parameter der Geraden:

(2) $$z_k = y_k - \xi x_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

in den Schnittpunkten derselben mit den in der Ebene gegebenen Geraden:

(3) $$z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

annimmt.

Wir erhalten hierdurch eine deutlichere Einsicht in das Wesen der quadratischen Substitution. Die Geraden (3) sind Tangenten des Kegelschnitts:

$$z_2^2 - 4 z_1 z_3 = 0 ;$$

durch die gegebene Gleichung $f(\lambda) = 0$ ist also eine Anzahl von Tangenten eines Kegelschnitts festgelegt, deren projectivische Beziehungen zu einander durch die Parameter $\lambda$ gegeben sind; die transformirte Gleichung aber entsteht durch den Durchschnitt einer beliebig gewählten Geraden mit dieser Gruppe von Tangenten. Und so kann man den Satz aussprechen:

*Die Gesammtheit aller Gleichungen, in welche eine gegebene durch eine quadratische Substitution übergeht, entspricht den Schnittpunktsystemen der Geraden einer Ebene mit den Seiten eines gewissen Vielseits, dessen Seiten einen Kegelschnitt berühren.*

Der von Herrn Gordan gegebene Satz, dass die Invarianten der transformirten Gleichung nur von den Coefficienten der Functionaldeterminante von $\varphi$ und $\psi$ abhängen, tritt hierbei unmittelbar geometrisch in Evidenz. Denn die Coefficienten jener Functionaldeterminante werden hier die Grössen:

$$u_1 = x_2 y_3 - y_3 x_2$$
$$u_2 = x_3 y_1 - y_1 x_3$$
$$u_3 = x_1 y_2 - y_2 x_1 ,$$

welche die Coordinaten der Geraden $x$, $y$ sind. Bezeichnet man aber durch $A = 0$, $B = 0 \ldots$ die Seiten des $n$-Seits, so kann man das transformirte Problem so ausdrücken:

*Das Vielseit $A . B \ldots = 0$ soll mit der Geraden*

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$$

*geschnitten werden;*

wobei denn in der That schon im Ausdrucke des Problems die $u$ allein, die $x$, $y$ einzeln aber gar nicht mehr auftreten.

*Die verschiedenen Arten aber, auf welche man die Punkte $x$, $y$ noch auf $u$ wählen kann, entsprechen den verschiedenen linearen Transformationen, welche die transformirte Gleichung noch zulässt.* Denn die Gerade $u$ ändert sich nicht, wenn man $x$, $y$ durch:

$$x_i' = \alpha x_i + \beta y_i$$
$$y_i' = \gamma x_i + \delta y_i,$$

d. h. die 2 Punkte $x$, $y$ durch irgend 2 andere Punkte ihrer Verbindungslinie ersetzt. Hierdurch aber geht der Ausdruck:

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3}$$

in

$$\xi' = \frac{\alpha + \beta \xi}{\gamma + \delta \xi}$$

über, d. h. die transformirte Gleichung wird linear transformirt.

Es ist von grosser Wichtigkeit, dass hierdurch die in der *höhern* Transformation liegenden *eigenthümlichen* Elemente gesondert erscheinen von dem Einfluss, welchen eine nachträgliche *lineare* noch ausüben kann; und diese Eigenschaft giebt der vorliegenden Transformation und ihrer geometrischen Deutung vorzugsweise ihren Werth.

Wenn die Punkte $x$, $y$ auf einer Tangente des Kegelschnitts liegen, deren Parameter etwa $\varrho$ sein mag, so müssen zugleich die Gleichungen bestehen:

$$x_1 + \varrho x_2 + \varrho^2 x_3 = 0$$
$$y_1 + \varrho y_2 + \varrho^2 y_3 = 0.$$

In der quadratischen Substitution (1) verschwindet also Zähler und Nenner für $\lambda = \varrho$, und indem man durch $\lambda - \varrho$ dividirt, geht daher die Substitution in eine lineare über. So sieht man, *dass die linearen Substitutionen der ursprünglichen Gleichung durch die Tangenten des Kegelschnitts repräsentirt werden.* Geometrisch ist dies durch den Satz ausgedrückt, dass eine bewegliche Tangente eines Kegelschnitts von festen Tangenten nach bestimmten Doppelverhältnissen geschnitten wird, so dass hierbei, den linearen Substitutionen entsprechend, die absoluten Invarianten ungeändert bleiben.

Wollen wir in gleicher Weise eine Substitution *dritter* Ordnung geometrisch interpretiren, so setzen wir:

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3 + \lambda^3 y_4}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 + \lambda^3 x_4},$$

und interpretiren $x$, $y$ als Punkte des Raums. Die Factoren der transformirten Gleichung entsprechen dann den Durchschnitten der Geraden:

$$z_\varkappa = y_\varkappa - \xi x_\varkappa$$

mit den Ebenen:

$$z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 + \lambda_i^3 z_4 = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Diese Ebenen, deren Lage nur von der gegebenen Gleichung abhängt, sind $n$ Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche:

$$(z_2 z_3 - 9 z_1 z_4)^2 - 4(3 z_2 z_4 - z_3^2)(3 z_1 z_3 - z_2^2) = 0;$$

welche von den Tangenten der Raumcurve 3ter Ordnung:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = -\lambda^3 : 3\lambda^2 : -3\lambda : 1$$

gebildet wird, und welche hier dieselbe Stellung einnimmt, wie im Vorigen der Kegelschnitt.

*Die Gesammtheit von Gleichungen, welche aus einer gegebenen durch eine cubische Transformation hervorgeht, wird also repräsentirt durch die Schnittpunktsysteme der Geraden des Raumes mit gewissen Schmiegungsebenen einer Raumcurve 3ter Ordnung.*

Dass auch hier die Invarianten der transformirten Gleichung nur von den Combinationen $x_i y_\varkappa - y_i x_\varkappa$ abhängen, entspricht dem Umstande, dass diese Grössen die Coordinaten der beliebig gewählten Geraden des Raumes sind, und dass in der That die Invariantenbeziehungen des auf der Geraden liegenden Schnittpunktsystems nur von der Lage der Geraden selbst abhängen, nicht von der Lage der auf ihr gewählten Punkte $x$, $y$. Die Aenderung der letztern auf der Geraden würde nur einer linearen Umformung der transformirten Gleichung entsprechen, und also die absoluten Invarianten nicht ändern.

Die vorliegende cubische Substitution geht in eine quadratische über, wenn ein Parameter $\varrho$ existirt, für welchen zugleich die Gleichungen bestehen:

$$x_1 + \varrho x_2 + \varrho^2 x_3 + \varrho^3 x_4 = 0$$
$$y_1 + \varrho y_2 + \varrho^2 y_3 + \varrho^3 y_4 = 0;$$

wenn also $x$ und $y$ Punkte auf einer Tangentenebene der abwickelbaren Fläche sind. Und die Substitution verwandelt sich in eine lineare, wenn zwei solcher Werthe $\varrho$ existiren, wenn also $x$ und $y$ gleichzeitig zwei verschiedenen Tangentenebenen der Fläche (Schmiegungsebenen der Raumcurve) angehören. So können wir sagen:

*Innerhalb der obigen Interpretation der cubischen Substitutionen entsprechen den quadratischen alle Schnittpunktsysteme auf Tangenten der abwickelbaren Flächen, den linearen aber die Schnittpunktsysteme auf den Durchschnittslinien zweier Tangentenebenen.*

Der letzte Umstand entspricht dem Satze, dass die Durchschnitte von Schmiegungsebenen einer Raumcurve 3ter Ordnung von gegebenen

Schmiegungsebenen derselben nach festen Doppelverhältnissen geschnitten werden.

Es ist klar, wie man in dieser Weise fortschreitend höhere Substitutionen interpretiren kann, indem man Räume von mehr Dimensionen zu Hilfe nimmt.

§ 2.

## Begränzung der zu betrachtenden Substitutionen bei gegebenen Geraden der Gleichung.

Die Substitution $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung, d. h. die Substitution:

$$\xi = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

für welche $\varphi$ und $\psi$ ganze Functionen $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung sind, enthält die Verhältnisse von $2\varkappa + 2$ Coefficienten. Man kann also vermöge derselben bei gegebenen Werthen der $\lambda$ noch $2\varkappa + 1$ Werthe der $\xi$ beliebig wählen, und somit $2\varkappa + 1$ Wurzeln der transformirten Gleichung beliebig bestimmen, wodurch denn die Coefficienten der Substitution auf lineare Weise bestimmt sind. Will man daher die Gesammtheit aller Gleichungen eines gewissen Grades $n$ gleichzeitig untersuchen, so muss $n \overline{<} 2\varkappa + 1$, oder $\varkappa \overline{>} \frac{n-1}{2}$ sein*). Ist dieses der Fall, so kann man mit Hilfe der Substitution $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung jede Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades in jede andere überführen; ist aber $\varkappa > \frac{n-1}{2}$, so ist dies nicht mehr der Fall. Alsdann — und dafür wird im Folgenden ein Beispiel erscheinen — sind gewisse Invariantenbeziehungen zwischen den Wurzeln der transformirten Gleichung nicht mehr gleichzeitig erreichbar. Vielmehr bestehen dann zwischen den Invarianten der transformirten Gleichung gewisse algebraische Relationen, deren Coefficienten noch die Invarianten des Vielseits, Vielflachs etc. enthalten, welches bei der Transformation gewissermassen die gegebene Form vertritt.

Betrachten wir beispielsweise die Transformation $2^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist $f = (a_1 + a_2\lambda)^n = (b_1 + b_2\lambda)^n \dots$ die symbolische Form der gegebenen Function, $J = \Sigma C \Pi(ab)$ die symbolische Darstellung einer ihrer Invarianten, so erhält man bekanntlich**) die betreffende Invariante für das Schnittpunktsystem einer Geraden:

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$$

mit dem entsprechenden Vielseit auf folgende Weise. Die linke Seite $AB \dots$ des Vielseits bezeichnet man symbolisch durch:

*) Vgl. auch die citirte Abhandlung in den Schriften der Kgl. Ges. zu Göttingen p. 67.

**) Vgl. den Aufsatz des Verf. in Borchardt's Journal Bd. 59, p. 1.

$$(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_n z_n)^n = a_z^n,$$

bez. durch $b_z^n$ etc., und bildet dann den Ausdruck:

$$J = \Sigma C \,.\, \Pi(abu)\,.$$

Denkt man sich nun alle Gleichungen dieser Art hingeschrieben, und eliminirt man aus irgend 4 derselben die Grössen $u_1$, $u_2$, $u_3$, so erhält man Beziehungen zwischen vier Invarianten $J_1$, $J_2$, $J_3$, $J_4$. Aber diese constante Beziehung ist nicht eine Invariantenrelation schlechthin; denn ihre Coefficienten sind nicht numerisch, sondern sind aus den Coefficienten des Vielseits gebildet, sie sind Invarianten des Vielseits selbst. Solche Gleichungen also sind es, welche hier, wenn die Ordnung der Substitution kleiner als $\frac{n-1}{2}$ ist, an Stelle der bei den linearen Substitutionen auftretenden Erscheinung der Unveränderlichkeit absoluter Invarianten treten, eine Erscheinung, welche, wie ich in der citirten Schrift, Bd. 15 der Abh. der Kgl. Ges. zu Göttingen bewiesen habe, ein unmittelbares Analogon bei höhern Substitutionen im Allgemeinen nicht findet.

Nur in besonderen Fällen, wo die Seiten des Vielseits durch *numerische* Werthe ihrer Invarianten speciell characterisirt werden, kann eine reine Invariantenrelation für alle diese Schnittpunktsysteme bestehen. Ein solcher Fall wird sich im Folgenden finden.

Nach dem Obigen ist die niedrigste Substitution, vermöge deren alle Gleichungen eines Grades in alle desselben Grades übergeführt werden können:

1ter Ordnung bei Gleichungen 2ten und 3ten Grades
2ter Ordnung bei Gleichungen 4ten und 5ten Grades
3ter Ordnung bei Gleichungen 6ten und 7ten Grades

u. s. w. Bei den Gleichungen 2ten und 3ten Grades genügt also die Betrachtung der linearen Substitution, bei denen vom 4ten und 5ten Grade genügt die Betrachtung der quadratischen, also des Vierseits und Fünfseits in der Ebene. Die allgemeine Ueberführung von Gleichung 6ten Grades in einander kann aber erst im Raume mit Bezug auf ein Sechsflach erreicht werden. Und zwar ist das Vierseit und Fünfseit in der Ebene, sowie das Sechsflach im Raume ein beliebiges, da 5 Gerade der Ebene stets einen Kegelschnitt berühren, und stets eine Raumcurve 3ter Ordnung mit 6 gegebenen Schmiegungsebenen gefunden werden kann. Dagegen ist das Siebenflach im Raume, auf welches die Transformation einer Gleichung 7ten Grades zurückkommt, kein beliebiges mehr, sondern seine Flächen sind durch die Bedingung verknüpft, dass sie Schmiegungsebenen der nämlichen Raumcurve 3ter Ordnung sein müssen.

## § 3.

## Curven, deren Tangenten ein gegebenes Vielseit so schneiden, dass eine bestimmte Invariante des Schnittpunktsystems verschwindet.

Ich wende mich jetzt zu den Gebilden, auf welche die quadratische Substitution führt, zu Vielseiten in der Ebene, und zwar zunächst ohne von der Beschränkung Gebrauch zu machen, welche aus den quadratischen Substitutionen hervorging, dass nämlich sämmtliche Seiten des Vielseits einen Kegelschnitt berühren mussten.

Es sei $J$, wie im vorigen §., eine Invariante einer binären Form $n^{ter}$ Ordnung; $\varkappa$ ihr Grad in Bezug auf die Coefficienten der Form. Sie ist ein Aggregat symbolischer Produkte, deren jedes aus $\frac{\varkappa n}{2}$ Factoren vom Typus $(ab)$ zusammengesetzt ist. Gehen wir daher, wie im vorigen § zu der entsprechenden ternären Bildung über, so enthält diese die Grössen $u$ in der Dimension $\frac{\varkappa n}{2}$. Soll für das Schnittpunktsystem von $u_z = 0$ mit dem Vielseit die Invariante $J$ verschwinden, so muss die entsprechende ternäre Bildung gleich Null werden, und man hat also den Satz:

*Alle Geraden, welche ein gegebenes $n$-Seit so schneiden, dass für das Schnittpunktsystem eine gewisse Invariante $\varkappa^{ten}$ Grades verschwindet, umhüllen eine Curve ($J = 0$) der Classe $\frac{\varkappa n}{2}$.*

Zu den Seiten des $n$-Seits stehen diese Curven in einer speciellen Beziehung, welche durch den folgenden Satz ausgedrückt sind:

*Die Curve $J = 0$ hat die Seiten des $n$-Seits zu $\varkappa$fachen Tangenten.*

Um dieses einzusehen, denke man sich in die Gleichung der Curve:

$$J = \Sigma C \,.\, \Pi\,(a\,b\,u) = 0$$

statt der symbolischen Coefficienten die wirklichen Coefficienten des Produkts:

$$A_z \,.\, B_z \ldots = 0,$$

welches das Vielseit darstellt, eingeführt. Dann verwandelt sich $J$ in eine simultane Invariante der linearen Ausdrücke:

$$u_z,\ A_z,\ B_z \ldots,$$

also in einen Ausdruck der Form:

$$J = \Sigma C' \,.\, \Pi\,(A\,B\,u).$$

In ihm kommt jede der Reihen $A, B \ldots$ nothwendig zur $k^{ten}$ Dimension vor; irgend eine derselben, etwa $A$, kommt also in jedem Produkte $\varkappa$mal mit den $u$ in einer Determinante verbunden vor. Setzen wir

also die $u$ den $A$ gleich, so verschwindet $J$ in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung, und $A$ ist also $\varkappa$fache Tangente.

Man kann diesen Satz durch folgende Betrachtung erläutern. Nehmen wir $A_s = 0$ statt der Geraden $u_s = 0$, deren Schnittpunktsystem wir betrachten. Alsdann ist auf $A_s = 0$ nur ein System von $n - 1$ Punkten direct gegeben, die Schnitte mit den übrigen Seiten des Vielseits. Nun kann man zu $n - 1$ gegebenen Punkten einer Geraden immer auf $\varkappa$fache Weise einen $n^{\text{ten}}$ Punkt hinzufügen, so dass für das System der $n$ Punkte die Invariante $J$ verschwindet. Um dieses zu thun, drückt man die binäre Invariante $J$ durch die Coefficienten der linearen Factoren $\alpha_s$, $\beta_s \ldots$ aus, in welche die binäre Grundform von $J$ zerfällt:

$$(1) \qquad J = \Sigma C' . \Pi (\alpha \beta) .$$

Entspricht dann $\alpha$ dem gesuchten $n^{\text{ten}}$ Factor, so stellt $J = 0$ eine Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades für $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ dar, und liefert somit $\varkappa$ Punkte der Geraden, welche die gesuchte Eigenschaft haben.

Auf einer Seite $A$ des $n$-Seits aber entspricht einem solchen $n^{\text{ten}}$ Punkte immer der Durchschnitt von $A$ mit einer ihm unendlich benachbarten Tangente von $J = 0$. Denken wir uns nämlich eine Tangente von $J = 0$, welche der Seite $A$ unendlich nahe kommt. Auf dieser liegt ein ganz bestimmtes Punktsystem von der geforderten Eigenschaft; ein Punkt desselben ist der Durchschnitt dieser Tangente mit $A$. Geht nun die Tangente in $A$ selbst über, so kann sich dieses Punktsystem nur unendlich wenig verschieben, und jener Schnittpunkt mit $A$ geht in einen unendlich nahen über. Jener Schnittpunkt also, d. h. ein Berührungspunkt von $A$, fällt mit einem der auf $A$ zu bestimmenden Punkte zusammen. Daher existiren auf jeder Seite des $n$-Seits $\varkappa$ solche Schnittpunkte mit unendlich benachbarten Tangenten, also $\varkappa$ Berührungspunkte mit $J = 0$, und sie werden zugleich durch das obige Verfahren gefunden.

Ich bemerke noch, dass die aus (1) entspringende Gleichung $J = 0$ vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade, indem man $\alpha_1 = x_2$, $\alpha_2 = - x_1$ setzt, in eine Covariante derjenigen binären Form übergehen muss, welche die $n - 1$ bekannten linearen Ausdrücke zu Factoren hat. Dieser Umstand führt in Bezug auf die Formen $5^{\text{ter}}$ Ordnung zu wichtigen Folgerungen.

Unter den Curven, welche auf die oben entwickelte Weise durch Nullsetzen zugehöriger Formen eines Vielseits entstehen, können gewisse sich dadurch auszeichnen, *dass sie in Theile zerfallen*, welche dann einzeln den Seiten des Vielseits auf unsymmetrische Weise zugeordnet sind. Diess tritt in folgender Weise ein.

Wenn man einer binären Form die Gestalt giebt:

$$f = x_1 x_2 (x_1 - x_2)(x_1 - l_1 x_2)(x_1 - l_2 x_2) \ldots (x_1 - l_{n-3} x_2) ,$$

so sind $l_1$, $l_2$, ... $l_{n-3}$ Doppelverhältnisse von 4 durch $f = 0$ gegebenen Elementen. Bildet man nun eine Invariante $J$ von $f$, so wird sie eine ganze rationale und symmetrische Function der $l$. Diese Function aber kann identisch in Factoren zerfallen, welche für die $l$ unsymmetrisch sind. Dann wird also das Verschwinden eines Factors von $J$ eine Bedeutung haben, welche sich an und für sich geometrisch ausdrücken lässt, und welche daher auf eine Ortscurve führt, deren Tangenten zu den Seiten des Vielseits in einer festen, aber unsymmetrischen Beziehung stehen. Die Gesammtheit dieser Ortscurven bildet dann die Curve $k^{ter}$ Classe, von welcher oben die Rede war.

Ein Beispiel dazu liefern die Invarianten einer Form $4^{ter}$ Ordnung, welche unten ausführlicher behandelt werden sollen.

Vor allem aber ist es die Discriminante der Gleichung $n^{ten}$ Grades, welche ein bemerkenswerthes Resultat liefert. Diese wird bekanntlich durch das *Quadrat* der Wurzeldifferenzen dargestellt. Bezeichnen wir eine binäre Form durch $\alpha_z \, . \, \beta_z \, . \, . \, .$, so ist die Discriminante das Quadrat des Ausdrucks:

$$P = \Pi(\alpha\beta),$$

und hieraus entsteht, indem man zu dem ternären Product $A_z B_z \ldots$ übergeht, das Quadrat des Ausdrucks:

$$P = \Pi(ABu).$$

Die einzelnen Factoren von $P$ sind hier die Gleichungen der Schnittpunkte zweier Seiten des Vielseits, und *die der Discriminante entsprechende Curve* $n(n-1)^{ter}$ *Classe* $(\varkappa = 2(n-1))$ *zerfällt also in die doppelt zu zählenden* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Schnittpunkte der Seiten des Vielseits unter einander.*

Bildet man daher das System der Curven, welche dem Verschwinden der einzelnen Fundamentalinvarianten einer binären Form $n^{ter}$ Ordnung entsprechen (und zu diesen kann, wenn $n > 4$, die Discriminante gerechnet werden), so ist unter denselben eine, die der Discriminante entsprechende, immer ein Quadrat, und also selbst abgesehen von ihrer Zerlegbarbeit in lineare Factoren, durch eine Curve von nur halb so hoher Classe ersetzbar.

Uebrigens sieht man sofort a priori ein, dass der Discriminante nur die Strahlbüschel entsprechen können, welche die Ecken des Vielseits zu Scheiteln haben. Denn nur diese Strahlen haben die Eigenschaft, dass zwei Punkte ihres Schnittpunktsystems zusammenfallen.

Man wird hier darauf geführt, zwei Classen von Invarianten als *reductible* und *irreductible* zu unterscheiden, je nachdem die entsprechende Curve zerfällt oder nicht. Solche Curven, welche zerfallen, kann man leicht in grösserer Zahl angeben; doch entsprechen sie gewöhnlich nicht den Invarianten niedrigsten Grades. Man erhält sie, wenn man

die Bedingung dafür aufstellt, dass unter den $n$ Punkten auf $u_z = 0$ irgend ein System von $r (< n)$ Punkten eine bestimmte (der Theorie der Formen $r^{\text{ter}}$ Ordnung entnommene) Invarianteneigenschaft besitzen soll. Man erhält, indem man die $r$ Punkte unter den $n$ Schnittpunkte verschieden wählt, eine Reihe von Curven, welche zusammen dem Verschwinden einer Invariante der Formen $n^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechen.

## § 4.

## Dreiseit und Vierseit in der Ebene.

Beim Dreiseit ist die Discriminante selbst die einzige Invariante, von deren Verschwinden die Rede sein kann. Es giebt also dem Dreiseit gegenüber keine bevorzugte Gerade der Ebene, ausser den drei Strahlbüscheln, deren Scheitel in die Ecken des Dreiecks fallen, und welche dem Verschwinden der Discriminante entsprechen.

Dagegen bietet das Vielseit, dem Auftreten der Invarianten $i = (ab)^4$ und $j = (ab)^2(bc)^2(ca)^2$ bei den binären Formen $4^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechend, andere Curven der oben entwickelten Art dar.

Stellen wir die Seiten des Vierseits durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ -z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 &= 0 \\ z_1 + z_2 - z_3 &= 0 \end{aligned}$$

dar, wobei das Dreieck der Nebenseiten als Coordinatendreieck zu Grunde gelegt ist. Die Form $4^{\text{ter}}$ Ordnung, welche als Product der 4 Geraden erhalten wird, ist:

$$f = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 - 2z_1^2z_2^2 - 2z_2^2z_3^2 - 2z_3^2z_1^2.$$

Bildet man nun die Curve, deren Tangenten das Vierseit äquianharmonisch schneiden:

$$i = (abu)^4 = 0,$$

(wenn $f$ symbolisch durch $a_z^4$, $b_z^4$ ... dargestellt wird), so findet man sofort:

$$\begin{aligned} i &= \frac{8}{3}\,(u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 - u_1^2u_2^2 - u_2^2u_3^2 - u_3^2u_1^2) \\ &= \frac{8}{3}\,(u_1^2 + \varepsilon u_2^2 + \varepsilon^2 u_3^2)\,(u_1^2 + \varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon u_3^2), \end{aligned}$$

wo $\varepsilon$ eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit.

Die Curve $4^{\text{ter}}$ Classe $i = 0$ zerfällt also in die beiden Kegelschnitte:

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_1^2 + \varepsilon u_2^2 + \varepsilon^2 u_3^2 &= 0 \\ u_1^2 + \varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon u_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

deren jeder die Seiten des Vierseits nur noch *einfach* berührt. Aus

diesen aber setzt sich mit Hilfe eines Parameters $\varkappa$ die ganze Schaar der die 4 Seiten berührenden Kegelschnitte zusammen:

(2) $$0 = u_1^2(1 + \varkappa) + u_2^2(\varepsilon + \varepsilon^2\varkappa) + u_3^2(\varepsilon^2 + \varepsilon\varkappa)\,;$$

und da jeder Kegelschnitt dieses Systems die 4 gegebenen zu Tangenten hat, so wird jede weitere Tangente desselben von jenen nach einem nur von $\varkappa$ abhängigen Doppelverhältnisse geschnitten, und bildet also einen Bestandtheil eine Curve 12ter Classe:

(3) $$i^3 - c\,.\,j^2 = 0\,.$$

Die Tangenten derselben schneiden das Vierseit nach einem Doppelverhältniss, welches aus der Gleichung:

$$c = 24\,\frac{(1 - \mu + \mu^2)^3}{(1 + \mu)^2\,(2 - \mu)^2\,(1 - 2\mu)^2}$$

gefunden wird; und zwar sind bekanntlich, wenn je *eine* Wurzel dieser Gleichung ist, die übrigen, welche einer andern Gruppirung der 4 Seiten entsprechen:

$$\frac{1}{\mu}\,,\quad 1 - \mu\,,\quad \frac{1}{1 - \mu}\,,\quad \frac{\mu - 1}{\mu}\,,\quad \frac{\mu}{\mu - 1}\,.$$

Diesen 6 Werthen entsprechend, zerfällt die Curve 12ter Classe (3) in 6 Kegelschnitte. Um sie zu finden, brauchen wir nur etwa den Berührungspunkt einer Curve (2) mit einer Seite des Vierseits zu suchen, das zwischen ihm und ihren Durchschnitten mit den andern Seiten stattfindende Doppelverhältniss $\mu$ durch $\varkappa$ auszudrücken, und dann umgekehrt $\varkappa$ als Function von $\mu$ in die Gleichung (2) einzusetzen. Betrachten wir etwa die Seite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, oder $u_1 = u_2 = u_3$. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind allgemein:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= u_1(1 + \varkappa) \\ \varrho x_2 &= u_2(\varepsilon + \varepsilon^2\varkappa) \\ \varrho x_3 &= u_3(\varepsilon^2 + \varepsilon\varkappa)\,, \end{aligned}$$

und also insbesondere hier etwa:

(4) $$x_1 = 1 + \varkappa\,,\quad x_2 = \varepsilon + \varepsilon^2\varkappa\,,\quad x_3 = \varepsilon^2 + \varepsilon\varkappa\,.$$

Die Schnittpunkte der andern Seiten mit der vorliegenden:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 & ,\ x_2 = -1 & ,\ x_3 = 0 \\ x_1 = -1 & ,\ x_2 = 0 & ,\ x_3 = 1 \\ x_1 = 0 & ,\ x_2 = 1 & ,\ x_3 = -1 \end{array}$$

erhält man bis auf gemeinsame Factoren, wenn man in den Gleichungen (4) $\varkappa$ durch $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$, $-1$ ersetzt. Daher bilden die 4 zu betrachtenden Punkte auf $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ eine Punktreihe mit den Parametern:

$$\varkappa,\quad -\varepsilon,\quad -\varepsilon^2,\quad -1$$

und eines der aus ihnen gebildeten Doppelverhältnisse ist daher:

$$\mu = \frac{\frac{\varepsilon^2+\varkappa}{\varepsilon+\varkappa}}{\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon-1}} = -\varepsilon\,\frac{\varepsilon^2+\varkappa}{\varepsilon+\varkappa}\,.$$

Daher wird umgekehrt:

$$\varkappa = -\frac{\varepsilon\mu+1}{\mu+\varepsilon}\,.$$

Setzt man diesen Werth von $\varkappa$ in (2) ein, und setzt dann für $\mu$ die 5 conjugirten Werthe, so erhält man die 6 Kegelschnitte, deren Tangenten das Vierseit nach demselben Doppelverhältnisse schneiden, und welche also die Bestandtheile der Curve (3) sind:

$$\begin{aligned}
u_1^2(\mu-1) - u_2^2\mu + u_3^2 &= 0\\
u_1^2(\mu-1) + u_2^2 - u_3^2\mu &= 0\\
-u_1^2\mu + u_2^2(\mu-1) + u_3^2 &= 0\\
u_1^2 + u_2^2(\mu-1) - u_3^2\mu &= 0\\
u_1^2 - u_2^2\mu + u_3^2(\mu-1) &= 0\\
-u_1^2\mu + u_2^2 + u_3^2(\mu-1) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Für $\mu = -\varepsilon$ oder $\mu = -\varepsilon^2$ werden je drei dieser Kegelschnitte identisch und man erhält wieder die Curven (1); für $\mu = -1$ fallen sie paarweise zusammen, und liefern die drei Kegelschnitte, deren Tangenten die Seiten des Vierseits harmonisch schneiden:

$$\begin{aligned}
-2u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 0\\
u_1^2 - 2u_2^2 + u_3^2 &= 0\\
u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Setzt man endlich $\mu = 1$, so fallen abermals je zwei der 6 Kegelschnitte zusammen, und die drei übrigbleibenden zerfallen noch in Punktepaare. So erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(u_1+u_2)(u_1-u_2) &= 0\\
(u_2+u_3)(u_2-u_3) &= 0\\
(u_3+u_1)(u_3-u_1) &= 0\,,
\end{aligned}$$

welche den Factoren der Discriminante, den Schnittpunkten der Seiten des Vierseits unter einander, entsprechen.

Man kann hieran in geometrischem Gewande die Lösung der Gleichung $4^{\text{ten}}$ Grades knüpfen, wie Hermite (Comptes Rendus t. 46. p. 961) und Gordan (Borchardt's Journal Bd. 71, p. 164) dieselbe gegeben haben. Diese Lösung beruht darauf, dass man die biquadratische Gleichung durch eine höhere Transformation in eine solche verwandelt, für welche $i$ oder $j$ verschwindet; und da die quadratische Substitution bei Formen $4^{\text{ter}}$ Ordnung überhaupt noch alles leistet, so kann dies, wie es auch Herr Gordan ausgeführt hat, vermöge einer quadratischen Substitution erreicht werden. In der That braucht man nur das zu

der Gleichung 4ter Ordnung gehörige Vierseit $f = 0$ zu nehmen, und die Curven $i = 0$, $j = 0$ zu bilden. Die erstere Gleichung zerfällt nach dem Obigen in 2 Kegelschnitte, eine Zerlegung, welche mit Hülfe einer quadratischen Gleichung ausgeführt wird; jede Tangente eines solchen Kegelschnittes liefert dann eine biquadratische Gleichung, für welche $i = 0$ und welche also durch eine *reine* cubische Gleichung gelöst wird. Dagegen zerfällt $j = 0$ mit Hülfe einer cubischen Gleichung in 3 Kegelschnitte, und jede Tangente einer solchen schneidet das Vierseit in 4 harmonischen Punkten, zu deren Trennung dann nur noch quadratische Gleichungen erforderlich sind.

## § 5.

## Das ebene Fünfseit: Einleitung.

Aehnliche Betrachtungen werde ich nun in Bezug auf das Fünfseit anstellen, und in Bezug auf den Zusammenhang des Fünfseits mit der Lösung der Gleichungen 5ten Grades, eine Untersuchung, welche die erste Veranlassung zu den vorliegenden Betrachtungen wurde. Dabei muss ich zunächst diejenigen Covarianten und Invarianten einer binären Form 5ter Ordnung anführen, von welchen hier Gebrauch gemacht werden soll.*)

Aus der binären Form 5ter Ordnung

$$f = a_z^5 = b_z^5 \ldots$$

entsteht zunächst die Covariante

$$i = (ab)^4 a_z b_z = i_z^2,$$

quadratisch in der Veränderlichen (2ter Ordnung) und in den Coefficienten (2ten Grades). Diese liefert in Verbindung mit $f$ eine cubische Covariante (3ter Ordnung und 3ten Grades):

$$j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 a_z b_z c_z = - (ai)^2 a_z^3 = j_z^3,$$

und aus dieser wieder entsteht die quadratische Covariante 6ten Grades:

$$\tau = (jj')^2 j_z j_z'.$$

Aus $\tau$ und $i$ ergiebt sich die Functionaldeterminante (8ten Grades):

$$\vartheta = (i\tau)\, i_z \tau_z$$

und die Reihe von Invarianten (4ten, 8ten und 12ten Grades):

$$A = (ii')^2, \qquad B = (i\tau)^2, \qquad C = (\tau\tau')^2.$$

Sodann findet man aus $i$ und $j$ die lineare Covariante 5ten Grades:

$$\alpha = (ai)^2 (ai')^2 a_z = - (ij)^2 j_z,$$

*) Bezüglich des Formenzusammenhanges verweise ich auf die Arbeit von Herrn Gordan und mir in den Annali di matematica (Ser. II. Bd. 1. p. 23) und auf eine ausführliche Darstellung der Theorie der binären Formen, welche ich demnächst herausgeben werde.

und hieraus die weiteren linearen Covarianten 7ten, 11ten und 13ten Grades:

$$\beta = (i\alpha)\, i_z, \quad \gamma = (\tau\alpha)\, \tau_z, \quad \delta = (\vartheta\alpha)\, \vartheta_z;$$

endlich die Invarianten 12ten, 16ten, 18ten Grades:

$$M = (i\alpha)^2, \quad N = (\tau\alpha)^2, \quad R = (\vartheta\alpha)^2.$$

Von diesen drücken sich die beiden ersten durch $A$, $B$, $C$ aus mittelst der Formeln:

$$M = 2AB - 3C$$

$$N = \frac{AC - B^2}{2},$$

das Quadrat der letzteren aber durch die Formel:

$$R^2 = -\tfrac{1}{2}(AN^2 - 2BMN + CM^2).$$

Ausser den angeführten giebt es keine Invarianten und keine linearen Covarianten; die übrigen Covarianten, welche noch existiren, werden nicht zur Verwendung kommen.

Dagegen führe ich noch folgende Sätze an:

*Wenn $R$ verschwindet, so bilden 4 der linearen Factoren von $f$ eine Involution, deren eines Doppelelement der fünfte ist, und zwar fällt dieser dann mit der linearen Covariante $\alpha$ zusammen.*

*Wenn auch noch $M$ verschwindet, so kann dies erstlich durch gleichzeitiges Verschwinden von $M$ und $A$, d. h. von $C$ und $A$, geschehen. Alsdann sind die beiden gedachten Paare der Involution noch untereinander harmonisch.*

*Es kann zweitens dadurch geschehen, dass $M$ und $N$ verschwinden. Dann verschwinden sämmtliche linearen Covarianten, und zwar ist entweder*

$\alpha = 0$, $\tau$ *von Null verschieden, $f$ das Produkt einer cubischen Form mit ihrer quadratischen Covariante; oder*

$\alpha = 0$, $\tau = 0$, $j$ *von Null verschieden; dann hat $f$ einen dreifachen Factor; oder*

$j = 0$, $i$ *von Null verschieden; $f$ ist die Summe zweier 5ter Potenzen; oder endlich*

$i = 0$; *$f$ hat einen vierfachen Factor.*

Die Discriminante der Form 5ten Grades ist $A^2 - 64B$.

## § 6.

## Curven, deren Tangenten das Fünfseit so schneiden, dass für das Schnittpunktsystem gewisse Invarianten verschwinden. Die Curve $R = 0$.

Aus dem Vorigen sieht man, dass zunächst in Bezug auf das ebene Fünfseit diejenigen Curven zu betrachten sein werden, für welche $A$, $B$, $C$ oder $R$ verschwinden, deren Gleichungen also sind:

$$A = (i i' u)^2 = 0, \qquad B = (i \tau u)^2 = 0, \qquad C = (\tau \tau' u)^2 = 0,$$
$$R = (\vartheta \alpha u)^2 = 0.$$

Um diese Ausdrücke vollständig zu übersehen, muss man bemerken, dass bei dem Uebergange von den binären zu den ternären Formen in jeder symbolischen Determinante eine Reihe von $u$ hinzuzufügen ist. Daher enthalten auch die Symbole $i$, $\tau$, $\vartheta$, $\alpha$ ihrer Entstehung nach die $u$, und zwar ergiebt sich dies, indem man die Bildung der Ausdrücke verfolgt, aus folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} f &= a_z^5 \quad \text{(ternär)} \\ i &= (abu)^4 a_z b_z = i_z^2 \\ j &= -(aiu)^2 a_z^3 = j_z^3 \\ \tau &= (jj'u)^2 j_z j_z' = \tau_z^2 \\ \vartheta &= (i\tau u)\, i_z \tau_z = \vartheta_z^2 \\ \alpha &= -(iju)^2 j_z. \end{aligned}$$

Hierdurch sind alle Symbole, wie sie in beiden ternären Bildungen vorkommen, definirt, und man kann verfolgen, in welcher Dimension dieselben die Liniencoordinaten $u$ enthalten. So findet sich bestätigt, was den allgemeinen Betrachtungen des § 3. entspricht, dass die Curven $A = 0$ u. s. w. von den folgenden Classen sind; ich füge sogleich die Zahlen hinzu, welche nach § 3. angeben, wie vielfache Tangenten die Seiten des Fünfseits sind:

| Curve | Classe | Multiplicität der Seiten des Fünfseits als Tangenten der Curven |
|---|---|---|
| $A = 0$ | 10 | 4 |
| $B = 0$ | 20 | 8 |
| $C = 0$ | 30 | 12 |
| $R = 0$ | 45 | 18 |

Von diesen Curven hat zunächst $R = 0$ dem vorigen §. zufolge eine einfache geometrische Bedeutung. Denn seine Tangenten schneiden 4 Seiten in 2 Involutionspaaren, deren einer Doppelpunkt der Schnitt mit der 5ten Seite ist. Aber weil hierbei die Seiten des Fünfseits ganz verschieden benutzt sind, so sieht man, dass $R = 0$ in verschiedene Ortscurven zerfallen muss. Denn erstlich kann die 5te Seite beliebig gewählt werden; dann aber kann man noch die 4 übrigen auf drei Weisen in 2 Paare sondern, welche die Involutionspaare zu liefern bestimmt sind. Man kann also der geometrischen Forderung gegenüber die 5 Seiten des Fünfseits auf 15 verschiedene Arten anordnen, und schliesst daraus sofort den Satz:

*Die Curve $R = 0$ zerfällt in 15 Curven 3ter Classe.*

Diese Zerlegung entspricht genau den 15 Factoren, in welche

Hermite (Borchardt's Journal Bd. 59, p. 304) die Invariante $R$ durch Einführung der Verschwindungswerthe der binären Form $f$ zerlegen gelehrt hat.

Es ist leicht, die einzelnen Curven geometrisch festzulegen. Es seien etwa $AB$ die Seiten des Fünfseits, welche das eine, $CD$ diejenigen, welche das andere Involutionspaar geben sollen, $E$ die 5$^{\text{te}}$ Seite. Auf dieser werden durch $AB$, $CD$ 2 Paare einer Involution bestimmt, deren Doppelpunkte einzeln mit jenen ein System bilden, für welches $R = 0$. Daher sind diese beiden Punkte Berührungspunkte von $E$ mit der betreffenden Curve 3$^{\text{ter}}$ Classe, und $E$ selbst ist Doppeltangente derselben.

Wenn man dagegen eine der anderen Seiten, etwa $D$, betrachtet, so liefert der Schnitt mit $E$ einen Doppelpunkt der Involution, die Schnitte mit $AB$ ein Paar derselben; dadurch ist der 2$^{\text{te}}$ Doppelpunkt der Involution eindeutig bestimmt, und ebenso der zum Schnitt mit $C$ gehörige Punkt eines Paares, welcher der Berührungspunkt mit der gesuchten Curve ist. Hiermit ist aber gezeigt, dass die übrigen 4 Seiten einfache Tangenten sind, und zugleich sind ihre Berührungspunkte construirt.

Die Curve ist hierdurch bereits mehr als hinreichend bestimmt. Aber man ist im Stande, einige weitere Tangenten derselben anzugeben, sodass man die Construction der Berührungspunkte entbehren kann. Da eine Doppeltangente vorhanden ist, welche 3 Bedingungen mit sich führt, und 4 einfache Tangenten, so genügt es, 2 weitere einfache Tangenten anzugeben. Man findet sie unter den Diagonalen des Fünfseits.

Verbindet man nämlich die Schnittpunkte von

$$AC \text{ und } BD$$

oder von

$$AD \text{ und } BC,$$

so entsteht jedesmal eine Diagonale, auf welcher die beiden durch $AB$ und $CD$ markirten Involutionspaare zusammenfallen. Daher kann man für sie jeden Punkt der Verbindungslinie als Doppelpunkt der Involution bezeichnen, mithin auch den Durchschnitt mit $E$. So genügen diese beiden Diagonalen den geforderten Bedingungen und geben die gesuchten beiden Tangenten der Curve.

Man kann jetzt die Lage der 15 Curven 3$^{\text{ter}}$ Classe ($R'$) folgendermassen genauer charakterisiren:

> *Die* 15 *Curven $R'$ bilden* 5 *Gruppen zu* 3. *Curven derselben Gruppe haben dieselbe Seite des Fünfseits zur Doppeltangente; sie berühren einfach die* 4 *übrigen, und jede von ihnen berührt noch* 2 *Diagonalen des aus letzteren gebildeten Vierseits; wodurch sie vollkommen bestimmt sind.*

Was die Lage der 18 Berührungspunkte dieser Curve mit irgend einer Seite des Fünfseits angeht, so bemerke ich hier Folgendes, was sich zugleich mit auf die Berührungspunkte der Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$ bezieht. In § 3. wurde erwähnt, dass die Berührungspunkte einer Seite mit einer Curve $J=0$, wenn $J$ vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade, $\varkappa$ an der Zahl seien; und dass man sie finde, indem man die Schnittpunkte der Seite mit den übrigen als eine Gruppe von $(n-1)$ Punkten durch eine binäre Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung darstelle, und eine gewisse Covariante $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung dieser letzteren verschwinden lasse. Nun ist im vorliegenden Falle diese Form $(\varphi)$ von der $4^{\text{ten}}$ Ordnung; sie hat nur 2 Covarianten, die eine, $H_\varphi$, von der $4^{\text{ten}}$, die andere, $T_\varphi$, von der $6^{\text{ten}}$ Ordnung; das Quadrat der letzteren drückt sich überdies als ganze Function von $\varphi$ und $H_\varphi$ mittelst der Gleichung aus:

$$T_\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}\left\{H_\varphi^3 - \frac{i_\varphi}{2} H_\varphi \varphi^2 - \frac{j_\varphi}{3}\varphi^3\right\}.$$

Daher folgt sofort, dass die Gleichungen, aus denen die Berührungspunkte der Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$, $R=0$ mit einer Seite des Fünfseits gefunden werden, folgende Form haben müssen:

$A=0$) lineare Function von $\varphi$ und $H_\varphi$;
$B=0$) quadratische Function von $\varphi$ und $H_\varphi$;
$C=0$) cubische Function von $\varphi$ und $H_\varphi$;
$R=0$) $T_\varphi$ multiplicirt mit einer cubischen Function von $\varphi$ und $H_\varphi$.

Man erkennt hieraus sofort, dass alle diese Gleichungen algebraisch lösbar sind. Denn abgesehen von dem Factor $T_\varphi$ zerlegt man sie mit Hülfe quadratischer oder cubischer Gleichungen in biquadratische von der Form $\varkappa\varphi + \lambda H_\varphi = 0$; die Gleichung $T_\varphi$ selbst aber wird bekanntlich mittelst einer cubischen und quadratischer Gleichungen gelöst.

Man kann also zunächst das Resultat aussprechen:

*Die Berührungspunkte von* $A=0$, $B=0$, $C=0$, $R=0$ *auf den Seiten des Vielseits werden mit Hülfe algebraisch lösbarer Gleichungen der Grade* 4, 8, 12 *gefunden.*

Insbesondere zerfällt die Gruppe der 18 Berührungspunkte von $R=0$ in die 6 Punkte, für welche $T_\varphi=0$ und in 12 andere, welche 3 Gruppen der Form $\varkappa\varphi+\lambda H_\varphi=0$ bilden. Die 6 Punkte $T_\varphi=0$ enthalten bekanntlich die 3 Punktepaare, welche, wenn man $\varphi=0$ in 2 Involutionspaare zerlegt, die Doppelpunkte diese 3 Involutionen geben. Diese Punktepaare sind also die Berührungspunkte derjenigen 3 Curven $R'$, für welche die betreffende Seite Doppeltangente ist. Die 3.4 Berührungspunkte der anderen Curven $R'$, sowie die 4 Berührungspunkte mit $A=0$, die 2.4 mit $B=0$, die 3.4 mit $C=0$ bilden Quadrupel der Reihe $\varkappa\varphi+\lambda H_\varphi=0$, welche die Eigenschaft besitzen,

als Combination zweier Involutionspaare betrachtet, immer die ersten 3 Punktepaare als Doppelpunkte zu ergeben.

Die 15 Curven $R' = 0$ haben ausser den Seiten des Fünfseits noch weitere gemeinsame Tangenten. Zwar Curven derselben Gruppe nicht mehr; denn für diese zählt die gemeinschaftliche Doppeltangente vierfach, die 4 übrigen Seiten aber und noch eine Diagonale einfach, sodass dadurch die volle Zahl der gemeinsamen Tangenten zweier solcher Curven bereits gegeben ist.

Wenn man aber 2 Curven aus verschiedenen Gruppen betrachtet, so zählen für sie die Seiten, welche je eine derselben doppelt berühren, nur als je 2, die übrigen Seiten als einfache gemeinsame Tangenten; Diagonalen können gemeinsame Tangenten nicht werden. Man kennt also vorläufig nur 7 gemeinsame Tangenten zweier solcher Curven, und 2 weitere bleiben zu suchen; im Ganzen 180 Tangenten oder deren Aequivalente. Wir werden diese später auffinden.

## § 7.

### Gerade, welche das Fünfseit nach vorgeschriebenen Doppelverhältnissen schneiden. Tangenten von den Ecken an $A = 0$, $C = 0$, $R = 0$.

Die projectivischen Beziehungen zwischen 5 Punkten (etwa 1, 2, 3, 4, 5) sind durch 2 Doppelverhältnisse charakterisirt, etwa durch die beiden Doppelverhältnisse (1 2 3 4) und (1 2 3 5). Stellen wir uns die Aufgabe, eine Gerade so zu ziehen, dass bei gegebener Anordnung die 5 Schnittpunkte gegebene Doppelverhältnisse haben, so finden wir folgendermassen die Lösung. Wir suchen zunächst eine Gerade, welche die ersten 4 Seiten des Fünfseits nach dem entsprechend gegebenen Doppelverhältnisse schneidet. Die Gerade ist hierdurch nicht völlig bestimmt, sondern kann noch eine beliebige Tangente eines gewissen Kegelschnitts sein, der diese 4 Seiten berührt (§ 4.). Um den Kegelschnitt völlig zu bestimmen, kann man auf einer dieser 4 Seiten den Berührungspunkt construiren; er liegt zu den Durchschnitten dieser Seite mit den 3 anderen so, dass das gegebene Doppelverhältniss bei gegebener Anordnung entsteht.

Ist nun so der Kegelschnitt construirt, welcher des einen gegebenen Doppelverhältnisses wegen von der gesuchten Geraden berührt werden muss und welcher die Seiten 1, 2, 3, 4 des Fünfseits zu Tangenten hat, so findet man einen zweiten, der die Seiten 1, 2, 3, 5 berührt und dessen Tangente die gesuchte Gerade wegen des zweiten gegebenen Doppelverhältnisses sein muss. Beide zusammen haben 3 Seiten des Fünfseits schon zu gemeinsamen Tangenten. Daher ist nur

eine einzige gemeinsame Tangente noch als Lösung der Aufgabe übrig und wir erhalten den Satz:

*Bei vorgeschriebener Anordnung giebt es nur eine einzige Gerade, deren Schnittpunktsystem mit den Seiten des Fünfseits einem gegebenen Systeme von 5 Punkten projectivisch ist.*

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn die beiden Doppelverhältnisse gerade diejenigen Werthe haben, welche den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung zukommen. In diesem Falle vereinigen sich die beiden zur Construction benutzten Kegelschnitte zu dem einen, welcher alle Seiten des Fünfseits berührt, und die sämmtlichen Tangenten des letzteren genügen der gestellten Forderung.

Wenn nur das eine dieser Doppelverhältnisse gegeben ist, und übrigens für das Schnittpunktsystem eine der Invarianten $A$, $B$, $C$, $R$ verschwinden soll, so führt dies auf die Aufgabe, die gemeinsamen Tangenten eines Kegelschnittes, welcher 4 Seiten des Fünfseits berührt, mit den Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$, $R=0$ zu finden, und auf den bemerkenswerthen Satz:

*Die gemeinschaftlichen Tangenten jeder der Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$, $R=0$ mit einem 4 Seiten des Fünfseits berührenden Kegelschnitte werden durch algebraisch lösbare Gleichungen gefunden.*

Wir können nämlich für diesen Fall immer, wenn wieder (1234) das gegebene Doppelverhältniss ist, das zugehörige Doppelverhältniss (1235) mittelst algebraisch lösbarer Gleichungen finden und damit die Aufgabe auf die vorige zurückführen. Nennen wir $\mu$ das gegebene, $\sigma$ dieses gesuchte Doppelverhältniss, so können wir das System der Schnittpunkte auf einer der gesuchten Geraden bei passender Wahl der binären Veränderlichen durch die Werthe

$$\frac{z_1}{z_2} = 0, \ \infty, \ 1, \ \mu, \ \sigma$$

darstellen; und die Aufgabe ist also, den letzteren Punkt zu einer gegebenen Gruppe von vieren so zu finden, dass eine der Invarianten $A$, $B$, $C$, $R$ verschwindet. Diese Aufgabe aber führt auf algebraisch lösbare Gleichungen nach dem Satze des § 6., und damit ist auch das Obige bewiesen. Denn haben wir $\sigma$ gefunden, so brauchen wir nur den zweiten Kegelschnitt zu construiren, dessen Tangenten die Seiten 1, 2, 3, 5 nach diesem Doppelverhältnisse schneiden; und die einzige gemeinschaftliche Tangente dieses und des ersten Kegelschnitts, welche nicht mit einer Seite des Fünfseits zusammenfällt, giebt eine gemeinschaftliche Tangente des ersten Kegelschnittes und der in Rede stehenden Curve.

Die Anzahl der erhaltenen Werthe $\sigma$ ist nach dem Früheren beziehungsweise 4, 8, 12, 18; und diese Zahlen stimmen in der That

mit der Anzahl gemeinsamer Tangenten überein, welche der fragliche Kegelschnitt mit den Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$, $R=0$ haben kann, wenn man die in die Seiten des Fünfseits fallenden in Abzug bringt:

$$A)\quad 2.10-4.\ 4=\ 4$$
$$B)\quad 2.20-4.\ 8=\ 8$$
$$C)\quad 2.30-4.12=12$$
$$R)\quad 2.45-4.18=18.$$

Nur in einem einzigen Falle bedarf dieses Verfahren einer Abänderung, wenn nämlich das gegebene Doppelverhältniss den Werth 1 hat; dann zerlegt sich der Kegelschnitt in 2 Punkte und es entsteht die Aufgabe, von einem Schnittpunkte zweier Seiten des Fünfseits an die Curven $A=0$, $B=0$, $C=0$, $R=0$ Tangenten zu ziehen; oder, was dasselbe ist, durch einen solchen Punkt Gerade zu ziehen (von den Seiten des Fünfseits verschieden), auf welcher für das System der 3 einzelnen gesuchten und des doppelt gerechneten gegebenen Schnittpunktes eine jener Invarianten verschwindet. Man kann allerdings in diesem Falle wie oben verfahren und nur $\mu=1$ setzen; aber dann würde man immer diejenigen Lösungen vereinigt erhalten, welche 2 verschiedenen Ecken des Fünfseits entsprechen.

Stellen wir uns die Aufgabe, die Bedingung zu finden, unter welcher das Produkt einer cubischen binären Form $\varphi(z)$ mit dem Quadrat einer linearen Form $(xz)$ eine Form $5^{\text{ter}}$ Ordnung liefert, für welche eine der Invarianten $A$, $C$ verschwindet. Von $B$ können wir abstrahiren; denn da die Discriminante verschwindet, so ist $B$ von $A^2$ nur um einen numerischen Factor verschieden, und die Tangenten an $A=0$ sind also Doppeltangenten an $B=0$; das Verschwinden von $R$ bedarf einer besonderen Betrachtung. Die linken Seiten der resultirenden Gleichungen sind Covarianten von $\varphi$, geschrieben mit den Veränderlichen $x$; und zwar haben sie in Bezug auf die Coefficienten von $\varphi$ beziehungsweise die Grade 4, 12, für die $x$ haben sie eine doppelt so hohe Ordnung. Nun hat $\varphi$ nur eine quadratische Covariante $2^{\text{ten}}$ Grades $\Delta_\varphi$, eine cubische $3^{\text{ten}}$ Grades $Q_\varphi$, deren Quadrat sich durch die anderen Formen ausdrücken lässt, und eine Invariante $4^{\text{ten}}$ Grades $R_\varphi$. Daher zeigt eine Ueberlegung sofort, dass das Verschwinden der Invarianten $A$, $C$ auf Gleichungen von folgender Form führt:

$$A)\quad \varphi^2\Delta_\varphi=0$$
$$C)\quad \varphi^6\left\{\Delta_\varphi^3+\varkappa\varphi^2R_\varphi\right\}=0.$$

Aber die Potenzen von $\varphi$ können wir übergehen. Wäre $\varphi=0$, so würden in der Form $5^{\text{ten}}$ Grades *drei* Elemente zusammenfallen, was hier nicht geschehen kann. Das Verschwinden von $A$ führt also auf die quadratische Gleichung: $\Delta=0$.

In der anderen Gleichung kann man $\Delta_\varphi^3$ durch $Q_\varphi^2$ und $\varphi^2 R\varphi$ linear ausdrücken und demnach geht diese in folgende Form über:

$$(Q_\varphi + \lambda\varphi\sqrt{-R_\varphi})\,(Q - \lambda\varphi\sqrt{-R_\varphi}) = 0\,.$$

Man kann dies zunächst in folgendem Satze aussprechen:

*Zu 3 gegebenen Elementen ($\varphi = 0$) giebt es 2 ($\Delta\varphi = 0$), deren jedes doppelt gerechnet mit ihnen eine Form 5ter Ordnung bildet, deren Invariante $A$, 6, bei welchen ebenso die Invariante $C$ verschwindet. Die ersten beiden sind die, mit welchen jene Elemente cyclisch-projectivisch liegen; die 6 Elemente, durch welche $C = 0$ wird, bilden 2 Tripel, welche ebenfalls mit jenen beiden cyclisch-projectivisch liegen.*

Wenden wir dieses nun auf die Lösung der Aufgabe an, die 2 bez. 6 Tangenten zu finden, welche man von einer Ecke des Fünfseits beziehungsweise an die Curven $A = 0$, $C = 0$ noch ziehen kann. Auf einer solchen Tangente liegt der feste doppelt zählende Schnittpunkt und 3 andere. Wir können die Reihe dieser 4 Punkte durch passende Wahl zweier auf der Tangente gezählter Veränderlichen $z_1$, $z_2$ so darstellen, dass den Schnittpunkten die Werthe $\frac{z_1}{z_2} = 0, \infty, 1, \mu$ entsprechen. Letzterer Werth etwa mag dem doppelt zählenden Punkte zugehören. Es ist $\mu$ dann das Doppelverhältniss auf der Tangente. Nehmen wir nun in den obigen Betrachtungen für $\varphi$ das Produkt

$$z_1 \,.\, z_2 \,.\, (z_1 - z_2)\,,$$

und setzen $\frac{x_1}{x_2} = \mu$, so erhalten wir aus den obigen Gleichungen solche zur Bestimmung der Grösse $\mu$, theils quadratische, theils cubische. Ist aber das Doppelverhältniss $\mu$ gefunden, so ist die betreffende Tangente durch eine lineare Construction gegeben. Denn ist etwa der Durchschnitt der Seiten 1, 2 derjenige, durch den die Tangente gehen soll, welche das Dreieck 1, 2, 3 nach dem gefundenen Doppelverhältniss schneidet, so braucht man nur von einer Ecke dieses Dreiecks ein Büschel von 4 Strahlen von dem gegebenen Doppelverhältnisse zu legen, unter denen 2 Seiten des Dreiecks sind, die dritte durch den Punkt 1, 2 geht; die vierte schneidet dann die gegenüberliegende Dreieckseite in einem Punkte, welcher mit 1, 2 verbunden die gesuchte Tangente giebt.

So findet man 2 Tangenten an $A = 0$, 2 . 3 Tangenten an $C = 0$. Die Tangenten an $A = 0$ haben insbesondere die Eigenschaft, dass auf ihnen Punktreihen entstehen, die durch die Abstandverhältnisse 0 (doppelt zu rechnen), 1, $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ ($\varepsilon^2 = 1$) charakterisirt werden, eine cyclisch-projectivische Gruppe nebst einem der zugehörigen festen Punkte, welcher doppelt gezählt wird.

Was nun die Tangenten an $R = 0$ betrifft, so sieht man, dass an diejenigen 6 Curven $3^{\text{ter}}$ Classe $R' = 0$, deren Doppeltangente durch den Punkt 1, 2 geht, keine weitere Tangente von diesem Punkte aus gezogen werden kann, als die Doppeltangente und die andere einfach zählende Seite des Fünfseits. Ist dagegen eine andere Seite, etwa 3, Doppeltangente der Curve, so geht von 1, 2 noch *eine* von den Seiten verschiedene Tangente an die Curve. Und da die 3 Curven dieser Gruppe noch je 2 Diagonalen des Vierseits 1, 2, 4, 5 berühren, so ist in 2 Fällen die Diagonale diese Tangente. In den Gruppen, deren Doppeltangente 3, 4 oder 5 ist, existirt also je eine Curve, an welche von 1, 2 eine Tangente geht, welche weder Seite noch Diagonale des Fünfseits ist. Auf diese findet die Steiner'sche Construction*) Anwendung; denn jede Curve $R' = 0$ ist von der $3^{\text{ten}}$ Classe und $4^{\text{ten}}$ Ordnung; sie ist gegeben durch 6 Tangenten, die im Steiner'schen Sinne 3 Paare bilden (die Doppeltangente zu deren Berührungspunkten harmonisch theilen), und es kommt nur darauf an, von dem Schnittpunkte der Tangenten eines solchen Paares die $3^{\text{te}}$ Tangente an die Curve zu ziehen. Es geschieht dies bekanntlich so, dass man einen Kegelschnitt durch die 3 Scheitel der Paare und die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente legt. Das Paar, aus dessen Scheitel die Tangente gezogen werden soll, schneidet diesen Kegelschnitt in 2 Punkten, die Verbindungslinie beider trifft die Doppeltangente, auf dieser sucht man zu dem letzten Punkte und den beiden Berührungspunkten den $4^{\text{ten}}$ harmonischen; dessen Verbindungslinie mit jenem Scheitel ist die gesuchte Tangente.

## § 8.

## Die gemeinsamen Tangenten von $A = 0$ und $C = 0$.

Während $R = 0$ in eine Zahl geometrisch leicht definirbarer niedrigerer Curven überging, ist dieses bei den Curven $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, welche von der $10^{\text{ten}}$, $20^{\text{sten}}$, $30^{\text{sten}}$ Classe sind, nicht der Fall. Nur eine von ihnen, $B = 0$, *hat die Eigenschaft, sich in* 2 *Curven* $10^{\text{ter}}$ *Classe aufzulösen.* Dies erkennt man sofort, wenn man auf die Discriminante zurückgeht, welche den Ausdruck $A^2 - 64B$ hat. Ist $P = 0$, wie in § 3., das Produkt der Gleichungen der 10 Punkte, in welchen die Seiten des Fünfseits einander treffen, so kann die Discriminante von $P^2$ nur um eine numerische Constante verschieden sein; und man hat also identisch:

$$A^2 - 64B = \varkappa^2 P^2,$$

wo $\varkappa$ eine numerische Constante bezeichnet. Daher löst sich $B = 0$ in die beiden Curven $10^{\text{ter}}$ Classe:

*) Steiner in Borchardt's Journal, Bd. 53. p. 231; Cremona, ib. Bd. 64. p. 101; Güssfeldt, Inauguraldissertation, Bonn 1865.

(1) $$A + \varkappa P = 0, \qquad A - \varkappa P = 0$$

auf, welche die gemeinschaftlichen Tangenten von $A = 0$ und $P = 0$ ebenfalls zu gemeinschaftlichen Tangenten haben, und welche ausserdem die Seiten des Fünfseits nur noch zu vierfachen Tangenten haben. Durch diese Bedingungen ist ein Büschel $A + \varrho P = 0$ von Curven $10^{ter}$ Classe definirt, sodass die Punkte, in welchen die Curven (1) eine gemeinschaftliche einfache Tangente dieses Büschels berühren, zu den Berührungspunkten mit $A = 0$ und $P = 0$ (letzterer eine Ecke des Fünfseits) harmonisch liegen, und nur eine einzige Constante zu bestimmen bleibt.

Den genaueren Zusammenhang zwischen den Curven $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $R = 0$ erschliesst man nun durch Aufsuchung der gemeinschaftlichen Tangenten, welche $C = 0$ mit $A = 0$ und $B = 0$ hat, wobei man sich der identischen Relation

(1) $$R^2 = -\tfrac{1}{2}(AN^2 - 2BMN + CM^2)$$

bedient, durch welche die linken Theile dieser Curvengleichungen zusammenhängen.

Wenn $C = 0$, so reducirt sich $N$ auf $\frac{-B^2}{2}$ und (1) auf

$$R^2 = \frac{AB^4}{8}.$$

Sowohl die gemeinschaftlichen Tangenten von $C = 0$ mit $A = 0$, wie die von $C = 0$ mit $B = 0$ sind daher auch Tangenten an $R = 0$; nur ihre Multiplicität ist zu untersuchen.

Wenn für ein System der $u$ $C = 0$, $A = 0$, so sei ein benachbartes Werthsystem $u + \varepsilon v$, wo $\varepsilon$ eine gegen Null convergirende Grösse ist. Setzen wir dann, nach einer gewöhnlichen Bezeichnung, für eine beliebige Function $\varphi$ von $u_1$, $u_2$, $u_3$:

$$D\varphi = \Sigma v_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$$

$$D^2\varphi = \Sigma v_i \frac{\partial D_\varphi}{\partial u_i}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so geht für dieses Werthsystem $M$ in

$$\varepsilon DM \cdots = 2\varepsilon B . DA - 3\varepsilon DC + \cdots,$$

$N$ in

$$N + \cdots = -\frac{B^2}{2} + \cdots$$

$R$ in $\varepsilon DR$ über; und indem man nun (1) durch $\varepsilon$ dividirt und sodann zu dem Grenzwerth $\varepsilon = 0$ übergeht, erhält man:

$$0 = N . DA - 2B . DM,$$

oder mit Benutzung des Ausdrucks von $DM$:

$$0 = 3B . DA - 4DC.$$

Nun ist $DA = 0$ die Gleichung des Berührungspunktes der frag-

lichen Tangente mit $A = 0$, $DC$ die des Berührungspunktes mit $C = 0$. Nach den obigen Gleichungen fallen beide zusammen, und die Curven $A = 0$, $C = 0$ berühren einander. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind zugleich Tangenten von $R = 0$.

Da die Curven $A = 0$, $C = 0$ von den Classen 10 und 30 sind, so haben sie 300 gemeinsame Tangenten. Aber von diesen fallen $5 . 4 . 12 = 240$ in die Seiten des Fünfseits. Es bleiben daher 60 übrig, die sich paarweise zu den angeführten Berührungstangenten vereinigen. Man hat also den Satz:

*Die Curven $A = 0$, $C = 0$ berühren einander in 30 Punkten; die Tangenten der Berührungsstelle sind zugleich Tangenten von $R = 0$, sodass jede der 15 Curven $R' = 0$ von zweien derselben berührt wird.*

Zu der gleichen Zahl und zugleich zu einer independenten Darstellung dieser Tangenten gelangt man, wenn man auf das Punktsystem eingeht, in welchem eine solche Gerade das Fünfseit trifft. Nach den Sätzen, die in § 5. citirt wurden, besteht dasselbe aus 2 zu einander harmonischen Punktepaaren und einem Doppelpunkte der durch sie bestimmten Involution; oder, was dasselbe ist, aus 5 von solchen 6 Punkten, wie sie dem Verschwinden der Covariante $6^{\text{ter}}$ Ordnung einer biquadratischen Form entsprechen. Man kann durch passende Wahl der auf der Geraden gezählten Veränderlichen $z_1$, $z_2$ dieser Gruppe die Form geben:

$$z_1 (z_1^4 - z_2^4) = 0,$$

und die entsprechenden Werthe von $\frac{z_1}{z}$ sind also:

$$(2) \qquad 0, \ 1, \ i, \ -1, \ -i. \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Der projectivische Charakter der Punktreihe ist hierdurch völlig gegeben, und man kann also nach § 7. diese Tangenten durch Kegelschnitte construiren, indem man nur die Werthe (2) verschieden auf die 5 Seiten des Fünfseits vertheilt. Aber von den 120 Anordnungen, welche die Grössen (2) hier gestatten, geben jedesmal 4 dasselbe, indem sie aus (2) durch Multiplication der Reihe mit $1$, $i$, $-1$, $-i$ erhalten werden können. Es giebt also in der That nur 30 verschiedene Tangenten dieser Art; sie bilden 5 Gruppen, je nach der Seite des Fünfseits, welcher der bevorzugte Werth 0 entspricht, und die 6 Permutationen einer Gruppe erhält man, indem man 1 an seiner Stelle lässt. Unter diesen 6 sind dann immer 2, die durch Vertauschung von $i$ und $-i$ entstehen und bei denen also auf denselben Seitenpaaren harmonische Paare von Schnittpunkten liegen. So finden sich unter diesen Tangenten 5 Gruppen, bestehend aus Abtheilungen von je 2, wie dieselben jedesmal den 3 Curven $R' = 0$ der 5 Gruppen von $R$, welche sie berühren, zugeordnet sind.

## § 9.

## Die gemeinsamen Tangenten von $B = 0$ und $C = 0$.

Durch die 5 vierfachen Tangenten, die Seiten des Fünfseits, so wie durch die 20 Tangenten von den Ecken des Fünfseits, welche in § 7. gegeben wurden, und die im vorigen §. angegebenen 30 Tangenten, ist die Curve $A = 0$ mehr als hinreichend in rein geometrischer Weise definirt.

Die Curve $B = 0$, oder vielmehr die beiden Curven

$$(1) \qquad \begin{aligned} B_1 &= A + \varkappa P = 0 \\ B_2 &= A - \varkappa P = 0, \end{aligned}$$

in welche dieselbe im vorigen §. zerlegt wurde, sind hierdurch ebenfalls geometrisch gegeben, bis auf eine einzige Bestimmung, welche darauf hinauskommt, die besonderen Curven des Büschels $A + \varrho P = 0$ zu bestimmen, welche $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ sind. Diese Aufgabe wird nun in mehr als hinreichender Weise durch die Bestimmung der gemeinschaftlichen Tangenten von $B = 0$, $C = 0$ geleistet, und diese führt zugleich überhaupt auf die wichtigsten Elemente in der Theorie des Fünfseits.

Wenn $B$ und $C$ zugleich verschwinden, so ist auch $M = 0$, $N = 0$, und nach den Sätzen des § 5. verschwindet dann $\alpha$; dass der Fall, in welchem $f$ das Produkt einer cubischen Form mit ihrer quadratischen Covariante wird, nicht $B = 0$, $C = 0$ giebt, sieht man sofort; der Fall, wo $f$ einen dreifachen Factor hat, kann hier überhaupt nicht eintreten; daher bleibt nur übrig, dass $j = 0$, und dass also durch Einführung passender Coordinaten auf einer der gesuchten Tangenten das auf dieser liegende Punktsystem durch die Gleichung

$$z_1^5 - z_2^5 = 0$$

dargestellt werden kann. Die 5 Punkte, in denen eine solche Tangente das Fünfseit schneidet, haben also von 2 Punkten der Geraden die Abstandsverhältnisse:

$$(2) \qquad \frac{z_1}{z_2} = 1, \ \omega, \ \omega', \ \omega'', \ \omega''',$$

wo die $\omega$ in irgend welcher Anordnung die imaginären $5^{ten}$ Wurzeln der Einheit darstellen; sie bilden *ein cyclisch-projectivisches System* mit Bezug auf die festen Elemente 0 und $\infty$.

Wir erhalten die verschiedenen Tangenten dieser Art, indem wir die 5 Grössen (2) in allen verschiedenen Anordnungen der Seiten des Fünfseits entsprechen lassen. Aber diejenigen Permutationen, welche aus einer Anordnung durch Multiplication mit einer der Grössen (2) selbst hervorgebracht werden können, liefern offenbar keine verschiedenen Tangenten. Man kann also bei diesen Permutationen die 1

immer an ihrer Stelle lassen, sodass diese immer einer bestimmten ersten Seite des Fünfseits entspricht. Aber auch die übrig bleibenden 24 Permutationen geben noch nicht sämmtliche verschiedene Tangenten. Denn wenn man statt aller Grössen (2) ihre reciproken setzt, so erhält man eine Permutation, welche auch durch Veränderung der Bezeichnung, durch Vertauschung der auf der Tangente gewählten Coordinaten $z_1$, $z_2$ erhalten werden. Bezeichnet man also die 4 imaginären $5^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit durch

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,$$

so genügt es, an die zweite Stelle $\omega$ oder $\omega^2$ zu setzen.

So bleiben denn nur 12 Permutationen übrig, welche verschiedene Tangenten liefern, nämlich:

$$(3)\quad \begin{array}{lllll@{\qquad}lllll}
1, & \omega, & \omega^2, & \omega^3, & \omega^4 & 1, & \omega^2, & \omega^4, & \omega, & \omega^3\\
1, & \omega, & \omega^3, & \omega^4, & \omega^2 & 1, & \omega^2, & \omega, & \omega^3, & \omega^4\\
1, & \omega, & \omega^4, & \omega^2, & \omega^3 & 1, & \omega^2, & \omega^3, & \omega^4, & \omega\\
1, & \omega^2, & \omega^3, & \omega, & \omega^4 & 1, & \omega, & \omega^4, & \omega^3, & \omega^2\\
1, & \omega^2, & \omega, & \omega^4, & \omega^3 & 1, & \omega, & \omega^3, & \omega^2, & \omega^4\\
1, & \omega^2, & \omega^4, & \omega^3, & \omega & 1, & \omega, & \omega^2, & \omega^4, & \omega^3.
\end{array}$$

Die Tafel dieser Permutationen ist so eingerichtet, dass links positive, rechts negative Permutationen stehen; ferner sind dieselben einander horizontal so zugeordnet, dass die rechte Seite aus der linken bei den ersten 3 Reihen durch Uebergang von $\omega$ in $\omega^2$, bei den 3 letzten durch Uebergang von $\omega$ in $\omega^3$ entsteht.

Die Permutationen (3) stehen nun zu den der beiden Curven $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ in einer merkwürdigen Beziehung. Bilden wir für ein Werthsystem

$$\frac{z_1}{z_2} = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon$$

die Invarianten $A$, $P$, so ist die erstere eine symmetrische, die zweite (Produkt der Differenzen) eine alternirende Function. Wenn daher in dem vorliegenden Falle das Zeichen von $\varkappa$ so bestimmt wird, dass für die erste Anordnung der Tafel (3) der Quotient $\frac{A}{P}$ den Werth $-\varkappa$ hat, so hat er diesen Werth auch für alle Permutationen der links stehenden Columne, den entgegengesetzten für alle Permutationen der rechts stehenden. Daher hat man den Satz:

*Die 6 Tangenten von $C$, welche den links stehenden Permutationen entsprechen, berühren die Curve $B_1 = 0$, die anderen die Curve $B_2 = 0$.*

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der Multiplicität der Tangenten über und befolge dabei die im vorigen §. benutzte Methode, welche hier aber zu einem tieferen Eingehen auf die algebraische Natur der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $R = 0$ nöthigt.

Da

$$R^2 = -\tfrac{1}{2}(AN^2 - 2BMN + CM^2)$$

$$M = 2AB - 3C, \qquad N = \frac{AC - B^2}{2},$$

so verschwindet mit $B$ und $C$ sowohl $M$ als $N$ und daher auch $R$.

Aber wenn eine dieser 12 Tangenten $R$ berührt, so muss sie dasselbe fünfmal berühren. Denn wenn man die Grössen

$$1,\ \omega,\ \omega',\ \omega'',\ \omega'''$$

so anordnen kann, dass 4 derselben 2 Involutionspaaren entsprechen, deren einer Doppelpunkt dem fünften entspricht, so trifft dasselbe offenbar noch zu, wenn man die Reihe mit irgend einer der Grössen $1, \omega, \omega', \omega'', \omega'''$ multiplicirt. Denn hierdurch werden die Doppelverhältnisse der 5 Grössen nicht geändert. Dieser Multiplication entspricht eine gewisse Permutation der Seiten des Fünfseits, durch welche dieselbe Werthereihe hervorgerufen wird; und man kann also 5 solcher Permutationen bilden, in Bezug auf welche das Punktsystem der Tangente die verlangte Spaltung zulässt. Dabei rückt die bevorzugte, dem Doppelpunkte der Involution entsprechende Seite der Reihe nach an jede Stelle; die Doppeltangente der berührten Curven kann also jede Seite des Fünfseits sein, und man sieht also, dass jede der 12 Tangenten aus jeder der 5 Gruppen eine Curve 3ter Classe $R' = 0$ berührt.

Diese Tangenten vertreten also $\frac{4.5}{2} \cdot 12 = 120$ Doppeltangenten von $R = 0$; und da jede der 12 Tangenten 5 der 15 Curven $R' = 0$ berührt, so müssen immer 4 dieselbe dieser Curven berühren. Nun ist ersichtlich, dass die Punktgruppe (2) ihre Eigenschaften bezüglich der Theilung in 2 Involutionspaare und einen Doppelpunkt der Involution nicht verlieren kann, wenn man alle $\omega$ durch das erste ausdrückt und dann $\omega$ durch $\omega^2$ ersetzt. Daher werden 2 Tangenten, deren Punktgruppen in (3) einander gegenüber gestellt sind und von denen nach dem Vorigen die eine $B_1 = 0$ die andere $B_2 = 0$ berührt, stets dieselben Curven $R' = 0$ berühren; und man kann auf solche Art zu jeder von jenen 12 Tangenten eine zugehörige mittelst der Curven $R' = 0$ construiren. Die 6 Paare aber, in welche so die Tangenten (3) zerfallen, kann man dann gerade auf 15 Arten zu zweien combiniren, und dieses liefert die 15.4 Tangenten, welche bei den 15 Curven $R' = 0$ eintreten.

Ich fasse dies in folgenden Satz zusammen:

*Die 12 Tangenten (3) bilden 6 Paare, von denen immer eine $B_1 = 0$, die andere $B_2 = 0$ berührt; jedes derselben berührt 5 Curven $R' = 0$, und zwar je eine aus jeder Gruppe, und jede der 15 Curven $R' = 0$ wird von einer anderen Combination zweier aus jenen 6 Paaren berührt.*

Für die vorliegenden Tangenten verschwindet identisch die binäre Covariante $j$, welche in Bezug auf das Schnittpunktsystem der fraglichen Tangente gebildet ist. Daher muss die entsprechende ternäre Bildung

$$j = (abu)^2 (acu)^2 (bcu)^2 a_z b_z c_z$$

für die der Tangente entsprechenden Werthe der $u$ verschwinden, sobald $z$ ein Punkt der Tangente selbst ist; d. h. $j$ muss, identisch in Bezug auf die $z$, den Factor $u_z$ enthalten. *Es muss also für ein solches Werthsystem der $u$ die Form $j$ in $u_z$ multiplicirt mit einer quadratischen Form übergehen*, welche symbolisch durch $M_z^2$ bezeichnet werden mag:

$$j = j_z^3 = M_z^2 \,.\, u_z \,.$$

Bilden wir nun hieraus die Polare

$$j_z j_y^2 = \tfrac{2}{3} M_z M_y u_y + \tfrac{1}{3} M_y^2 u_z \,,$$

so erhalten wir durch Einführung derselben:

$$\tau = \tau_z^2 = (jj'u)^2 j_z j_z' = \tfrac{1}{3} (jMu)^2 j_z u_z = \tfrac{1}{9} (MM'u)^2 \,.\, u_z^2 .$$

*Die Covariante $\tau$ enthält also den Factor $u_z$ doppelt* und unterscheidet sich von $u_z^2$ nur um eine in Bezug auf die $z$ constante Grösse.

Aber auch der Ausdruck (vergl. die Bezeichnung des vorigen §.):

$$D\tau = \Sigma v_i \frac{\partial \tau}{\partial u_i} \,,$$

in welcher die $v$ ganz willkürliche Grössen sind, *enthält dann noch den Factor $u_z$*. Bezeichnen wir nämlich die aus $\varphi = \varphi_z^\alpha$ durch die Operation $D$ entstehenden Functionen zugleich symbolisch durch

$$D\varphi = (D\varphi)_z^\alpha$$
$$D^2\varphi = (D^2\varphi)_z^\alpha$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so ist, weil die $u$ in $\tau$ sowohl explicite, als in den Symbolen $j$ vorkommen:

$$\begin{aligned} D\tau = (D\tau)_z^2 &= 2 (j\,Dj\,u)^2 j_z Dj_z + 2 (jj'u)(jj'v) j_z j_z' \\ &= \tfrac{2}{3} (M\,Dj\,u)^2 u_z Dj_z + \tfrac{4}{3} (jMu)(juv) M_z j_z + \tfrac{2}{3} (jMu)(jMv) j_z u_z \\ &= \tfrac{2}{3} (M\,Dj\,u)^2 u_z Dj_z + \tfrac{4}{9} (M'Mu)(M'uv) u_z M_z \\ &\qquad + \tfrac{2}{9} (M'Mu)(uMv) u_z M_z' + \tfrac{2}{9} (M'Mu)(M'Mv) u_z^2 \\ &= N_z \,.\, u_z \,, \end{aligned}$$

was zu beweisen.

Bilden wir nun aus

$$B = (i\tau u)^2$$

zunächst $DB$, so erhalten wir:

$$DB = (Di + \tau u)^2 + (iD\tau u)^2 + 2 (i\tau u)(i\tau v) \,.$$

Von diesen Ausdrücken entsteht der erste aus $\tau_z^2$, wenn man darin

statt der $z$ die aus den $u$ und den Symbolen $Di$ zusammengesetzten Unterdeterminanten einführt, er geht also in

$$\tfrac{1}{9}(MM'u) \,.\, (u\ Di\ u)^2 = 0$$

über. Ebenso entsteht der zweite aus $D\tau$, wenn man statt der $z$ die aus den $u$ und den Symbolen $i$ gebildeten Unterdeterminanten setzt; er wird also:

$$(Niu)\,(uiu) = 0\,.$$

Der dritte Theil von $DB$ entsteht endlich, wenn man in

$$\tau_z \tau_y = \tfrac{1}{9}(MM'u)^2\, u_z u_y$$

die $z$ durch Unterdeterminanten der $i$, $u$, die $y$ durch solche der $i$, $v$ ersetzt, und wird also:

$$\tfrac{1}{9}(MM'u)^2\,(uiu)\,(uiv) = 0\,.$$

Man hat also identisch $DB = 0$; und daraus folgt, dass die 12 Tangenten, von denen die Rede ist, mindestens *Doppeltangenten* von $B$ sein müssen; denn die Gleichung $DB = 0$ des Berührungspunktes verschwindet identisch.

Dass sie aber keine höheren sind, folgt aus der Bildung von $D^2B$. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} D^2B &= (D^2i\ \tau\ u)^2 + (i\ D^2\tau\ u)^2 + 2\,(Di\ D\tau\ u)^2 \\ &\quad + 4\,(Di\ \tau\ u)\,(Di\ \tau\ v) + 4\,(i\ D\tau\ u)\,(i\ D\tau\ v) + 2\,(i\tau v)^2. \end{aligned}$$

Von den Theilen der rechten Seite verschwinden nun die 5 ersten aus denselben Gründen, wie die Terme von $DB$. Aber es bleibt der Ausdruck

$$D^2B = 2\,(i\tau v)^2 = \tfrac{2}{9}(MM'u)^2\,(iuv)^2$$

übrig, welcher nicht verschwindet.

Die Berührungspunkte der Doppeltangenten mit $B = 0$ werden also durch die Gleichung:

$$(i\,u\,v)^2 = 0$$

gegeben. Aber wenn eine Form $5^{ten}$ Grades die Gestalt $z_1^5 - z_2^5$ annimmt, so sind $z_1$, $z_2$ zugleich die Factoren von $i$, und die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ werden ternär als Durchschnitte der Geraden $u_z$ mit $i_z^2 = 0$ bestimmt, sodass das Produkt ihrer Gleichungen in der Ebene

$$(i\,u\,v)^2 = 0$$

ist. Diese sind also mit den vorigen identisch und man kann den Satz aussprechen:

*Von den 12 Geraden, welche auf den Seiten des Fünfseits cyclisch-projectivische Reihen ausschneiden, sind 6 Doppeltangenten von $B_1 = 0$, 6 Doppeltangenten von $B_2 = 0$; die Berührungspunkte aber sind jedesmal die festen Punkte, in Bezug auf welche die cyclische Projectivität eintritt.*

Es knüpft sich an die Existenz dieser Doppeltangenten sofort die Bemerkung,

*dass die Curven $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ vom Geschlechte $p = 0$ sind.*

Denn sie haben je 6 Doppeltangenten und je 5 vierfache Tangenten; daher:

$$p = \frac{9.8}{2} - 6 - 5.6 = 0.$$

Auf dieselbe Weise, wie $DB$ und $D^2B$ untersucht wurde, können wir nun $DC$ untersuchen. Da

$$C = (\tau\tau' u)^2,$$

so hat man:

$$DC = 2(\tau\; D\tau\; u)^2 + 2(\tau\tau' u)(\tau\tau' v)$$
$$D^2C = 2(\tau\; D^2\tau\; u)^2 + 2(D\tau\; D\tau'\; u)^2 + 8(\tau\; D\tau\; u)(\tau\; D\tau\; v) + 2(\tau\tau' v)^2$$
$$D^3C = 2(\tau\; D^3\tau\; u)^2 + 6(D\tau\; D^2\tau\; u)^2$$
$$+ 12(\tau\; D^2\tau\; u)(\tau\; D^2\tau\; v) + 12(D\tau\; D\tau'\; u)(D\tau\; D\tau'\; v) + 12(\tau\; D\tau\; v)^2.$$

Von den Theilen der rechten Seiten verschwinden zunächst wie im Früheren alle, bei denen $\tau$ mit $u$ in einer Determinante verbunden vorkommt, dann aber auch alle, in denen $D\tau$ zweimal mit $u$ in einer Determinante verbunden erscheint. Man hat also sofort:

$$DC = 0, \qquad D^2C = 2(\tau\tau' v)^2,$$
$$D^3C = 12(D\tau\; D\tau'\; u)(D\tau\; D\tau'\; v) + 12(\tau\; D\tau\; v)^2.$$

Da nun hier

$$\tau = \tfrac{1}{9}(MM'u)^2 \,.\, u_z^2,$$

so kann man die Symbole $\tau$, $\tau'$ durch $u$ ersetzen, wenn man nur mit $\frac{1}{9}(MM'u)^2$ multiplicirt. Es wird daher

$$D^2C = \tfrac{2}{81}(MM'u)^2(M''M'''u)^2(uuv)^2 = 0,$$
$$D^3C = 12(D\tau\; D\tau'\; u)(D\tau\; D\tau'\; v) + \tfrac{4}{3}(MM'u)^2(u\; D\tau\; v)^2.$$

Das letzte Glied von $D^3C$ verschwindet aus den oft angeführten Gründen. Für das erste können wir, da $D\tau = N_z u_z$, setzen:

$$D^3C = 6(N\; D\tau'\; u)(u\; D\tau'\; v),$$

und dieses verschwindet wieder aus den gleichen Gründen. Man hat also:

$$C = 0, \quad DC = 0, \quad D^2C = 0, \quad D^3C = 0;$$

die 12 fraglichen Tangenten zählen daher als Tangenten von $C$ wenigstens vierfach.

Gehen wir nun zu der Identität für $R^2$ zurück. Setzen wir darin statt der $u$ die Grössen $u + \varepsilon v$, und lassen $\varepsilon$ gegen Null convergiren, so erhalten wir in der Grenze für

$$A : A \ldots$$
$$B : \frac{\varepsilon^2}{1.2} D^2 B \ldots$$
$$C : \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4} D^4 C \ldots$$
$$M : A\varepsilon^2 D^2 B \ldots$$
$$N : \frac{\varepsilon^4}{48} AD^4 C - \frac{\varepsilon^4}{8}(D^2 B)^2 \ldots$$

Dagegen muss $R$ nach dem Vorigen erst mit dem Gliede

$$\frac{\varepsilon^5 D^5 R}{1.2.3.4.5}$$

beginnen. Behält man also in der Identität

$$R^2 = -\tfrac{1}{2}(AN^2 - 2BMN + CM^2)$$

nur diejenigen Glieder bei, welche übrig bleiben, indem man durch $\varepsilon^8$ dividirt und dann $\varepsilon = 0$ setzt, so erhält man links Null und es bleibt also:

$$0 = A\left\{\frac{AD^4C}{48} - \frac{(D^2B)^2}{8}\right\}^2 - A(D^2B)^2\left\{\frac{AD^4C}{48} - \frac{(D^2B)^2}{8}\right\} + \frac{A^2D^4C}{24}(D^2B)^2,$$

oder:

$$0 = \{AD^4C + 18(D^2B)^2\}^2.$$

Es ist demnach $D^4C$ mit $(D^2B)^2$ proportional, oder mit anderen Worten, die 4 Berührungspunkte, welche eine der 12 Tangenten mit $C = 0$ gemein hat, fallen paarweise in die Berührungspunkte mit $B = 0$ zusammen. Diese merkwürdige Eigenschaft der Curve $C = 0$, auf welcher, wie man sehen wird, ihr Zusammenhang mit der Lösung der Gleichungen $5^{ten}$ Grades beruht, lässt sich in folgendem Satze ausdrücken:

*Die Curve $C = 0$ hat 2 . 6 Doppelwendetangenten; in den 12 Wendepunkten, welche 6 dieser Tangenten entsprechen, wird sie von der Curve $B_1 = 0$, in den 12 anderen von $B_2 = 0$ berührt.*

Diese Doppelwendetangenten stehen dualistisch Punkten einer Ordnungscurve gegenüber, in welchen 2 Rückkehrpunkte mit verschiedenen Tangenten zusammenstossen. Eine solche Tangente zählt vierfach und erniedrigt das Geschlecht um 6. Das Geschlecht von $C = 0$ ist also:

$$p = \frac{29.28}{2} - 5 \cdot \frac{12.11}{2} - 12 \cdot 6 = 4.$$

*Die Curve $C = 0$ ist also vom Geschlecht $p = 4$*, ein Umstand, welcher weiter unten benutzt werden wird.

Ich bemerke noch, dass die gefundenen Tangenten wirklich die nöthige Zahl gemeinsamer Tangenten liefern, welche $B = 0$ und $C = 0$ oder $R = 0$ und $C = 0$ besitzen. Die Gesammtzahl der gemeinschaftlichen Tangenten von $B = 0$, $C = 0$ ist 600; von diesen fallen $5.8.12 = 480$

in die Seiten des Fünfseits, es bleiben also 120 zu suchen. Sollen diese durch die gefundenen 12 repräsentirt werden, so muss jede zehnfach zählen. Dies ist in der That der Fall; und zwar sieht man es sofort ein, wenn man die Figur dualistisch umformt. Dann entspricht einer solchen Tangente von $C = 0$, wie schon gesagt, ein Punkt, in welchem 2 Rückkehrpunkte mit verschiedenen Tangenten sich vereinigen; der Tangente, sofern sie $B = 0$ berührt, entspricht ein Doppelpunkt, dessen Tangenten mit denen der Rückkehrpunkte zusammenfallen. Jeder Zweig der letzteren Curve hat mit dem Zweige der anderen, dessen Tangente die gleiche ist, 3, mit dem anderen 2 Punkte gemein, sodass sich in der That 10 Schnittpunkte an einer solchen Stelle vereinigen.

Die gemeinsamen Tangenten von $R = 0$, $C = 0$ sind $45 . 30$; von ihnen fallen $5 . 12 . 18$ in die Seiten des Fünfseits, es bleiben also 270 übrig. Von diesen sind 30 die gemeinsamen Tangenten von $A = 0$, $C = 0$, welche in § 8. gefunden wurden. Die übrigen 240 sind durch die 12 Doppelwendetangenten vertreten, deren jede bei $R = 0$ fünffach, bei $C = 0$ vierfach zählt.

Dagegen sind noch nicht alle gemeinsamen Tangenten der verschiedenen Curven $R' = 0$ gefunden. Es waren in § 6. noch 180 zu suchen; von diesen vertreten die 12 oben abgeleiteten $12 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 120$. Es bleiben 60 weitere zu finden.

## § 10.

## Zurückführung einer Gleichung fünften Grades auf die Tschirnhausen-Jerrard'sche Form, sobald $C = 0$.

Um im Folgenden auf den Zusammenhang dieser Untersuchung mit der Theorie der Gleichungen $5^{\text{ten}}$ Grades eingehen zu können, muss ich hier einiges aus der Theorie der binären Formen $5^{\text{ter}}$ Ordnung einschalten, was sich insbesondere auf den Fall bezieht, wo $C = 0$. Die betreffenden Resultate habe ich in den Göttinger Nachrichten, 1871, p. 103 veröffentlicht.

Ich setze voraus, dass $R$ nicht verschwindet. Die bekannte Aufgabe, eine Form $5^{\text{ter}}$ Ordnung als Summe dreier $5^{\text{ter}}$ Potenzen darzustellen, kann man dann so behandeln, dass man die linearen Covarianten $\alpha$ und $\delta$ als Veränderliche einführt; die Determinante $R$ derselben ist dann der Voraussetzung nach von Null verschieden, und man kann der vorgelegten Aufgabe die Gestalt geben, *es soll die Gleichung*

$$(1) \qquad f = \varkappa(\delta + m\alpha)^5 + \varkappa'(\delta + m'\alpha)^5 + \varkappa''(\delta + m''\alpha)^5$$

*zu einer identischen gemacht werden, indem man die 6 Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, $m$, $m'$, $m''$ passend bestimmt.*

Nun sind bekanntlich (vergl. z. B. Salmon, Lessons, $2^0$ ed. p. 138) $\delta + m\alpha$, $\delta + m'\alpha$, $\delta + m''\alpha$ die linearen Factoren von $j$, und also

(2) $$j = k(\delta + m\alpha)(\delta + m'\alpha)(\delta + m''\alpha).$$

Die typische Darstellung von $j$ durch $\alpha$ und $\delta$ ist aber (vergl. Clebsch und Gordan, Annali di matematica, Ser. II. vol. I, p. 39, wo nur der hier gewählten Bezeichnung entsprechend die numerischen Coefficienten zu verändern sind):

(3) $$R^2 j = -\delta^3 - \tfrac{3}{2} N\delta\alpha^2 + \tfrac{1}{2}(CM - BN)\alpha^3.$$

Die Grössen $m$, $m'$, $m''$ sind also die Wurzeln der cubischen Gleichung ($\delta = -m\alpha$ gesetzt):

(4) $$m^3 + \tfrac{3}{2} Nm + \tfrac{1}{2}(CM - BN) = 0,$$

während die Constante $k$ in (2) den Werth erhält:

(5) $$k = -\frac{1}{R^2}.$$

Nun ist ferner identisch nach p. 44 der citirten Abhandlung:

(6) $$R^4 f = \left(\frac{2A^2}{3} - B\right)\delta^5 + 5\left(\frac{N}{2} - \frac{AM}{3}\right)\delta^4\alpha + 10\cdot\frac{M^2\delta^3\alpha^2}{6} + \cdots;$$

wenn daher die $m$ aus (4) bestimmt sind, erhält man die Werthe der $\varkappa$ durch Vergleichung von (1) und (6) aus den linearen Gleichungen:

(7) $$\begin{cases} \frac{1}{R^4}\left(\frac{2A^2}{3} - B\right) = \varkappa + \varkappa' + \varkappa'' \\ \frac{1}{R^4}\left(\frac{N}{2} - \frac{AM}{3}\right) = \varkappa m + \varkappa' m' + \varkappa'' m''. \\ \frac{M^2}{6R^4} = \varkappa m^2 + \varkappa' m'^2 + \varkappa'' m''^2. \end{cases}$$

Denken wir uns nun, dass $C$, die Discriminante von $j$, gegen Null convergire. Alsdann sind $m$, $m'$, $m''$ nicht mehr sämmtlich verschieden, sondern zwei derselben, etwa $m'$ und $m''$, nähern sich einem gemeinsamen Werthe. Für $C = 0$ verwandelt sich (4) in

(8) $$(m + B)\left(m - \frac{B}{2}\right)^2 = 0.$$

Wenn also $C$ gegen Null convergirt, dürfen wir setzen:

$$m = -B, \quad m' = \frac{B}{2} + \varrho, \quad m'' = \frac{B}{2} - \varrho,$$

wo $\varrho$ eine gegen Null convergirende Grösse ist. Sofort verwandelt sich (1) in

(9) $$f = \varkappa(\delta - B\alpha)^5 + \lambda\left(\delta + \frac{B}{2}\alpha\right)^5 + 5\mu\alpha\left(\delta + \frac{B}{2}\alpha\right)^4,$$

wo der Kürze wegen durch $\lambda$, $\mu$ die Ausdrücke bezeichnet sind:

$$\lambda = \varkappa' + \varkappa'', \quad \mu = (\varkappa' - \varkappa'')\varrho.$$

Die Gleichungen (7) gehen nun in die folgenden linearen Bestimmungsgleichungen für $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ über:

$$\frac{1}{R^4}\left(\frac{2A^2}{3}-B\right)=\varkappa+\lambda$$

$$\frac{1}{R^4}\left(\frac{B}{4}+\frac{2A^2}{3}\right)=\varkappa-\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{B}$$

$$\frac{1}{R^4}\cdot\frac{2A^2}{3}=\varkappa+\frac{\lambda}{4}+\frac{\mu}{B},$$

aus welchen sich ergiebt:

$$\varkappa=\frac{2A^2}{3R^4},\qquad \lambda=-\frac{B}{R^4},\qquad \mu=\frac{B^2}{4R^4}. \tag{10}$$

In der Gleichung (9) setze ich nun:

$$\begin{cases}\xi=\delta-B\alpha\\ \eta=\delta+\frac{B}{2}\alpha.\end{cases} \tag{11}$$

Mit Hülfe der Werthe (10) verwandelt dieselbe sich dann in

$$R^4 f=\tfrac{2}{3}A^2\xi^5-\tfrac{5}{6}B\eta^4\xi-\frac{B}{6}\eta^5. \tag{12}$$

Dieses ist die **Tschirnhausen-Jerrard**'sche Form, bei welcher die Terme mit $\xi^4\eta$, $\xi^3\eta^2$, $\xi^2\eta^3$ verschwunden sind. Man kann also, sobald $C=0$, diese Form immer durch Einführung der linearen Covarianten $\xi$, $\eta$ aufs Leichteste hervorrufen, und die Coefficienten von $f$ werden einfachste Invarianten. Man kann dies in folgendem Satze ausdrücken:

*Wenn in einer Gleichung* 5^ten^ *Grades* $C=0$, *so geht sie durch die lineare Substitution*

$$x=\frac{\delta-B\alpha}{\delta+\frac{B}{2}\alpha} \tag{13}$$

*in die Tschirnhausen-Jerrard'sche Form über:*

$$x^5-\frac{B}{4A^2}(5x+1)=0. \tag{14}$$

Bekanntlich beruht **Hermite**'s Auflösung der Gleichungen 5^ten^ Grades auf einer Lösung der Gleichung (14) mit Hülfe der elliptischen Functionen. Sobald die Invariante $C$ einer Gleichung 5^ten^ Grades verschwindet, ist durch das Vorige die Zurückführung der Gleichung auf diese Form, also ihre Lösung im **Hermite**'schen Sinne, gegeben. Ist bei der gegebenen Gleichung aber $C$ von Null verschieden, so kann man die Aufgabe, die Gleichung 5^ten^ Grades zu lösen, darin setzen: *dass mittelst einer höheren Transformation die Gleichung in eine solche mit verschwindendem $C$ verwandelt werden soll.*

Aber in unserer geometrischen Interpretation heisst dies nichts anderes, *als dass irgend eine Tangente der Curve $C=0$ gefunden*

*werden soll.* Hierin liegt das grosse Interesse, welches gerade das Studium der Curve $C = 0$ darbietet. Es wird zu zeigen sein, dass man Tangenten von $C = 0$ finden kann, ohne Gleichungen von höherem als dem $3^{ten}$ Grade zu lösen; und sodann wird es sich darum handeln, die vorliegende Methode mit derjenigen zu vergleichen, welche Jerrard angewandt hat, um eine beliebige Gleichung $5^{ten}$ Grades in die Form (14) zu bringen. Dies, unter Anderem, wird ein Gegenstand der folgenden Betrachtungen sein.

§ 11.

## Zwei mit $C = 0$ eindeutig zusammenhängende Curven. Charakter der linearen Covarianten.

Durch das Vorige sind auf jeder Tangente der Curve $C = 0$ zwei ausgezeichnete Punkte gegeben, welche durch die Durchschnitte derselben ($u_z = 0$) mit den beiden Geraden

$$\delta_z + \frac{B}{2}\,\alpha_z = 0\,, \qquad \delta_z - \frac{B}{2}\,\alpha_z = 0$$

bestimmt werden. Die letztern Ausdrücke werden dabei jetzt ternär gebildet gedacht, und für die $u$ sollen darin die Coordinaten der fraglichen Tangente gesetzt sein.

*Indem wir diese beiden Punkte als Punkte $x$, $y$ einer quadratischen Substitution* (§ 1.) *benutzen, geht die gegebene Gleichung $f = 0$ in eine andere über, welche die Form* (14) *hat.*

*Wenn wir also eine Tangente von $C = 0$ kennen und diese beiden Punkte auf ihr bestimmt haben, so haben wir die Aufgabe gelöst, eine gegebene Gleichung $5^{ten}$ Grades in die Jerrard'sche Form zu bringen.*

Bezeichnen wir die Curve $C = 0$ als die *Curve der $u$*, insofern wir die Coordinaten ihrer beweglichen Tangente mit $u$ bezeichnen, so entspricht dieser Curve eindeutig eine *Curve der $x$* und eine *Curve der $y$*. Der geometrische Zusammenhang zwischen den Elementen $u$, $x$, $y$ kann folgendermassen gefasst werden.

Wenn man auf einer Geraden eine Gruppe $f = a_z^5$ von 5 Punkten gegeben hat, so giebt es Punkte, deren Polarsystem in Bezug auf jene 5 Punkte ein harmonisches ist. Diese Punkte sind durch das Verschwinden der Invariante $j$ des Polarsystems $a_z^4 a_t$ gegeben. Sie werden also aus der Gleichung

$$0 = j = (ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2\,a_t\,b_t\,c_t$$

gefunden. Ihre Zahl ist 3.

Wenn aber die Gerade eine Tangente von $C = 0$ ist und das gegebene Punktsystem aus den Schnittpunkten mit den Seiten des Fünf-

seits besteht, so fallen 2 von den 3 Punkten zusammen, da $j$ die Form annimmt (vergl. den vorigen §.):

$$R^2 j = -\left(\delta + \frac{B}{2}\alpha\right)^2 (\delta - B\alpha).$$

*Es giebt also auf jeder Tangente von $C = 0$ einen einfach und einen doppelt zählenden Punkt, dessen Polarsystem ein harmonisches ist. Der doppelt zählende ist der Punkt $x$, der einfach zählende der Punkt $y$ der quadratischen Substitution, welche die gegebene Gleichung auf die Jerrard'sche Form zurückführt.*

Eine Anzahl von Punkten $x$ und $y$ ist bereits bekannt. In § 9. wurde gezeigt, dass wenn man auf einer der 12 Doppelwendetangenten die Wendepunkte zu Grunde legt, das Schnittpunktsystem auf derselben durch

$$z_1^5 - z_2^5 = 0$$

gegeben ist. Daher ist jeder der Wendepunkte von $C = 0$ sowohl ein Punkt $x$, als ein Punkt $y$, und diese Punkte repräsentiren je 24 Punkte beider Curven, und zwar Paare wechselseitig entsprechender.

Ebenso entstand auf den 30 gemeinsamen Tangenten von $A = 0$, $C = 0$ ein Punktsystem:

$$z_1(z_1^4 - z_2^4) = 0.$$

Der Punkt $z_1 = 0$ ist also ein Punkt $y$; diese 30 Tangenten schneiden daher die Seiten des Fünfseits in je 6 Punkten $y$, deren entsprechende $x$ die andern Doppelpunkte der auf diesen Tangenten entstehenden Involution sind.

Das eindeutige Entsprechen zwischen den Ortscurven der $x$ und den Ortscurven der $y$ wird nun vermittelt durch die linearen Covarianten der binären Form 5ter Ordnung und die aus ihnen abgeleiteten ternären Gebilde.

Wenn es eine allgemeine Eigenschaft der Invarianten binärer Formen ist, auf Classencurven in der Ebene zu führen, so ist es ebenso eine charakteristische Eigenschaft linearer Covarianten einer binären Form, dass die ihnen entsprechenden ternären Gebilde eindeutige Transformationen vermitteln, durch welche jene Curven in Ordnungscurven, also zugehörige Formen des Vielseits in Covarianten übergeführt werden. Denn indem man 2 der ternären Gebilde, welche aus 2 linearen Covarianten der binären Form entstehen, gleich Null setzt, für die $u$ aber die Coordinaten der beweglichen Tangenten einer jener Classencurven setzt, erhält man 2 Gleichungen ersten Grades, vermöge deren die $x$ Functionen der $u$ werden; diese selbst genügen der Gleichung der Classencurve, und man hat also das Schema der eindeutigen Transformation einer Classencurve in eine Ordnungscurve vor sich.

In dem vorliegenden besonderen Falle wird der Uebergang vermittelt

für die Curve der $x$ durch die Gleichungen:

$$\delta_x + \frac{B}{2}\alpha_x = 0, \qquad u_x = 0;$$

für die Curve der $y$ durch die Gleichungen:

$$\delta_y - B\alpha_y = 0, \qquad u_y = 0.$$

Indem die eine der benutzten linearen Covarianten die evidente $(u_z)$ ist, tritt die Besonderheit ein, dass die Punkte auf der entsprechenden Geraden liegen.

Um die Ordnung der resultirenden Curven zu ermitteln und die Art des Zusammenhanges dieser Curven mit $C = 0$ genauer einzusehen, muss ich zuerst die lineare Covariante $\alpha$ untersuchen, was im folgenden §. geschehen soll.

## § 12.

## Die lineare Covariante $\alpha$.

Die ternäre Bildung $\alpha$ entsteht nach § 5. aus

$$i = i_z^4 = (bcu)^4 b_z c_z,$$

indem man den Ausdruck bildet:

$$\alpha_z = (iau)^2 (i'au)^2 a_z.$$

Verbindet man die Gleichung $\alpha_z = 0$ mit $u_z = 0$, so erhält man einen Punkt $z$, welcher durch die Gleichung

$$(1) \qquad (\alpha u w) = 0$$

gegeben ist ($w$ die laufenden Coordinaten). Dieser Punkt bezeichnet die Stelle der Geraden $u$, welcher dem Verschwinden der zu ihren Schnittpunkten mit dem Fünfseit gehörenden linearen Covariante $\alpha$ entspricht.

Lässt man nun die $w$ Constante, die $u$ veränderliche Grössen bezeichnen, so erhält man in (1) ein die $w$ als lineare Parameter enthaltendes *System von Curven* 13ter *Classe; die Tangenten einer solchen Curve sind diejenigen Geraden, welche das Fünfseit so schneiden, dass der zugehörige Verschwindungspunkt der linearen Covariante $\alpha$ auf der Geraden $w$ liegt.*

Die Curven dieses Systems haben gemeinschaftliche Tangenten. Man erhält sie, wenn man in (1) die Coefficienten der $w$ verschwinden lässt, wenn man also setzt:

$$\alpha_2 u_3 - \alpha_3 u_2 = 0, \quad \alpha_3 u_1 - \alpha_1 u_3 = 0, \quad \alpha_1 u_2 - \alpha_2 u_1 = 0.$$

Die ersten 2 dieser Gleichungen, welche von der 13ten Classe sind, haben 169 gemeinsame Lösungen; sollen diese aber auch die 3te Gleichung befriedigen, so muss man die 12 Lösungen ausschliessen, für welche $u_3$ und $\alpha_3$ gleichzeitig verschwinden.

Je 2 der Curven (1) haben also 157 feste gemeinschaftliche Tangenten. Aber zunächst ist jede Seite des Fünfseits, da $\alpha$ vom $5^{\text{ten}}$ Grade in den Coefficienten ist, fünffache Tangente jeder Curve (1); und die Seiten des Fünfseits zählen also in Bezug auf irgend 2 jener Curven schon als 125 feste gemeinsame Tangenten; noch 32 bleiben zu finden.

Von diesen liefert nun 20 der in § 5. angegebenen Satz, dass die binäre Form $\alpha$ verschwindet, also die ternäre mit $u_z$ proportional wird, sobald das Schnittpunktsystem durch 3 Punkte einer cubischen Form und die beiden Punkte ihrer quadratischen Covariante dargestellt wird; oder was dasselbe ist, dass 3 von den Schnittpunkten 2 andern, fest bleibenden, gegenüber ein cyclisch-projectivisches System bilden. Das Punktsystem auf $u_z = 0$ ist dann durch irgend eine Anordnung der Werthe

$$\frac{z_1}{z_2} = 0, \ \infty, \ 1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^2, \qquad (\varepsilon^3 = 1)$$

repräsentirt. Dabei bleibt das System ganz ungeändert, wenn man diese 5 Grössen mit 1, $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ multiplicirt, oder wenn man alle Grössen durch ihre reciproken ersetzt, welches letztere nur eine Vertauschung der Bezeichnungen $z_1$, $z_2$ ist. Um alle Permutationen, welche *verschiedenen* Geraden entsprechen, zu finden, muss man also erstlich die 5 Seiten des Fünfseits in 2 und 3 theilen; die ersten ordnet man beliebig, von den 3 anderen kann man irgend einer den Werth 1 entsprechen lassen und hat nur noch die Wahl, den beiden übrigen $\varepsilon$, $\varepsilon^2$ oder $\varepsilon^2$, $\varepsilon$ zuzuordnen. Da jene erste Theilung auf 10 Arten ausgeführt werden kann, *so giebt es* 20 *solcher Geraden*; sie bilden 10 Gruppen zu zweien der Art, dass in jeder Gruppe dieselben 3 Seiten des Fünfseits die cyclisch-projectivischen Schnittpunkte liefern.

Diese 20 Geraden sind zugleich dreifache Tangenten von $R = 0$, denn der auf irgend einer der 3 letzten Seiten des Fünfseits liegende Schnittpunkt ist immer Doppelpunkt einer Involution, in welcher ein Paar durch die ersten beiden, ein anderes durch die übrig bleibenden gebildet wird. Die 3 Curven $R' = 0$, welche von einer solchen Tangente berührt werden, gehören also 3 verschiedenen Gruppen an, in denen je eine Seite unter den 3 letzten die Doppeltangente bildet, während die andern unter diesen dreien jedesmal ein Paar, endlich die beiden übrigen (ersten) Seiten ein festes Paar bilden. Solcher Combinationen giebt es 10 . 3; aber die Combination bleibt durch Vertauschung der Paare unter sich ungeändert, sodass jede Curve $R' = 0$ von zweien der 20 Geraden berührt wird.

*Diese* 20 *Geraden zählen dreifach als gemeinsame Tangenten der Curven* $R' = 0$ *und bilden somit die* 60 *gemeinsamen Tangenten, welche in* § 9. *noch fehlten.*

Was die noch übrigen gemeinsamen Tangenten des Systems (1) betrifft, so sind es keine anderen, als die 12 Doppelwendetangenten von $C = 0$, wodurch in der That die nöthige Zahl ergänzt wird. Dass wirklich diese Geraden Tangenten des Systems (1) sind, folgt aus dem Umstande, dass für diese die binären Formen $j$, $\alpha$ verschwinden, also die ternäre Form $\alpha_z$ mit $u_z$ proportional wird.

*Das System* (1) *besitzt also* 5 *feste fünffache und* 32 *feste einfache Tangenten.*

## § 13.

## Die Curven der $x$ und der $y$.

Ich werde nun zeigen, wie vermöge der Abbildungsgleichungen

$$\delta_x + \frac{B}{2}\,\alpha_x = 0, \qquad u_x = 0$$

die Curve $C = 0$ in die *Ortscurve der $x$, eine Curve* $12^{ter}$ *Ordnung*, übergeht, und vermöge der Abbildungsgleichungen

$$\delta_y - B\alpha_y, \qquad u_y = 0$$

in die *Curve der $y$, eine Curve* $18^{ter}$ *Ordnung.*

Um die angegebenen Ordnungen nachzuweisen, nimmt man die $x$ resp. $y$ auf einer Geraden $w_z = 0$ an und bestimmt die Zahl der beweglichen gemeinschaftlichen Tangenten der Curven

$$(1) \qquad (\delta u w) + \frac{B}{2}\,(\alpha u w) = 0, \qquad C = 0$$

und der Curven

$$(2) \qquad (\delta u w) - B\,(\alpha u w) = 0, \qquad C = 0.$$

Die erste Bestimmung liefert die Ordnung der Curve der $x$, die zweite die Ordnung der Curve der $y$. Die Gesammtzahl der gemeinsamen Tangenten der Curven (1) oder (2) ist $30 \,.\, 33 = 990$. Aber die Curven

$$(\delta u w) + \frac{B}{2}\,(\alpha u w) = 0, \qquad (\delta u w) - B\,(\alpha u w) = 0$$

haben aus den oft angeführten Gründen die Seiten des Fünfseits zu dreizehnfachen Tangenten; es werden also durch diese Seiten sofort $5 \,.\, 13 \,.\, 12 = 780$ gemeinsame Tangenten absorbirt, sodass 210 übrig bleiben. Sollen diese sich nun für (1) auf 12, für (2) auf 18 bewegliche reduciren, so müssen noch für (1) 198, für (2) 192 feste gemeinsame Tangenten nachgewiesen werden. Dies geschieht wie folgt.

Für $C = 0$ findet für binäre Formen die Gleichung statt:

$$R^2 j = -\left(\delta + \frac{B}{2}\,\alpha\right)^2 (\delta - B\alpha). \qquad (\S\ 11.)$$

Soll also für eine Gerade eines der Gleichungssysteme (1) oder (2) unabhängig von den $w$ bestehen, so muss entweder $R$ oder $j$ (neben $C$)

für das entsprechende Punktsystem verschwinden. Es kann sich also nur um die gemeinschaftlichen Tangenten von $A = 0$, $C = 0$ (§ 8.) oder um die 12 Doppelwendetangenten von $C = 0$ (§ 9.) handeln.

Was die ersteren betrifft, so verschwindet für sie weder $\delta$ noch $B.\alpha$. Daher können für diese Geraden nicht die beiden Ausdrücke $\delta + \frac{B}{2}\alpha$, $\delta - B\alpha$, sondern höchstens einer derselben verschwinden. Nun ist

$$\delta . (\gamma\alpha) - \gamma . (\delta\alpha) = \alpha . (\gamma\delta),$$

oder, wenn man die Werthe der Determinanten einführt:

$$\delta N - \gamma R = \frac{\alpha}{2}(CM - BN),$$

was man auch schreiben kann:

$$\left(\delta + \frac{B}{2}\alpha\right) N = \gamma R + \frac{CM\alpha}{2}.$$

Für die fraglichen 30 Tangenten verschwindet die rechte Seite ($R$ und $C$), nicht aber $N$; man hat also

$$\delta + \frac{B}{2}\alpha = 0,$$

und damit den Satz:

*Die* 30 *gemeinschaftlichen Tangenten von* $A = 0$, $C = 0$ *sind feste Tangenten des Systems*

$$(\delta u w) + \frac{B}{2}(\alpha u w) = 0.$$

Um ferner das Verhalten der 12 Doppelwendetangenten zu untersuchen, betrachte ich den Ausdruck:

$$\delta_s^2 = (\vartheta\alpha)\vartheta_s(\vartheta'\alpha)\vartheta_s' = (\vartheta\alpha)^2\vartheta_s'^2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta\vartheta')^2\alpha_s^2,$$

welcher für die binären Gebilde die Identität giebt:

$$\delta^2 = R\vartheta - \frac{AC - B^2}{4}\alpha^2.$$

Diese Identität besteht noch für ternäre Formen in der Gestalt:

$$(\delta u w)^2 = R . (\vartheta u w)^2 - \frac{AC - B^2}{4}(\alpha u w)^2, \tag{3}$$

wo $R$, $A$, $B$, $C$ mit den Veränderlichen $u$ geschrieben gedacht werden. Fügen wir die bekannte Gleichung

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}(A\tau^2 - 2Bi\tau + Ci^2)$$

oder:

$$(\vartheta u w)^2 . (\vartheta' u w)^2 \tag{4}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left\{A.(\tau u w)^2(\tau' u w)^2 - 2B.(i u w)^2(\tau u w)^2 + C.(i u w)^2.(i' u w)^2\right\}$$

hinzu, so sehen wir, dass wegen der in § 8. 9. entwickelten Eigenschaften von $\tau$, $B$, $C$ jede der 12 Doppelwendetangenten eine vierfache Tangente der Curve ist, welche durch das Nullsetzen der rechten Seite erhalten wird. Daher ist jede solche auch Doppeltangente

von $(\vartheta u w)^2 = 0$. Sie ist ferner nach § 9. fünffache Tangente von $R$, Doppeltangente von $B$, vierfache von $C$, einfache von $(\alpha u w) = 0$; daher ist sie mindestens sechsfache der durch Nullsetzen der rechten Seite von (4) entstehenden Curven, also mindestens dreifache Tangente von $(\delta u w) = 0$, und also auch mindestens dreifache Tangente der beiden Curven:

$$(\delta u w) + \frac{B}{2}(\alpha u w) = 0,$$

$$(\delta u w) - B(\alpha u w) = 0.$$

Giebt man aber der Gleichung (3) die Form:

$$\delta^2 - B^2\alpha^2 = R\vartheta - \frac{AC + 3B^2}{4}\alpha^2, \tag{5}$$

so kann man bemerken, dass wegen der Gleichung:

$$AD^4C + 18(D^2B)^2 = 0,$$

welche in § 9. entwickelt wurde, die Curve:

$$AC + 3B^2 = 0$$

die fraglichen Tangenten zu fünffachen Tangenten hat, dass also die durch Nullsetzen der rechten Seite von (5) entstehende Curve jede dieser Geraden zu siebenfachen Tangenten hat. Dies gilt dann auch für die linke Seite von (5), und es muss also eine der Curve $\delta - B\alpha = 0$, $\delta + B\alpha = 0$ dieselbe zur vierfachen Tangente haben. Und zwar kann dies überhaupt nur bei einer Verbindung von $\delta$ und $B \,.\, \alpha$ eintreten, da $B \,.\, \alpha = 0$ diese Eigenschaft jedenfalls nicht besitzt.

Wir können aber der schon in § 10. benutzten Identität:

$$R^2 j = -\delta^3 - \frac{3}{2}N\delta\alpha^2 + \frac{1}{2}(CM + BN)\alpha^3$$

die Gestalt geben:

$$\left(R^2 j + \frac{3}{2}C^2\alpha^3\right) + \frac{3}{4}(AC + 3B^2)\alpha^2(\delta - B\alpha) = (\delta + 2B\alpha)(\delta - B\alpha)^2.$$

Setzt man die linke Seite gleich Null, so erhält man eine Curve, welche jene Geraden zu 11fachen Tangenten hat; dasselbe muss von der rechten Seite gelten; und da $\delta + 2B\alpha = 0$ sie nach dem Obigen nur zur 3fachen haben kann, so muss $\delta - B\alpha = 0$ sie zur 4fachen haben. Also:

*Die Curven $\delta - B\alpha = 0$ haben die 12 Doppelwendetangenten von $C = 0$ zu vierfachen Tangenten.*

Aber weiter folgt, wenn man unter den $u$ die Coordinaten einer solchen Tangente versteht, dass der Ausdruck:

$$\frac{D^3\delta}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{D^2B}{2}\cdot D\alpha$$

noch identisch verschwinden muss. Dies giebt also den Satz:

*Alle andern Curven der Form $\delta - \lambda B\alpha = 0$ haben diese Geraden zu dreifachen Tangenten, so dass 2 Berührungspunkte*

*in den Wendepunkten von $C=0$, der dritte in dem Berührungspunkte mit $\alpha=0$ festliegen.*

Bezüglich der gemeinsamen Tangenten der Curven (1) vertreten also die 12 Doppelwendetangenten von $C=0$, da sie für $\delta+\frac{B}{2}\alpha=0$ dreifache Tangenten mit 2 Berührungspunkten in den Wendepunkten von $C=0$ sind, je 14 feste gemeinsame Tangenten, also im Ganzen $12 \,.\, 14 = 168$, was mit den 30 Tangenten $A=0$, $C=0$ die gesuchte Zahl 198 ausmacht.

Dagegen repräsentirt jede der 12 Doppelwendetangenten für die Curven (2) $4 \,.\, 4 = 16$ gemeinsame Tangenten, alle zusammen also die gesuchte Zahl von $12 \,.\, 16 = 192$ festen gemeinsamen Tangenten.

Der Beweis, dass die Curve des $x$ von der $12^{\text{ten}}$, die des $y$ von der $18^{\text{ten}}$ Ordnung ist, ist hiermit geleistet. Ich füge als Corollar folgendes hinzu. Ersetzt man die Gleichung des Fünfseits symbolisch durch:

$$f = a_z^5 = 0,$$

so wird für eine Tangente von $C=0$ mit Beibehaltung der gebrauchten Bezeichnungen die Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades:

$$a_{y-\xi x}^5 = 0,$$

und indem man nach $\xi$ ordnet, die Coefficienten von $\xi$, $\xi^2$, $\xi^3$ aber verschwinden lässt, erhält man die Gleichungen:

$$a_y\, a_x^4 = 0$$
$$a_y^2\, a_x^3 = 0$$
$$a_y^3\, a_x^2 = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen die $x$ und $y$; durch Elimination der $y$ erhält man die Ortscurve der $x$. Man kann dieselbe wirklich ausführen, mit Hilfe der von mir, Borchardt's Journal, Bd. 58. p. 273 gegebenen Methode. Beachtet man dann, dass gewisse Covarianten, z. B. die Hesse'sche Form, hier durch $f$ theilbar werden, und dass $f$ als Factor des Eliminationsresultats immer ausgelassen werden darf, so erhält man die Gleichung der Curve $12^{\text{ten}}$ Grades, auf welcher die $x$ sich befinden.

## § 14.

## Ueber die Abbildung von $C=0$ als Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, eine gegebene Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades auf die Jerrard'sche Form zurückzuführen, so kommt dieses, wie schon oben erwähnt, auf die Aufgabe hinaus, irgend eine Tangente von $C=0$ mit Hilfe von Wurzelausziehen zu finden. Man kann sich dies in folgender Weise etwa als möglich vorstellen; die Formeln der Transformation und damit die analytische Lösung der Frage, werde

ich weiterhin geben. Benutzen wir die Eigenschaft von $C = 0$, dass das Geschlecht dieser Curve $p = 4$ ist, und dass in Folge dessen sich die Curve auf eine Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung eindeutig abbilden lässt. Eine solche hat 6 Doppelpunkte, welche getrennt oder einander theilweise unendlich nahe liegen können. Wird die Ebene der Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung als Bild einer Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung aufgefasst, die 6 Doppelpunkte als Fundamentalpunkte, so ist die Curve das Bild des Schnitts der Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung; bildet man diese Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung sodann von einem ihrer Punkte (dessen Auffindung nur die Lösung einer quadratischen Gleichung fordert) auf die gewöhnliche Weise ab, so erhält man als Bild der Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung eine solche in der Ebene mit zwei dreifachen Punkten; trennt man diese mit Hilfe einer quadratischen Gleichung, so giebt jeder durch einen der dreifachen Punkte gezogene Strahl 3 Punkte der Curve, welche mittelst einer cubischen Gleichung getrennt werden können. Jedem dieser Punkte endlich entspricht eine Tangente von $C = 0$.

Die Abbildung der Curve $C = 0$ aber durch eine Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung, kann man sich folgendermassen entstehend denken. Legen wir Curven $29^{\text{ter}}$ Classe, welche die Seiten des Fünfseits zu eilffachen Tangenten, die 12 Doppelwendetangenten zu vierfachen haben. Dies involvirt im Ganzen:

$$5 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} + 12 \,.\, 10 = 450$$

Bestimmungen, während eine Curve $29^{\text{ter}}$ Classe von $\frac{29 \cdot 32}{2} = 464$ Bestimmungsstücken abhängt. Man kann also noch 12 weitere Bestimmungen hinzufügen, und es bleiben dennoch zwei lineare Parameter übrig, wie dies bei einem zur Abbildung brauchbaren Systeme nothwendig ist. Da die 12 Doppelwendetangenten durch eine quadratische Gleichung in 2 Systeme von 6 zerlegt werden können (§ 9.), so kann man als diese 12 weitern Bestimmungen diejenigen wählen, welche aussagen, dass die Curve $29^{\text{ter}}$ Classe *ein* solches System von 6 Geraden nicht nur in 4 Punkten berührt, sondern dass auch 2 der Berührungspunkte mit den Wendepunkten zusammenfallen.

Ist eine solche Curve:

$$\varphi_1 \alpha_1 + \varphi_2 \alpha_2 + \varphi_3 \alpha_3 = 0\,,$$

so fallen von den $29 \,.\, 30 = 870$ Tangenten, welche sie mit $C = 0$ gemein hat, $5 \,.\, 11 \,.\, 12 = 660$ in die Seiten des Fünfseits, $6 \,.\, 4 \,.\, 4 = 96$ in die eine Gruppe von Doppelwendetangenten der Curve $C = 0$, $6 \,.\, (2 \,.\, 4 + 2 \,.\, 5) = 108$ in die andre, und es bleiben:

$$870 - 660 - 96 - 108 = 6$$

bewegliche Tangenten übrig. Demnach geht dann durch die Transformation:

$$\varrho z_1 = \varphi_1 \quad , \quad \varrho z_2 = \varphi_2 \quad , \quad \varrho z_3 = \varphi_3$$

die Curve $C = 0$ in eine Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung über.

Die Formeln, welche unmittelbar die Coordinaten eines variabeln Punktes von $C = 0$ rational durch die Coordinaten einer Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung ausdrücken, welche der Durchschnitt einer Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung ist, erhält man, indem man die aus der quadratischen Substitution abgeleiteten Betrachtungen mit denjenigen vergleicht, durch welche Jerrard die Gleichungen $5^{\text{ten}}$ Grades in eine solche überführt, in welcher das zweite, dritte und vierte Glied den Coefficienten 0 hat. Auch diese Jerrard'sche Modification der Tschirnhausen'schen Methode ist, wenngleich nicht so direct wie die quadratische Substitution, einer Art geometrischer Deutung fähig; ich wende mich jetzt dazu, diese auseinanderzusetzen.

## § 15.

### Geometrische Interpretation der Jerrard'schen Methode.

Nach der Tschirnhausen'schen Methode setzt man, um eine Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades:

(1) $$f(\lambda) = 0$$

in eine andere umzuformen, in welcher gewisse Glieder fehlen:

(2) $$\xi = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4,$$

und bildet, indem man $\lambda$ aus (1), (2) eliminirt, eine neue Gleichung:

(3) $$F(\xi) = 0,$$

bei welcher man durch geschickte Wahl der Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ gewisse Coefficienten zum Verschwinden bringen kann.

Die Substitution (2) ist, da sie 5 Coefficienten enthält, für die Gleichungen $5^{\text{ten}}$ Grades die allgemeine, ebenso wie die quadratische Substitution. Es ist leicht, beide in einander überzuführen. Vergleicht man (2) mit der Formel (1) § 1., so muss für jedes Werthepaar $\lambda_i$, $\xi_i$, welches entsprechend die Gleichungen (1), (3) befriedigt, die Gleichung:

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4,$$

oder:

(4) $$\varphi(\lambda) = (a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4)\,\psi(\lambda)$$

stattfinden. Statt dessen kann man, *identisch für* $\lambda$, die Gleichung:

(5) $$\varphi(\lambda) = (a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4)\,\psi(\lambda) + (p + q\lambda)\,f(\lambda)$$

stattfinden lassen, und erhält dann eine eindeutige Bestimmung der Coefficienten von $\varphi$, $\psi$ durch $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ und umgekehrt, während für alle Werthe $\lambda_i$, welche der Gleichung $f = 0$ genügen, (5) in (4) übergeht.

Nimmt man $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ wie in § 1., und setzt:

$$f = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \varepsilon\lambda^4 + \zeta\lambda^5,$$

so zerfällt (5) in folgende Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} y_1 = a x_1 & & & & + p\alpha \\ y_2 = a x_2 + b x_1 & & & & + p\beta + q\alpha \\ y_3 = a x_3 + b x_2 + c x_1 & & & & + p\gamma + q\beta \\ 0 = \quad b x_3 + c x_2 + d x_1 & & & & + p\delta + q\gamma \\ 0 = \quad\quad c x_3 + d x_2 + e x_1 & & & & + p\varepsilon + q\delta \\ 0 = \quad\quad\quad d x_3 + e x_2 & & & & + p\zeta + q\varepsilon \\ 0 = \quad\quad\quad\quad e x_3 & & & & + q\zeta; \end{cases}$$

und man kann diese Gleichungen entweder als 7 lineare Gleichungen ansehen, aus denen die Verhältnisse von $y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3, p, q$ durch $a, b, c, d, e$ zu bestimmen sind, oder als lineare Gleichungen, welche $a, b, c, d, e, p, q$ durch $y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3$, ausdrücken lassen. Die Gleichungen (6) vermitteln zwischen beiden Arten von Substitutionen.

Den allgemeinen Inhalt der Jerrard'schen Methode kann man nun folgendermassen ausdrücken. Will man die Substitutionscoefficienten $a, b, c, d, e$ so bestimmen, dass in (2) das zweite, dritte und vierte Glied fehlt, so muss:

$$(7)\qquad \Sigma \xi_i = 0, \quad \Sigma \xi_i^2 = 0, \quad \Sigma \xi_i^3 = 0$$

sein. Setzt man aber für die $\xi$ ihre Ausdrücke (2) in $\lambda$ ein, und drückt die symmetrischen Functionen der $\lambda$ durch die Coefficienten von $f$ aus, so erhält man drei homogene Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi(a, b, c, d, e) = 0 \\ \Psi(a, b, c, d, e) = 0 \\ \mathrm{X}(a, b, c, d, e) = 0, \end{cases}$$

welche beziehungsweise von den Ordnungen 1, 2 und 3 sind.

*Man kann nun $a, b, c, d, e$ als Pentaedercoordinaten im Raume betrachten, so dass $\Phi = 0$ die zwischen ihnen bestehende Identität wird. Alsdann ist $\Psi = 0$ die Gleichung einer Fläche 2ter, $\mathrm{X} = 0$ die einer Fläche 3ter Ordnung. Jedem Punkte der Raumcurve 6ter Ordnung, in welcher sie sich durchschneiden, entspricht eine der gesuchten Transformationen.*

*Jede Erzeugende der Fläche $\Psi = 0$ schneidet die Raumcurve in drei Punkten; daher kann man mittelst quadratischer Gleichungen und einer cubischen auf zweimal unendlich viele Arten Punkte der Raumcurve, d. h. Transformationen, bestimmen.*

Lassen wir nun die $a, b, c, d, e$ den Gleichungen (8) genügen,

so geben die Gleichungen, welche aus (6) die Verhältnisse der $x$, $y$ darstellen, und welche in aufgelöster Form die Gestalt haben mögen:

$$
(9)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= M_1 & \sigma y_1 &= N_1 \\ \varrho x_2 &= M_2 & \sigma y_1 &= N_2 \\ \varrho x_3 &= M_3 & \sigma y_3 &= N_3 . \end{aligned}
$$

*die Abbildung der Curve der $x$* ($12^{\text{ter}}$ *Ordnung*) *und der Curve der $y$* ($18^{\text{ter}}$ *Ordnung*) *auf einer Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung, welche der vollständige Durchschnitt einer Fläche $2^{\text{ter}}$ und einer Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung ist;* endlich geben die Gleichungen:

$$
(10)\qquad \begin{aligned} \tau u_1 &= M_2 N_3 - M_3 N_2 \\ \tau u_2 &= M_3 N_1 - M_1 N_3 \\ \tau u_3 &= M_1 N_2 - M_2 N_1 \end{aligned}
$$

*die Abbildung der Curve $30^{\text{ter}}$ Classe $C = 0$ auf eben dieser Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung.*

Die $M$ sind quadratische, die $N$ cubische Functionen der $a$, $b$, $c$, $d$, $e$; die Abbildungsfunctionen sind also für die Curve der $x$ vom $2^{\text{ten}}$, für die Curve der $y$ vom $3^{\text{ten}}$, für die Curve der $u$ vom $5^{\text{ten}}$ Grade. Man erkennt daraus sofort, dass Ordnung bez. Classe dieser Curven durch die Zahlen $2 . 6$, $3 . 6$, $5 . 6$ gegeben sein muss. Das Geschlecht ($p = 4$) ist für alle diese Curven unmittelbar durch das der Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$
\frac{2 \cdot 3 \cdot (2 + 3 - 4)}{2} + 1 = 4
$$

(vgl. meine Abh. „über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie", Borchardt's Journal Bd. 63, p. 221) gegeben.

Bezüglich der hier eintretenden Abbildungen bemerke ich noch Folgendes. Die Gleichungen (6) begründen ein eindeutiges Entsprechen zwischen Punktepaaren der Ebene ($x$, $y$) und gewissen Veränderlichen $a$, $b$, $c$, $d$, $e$. Nur indem wir die Gleichung $\Sigma\, \xi = 0$ hinzufügen, vermögen wir letztere als Punktcoordinaten im Raume aufzufassen. Unter den vierfach unendlich vielen Punktepaaren der Ebene sind alsdann dreifach unendlich viele herausgehoben, deren Coordinatenpaare durch eine gewisse Gleichung zusammenhängen, und diese sind durch den gesammten Raum eindeutig abgebildet. Aber es entspricht hier nicht etwa ein Punkt des Raumes oder auch nur ein elementares Gebilde den quadratischen Transformationen, welche, wie wir es oben immer auffassen konnten, einer Geraden der Ebene zugeordnet sind. In der Theorie der quadratischen Transformation entsprach einer Verschiebung der Punkte $x$, $y$ auf einer Geraden $u$ die Gesammtheit der Transformationen, bei denen die resultirenden Gleichungen linear in einander übergeführt werden konnten, und die Invarianten der transformirten Gleichung hingen also nur von der Geraden ab, auf der $x$

und $y$ sich befanden. Dagegen hängt hier der Punkt des Raumes, welchen man einem Punktepaar $x$, $y$ entsprechen lässt (vorausgesetzt immer, dass es die erwähnte Relation befriedigt), auch von der absoluten Lage des Paars auf ihrer Verbindungslinie ab. Man kann daher eine unendliche Reihe von Punkten des Raumes finden, welche den Paaren $x$, $y$ derselben Geraden $u$ entsprechen; und eine dem Verschwinden einer Invariante entsprechende Curve der Ebene wird also durch eine *Fläche* abgebildet.

Aber wenn es, wie dies bei $C = 0$ der Fall ist, ausgezeichnete Punkte $x$, $y$ auf den Tangenten einer solchen Curve giebt, so kann man diese insbesondere (und das ist oben geschehen) zu Grunde legen; man kann also unter den unendlich vielen Punkten des Raumes, welche einer Tangente der Curve zugehören, einen bestimmten ausgezeichneten hervorheben. Statt der Fläche, welche eigentlich das Bild der ebenen Curve wird, kann man dann die Reihe dieser ausgezeichneten Punkte betrachten; und man erhält so unter besondern Verhältnissen die ebene Curve eindeutig durch eine Raumcurve dargestellt.

So war es oben bei $C = 0$, wo wir das besondere Punktepaar $xy$ zu Grunde legten, welches gerade die Jerrard'sche Form der Gleichung 5ten Grades hervorruft. Aehnlich kann man es bei $R = 0$ machen, und zeigen, dass in einer gewissen Weise den 15 Curven $R' = 0$ die 15 Diagonalen der auf den Seiten des Pentaeders durch die andern Seiten desselben gebildeten Vierseite entsprechen. Aber man bemerkt wohl, dass diese verschiedenen singulären Abbildungen unter einander nicht direct zusammenhängen, und also auch nicht direct vergleichbar werden, da bei jeder solchen Curve es ein ihrer Natur speciell angepasstes Paar $x$, $y$ ist, durch welches man die singuläre Abbildung leistet.

## § 16.

## Eine specielle Fläche 3ter Ordnung.

Im Vorigen wurde die Curve $C = 0$, und damit die Jerrard'sche Transformation, in der Weise auf die Betrachtung einer Raumcurve 6ter Ordnung zurückgeführt, dass man dabei die Coefficienten von $f$ nur rational verwendete, wie dies im Sinn der Jerrard'schen Methode liegt. Aber wenn es sich um ein weiteres Studium der Raumcurve 6ter Ordnung und der dabei auftretenden Gebilde handelt, so kann man die *Wurzeln* von $f = 0$ statt der *Coefficienten* einführen. Da ferner die $\xi$ lineare Functionen der $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ sind, so kann man statt letzterer die $\xi$ als Pentaedercoordinaten im Raume interpretiren. Die Beziehungen zwischen den $x$, $y$ und den $\xi$ werden dann durch die 5 Gleichungen:

$$(1)\qquad (y_1+\lambda_i y_2+\lambda_i^2 y_3)-\xi_i(x_1+\lambda_i x_2+\lambda_i^2 x_3)=0$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

gegeben, während die Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung unmittelbar durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad \Sigma\,\xi=0,\quad \Sigma\,\xi^2=0,\quad \Sigma\,\xi^3=0$$

vertreten ist. An Stelle der Identität $\Phi=0$ tritt $\Sigma\,\xi=0$; $\Sigma\,\xi^2=0$ ist die neue Gleichung der Fläche $\Psi=0$, $\Sigma\,\xi^3=0$ die neue Gleichung der Fläche $X=0$, und die Gleichungen (1) geben unter der Voraussetzung des Bestehens von (2) die Punktsysteme der $x$, $y$, welche, auf den Tangenten von $C=0$ gelegen, die oft erwähnten Curven $12^{\text{ter}}$ und $18^{\text{ter}}$ Ordnung beschreiben.

Es ist hier nun zunächst die Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung $X=\Sigma\,\xi^3=0$ zu betrachten, welche eine *specielle Classe merkwürdiger Flächen* $3^{\text{ter}}$ *Ordnung* umfasst, und von welcher ich einige Eigenschaften entwickeln werde.

Die Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(3)\qquad \Sigma\,\xi^3=0$$

ist dem Pentaeder in ganz bestimmter geometrischer Weise zugeordnet; ihre linke Seite kann als simultane Covariante der linken Seite der Pentaedergleichung $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4\,\xi_5$ und der linken Seite der Identität:

$$(4)\qquad \Sigma\,\xi=0$$

aufgefasst werden. Um diese Fläche zunächst geometrisch zu definiren, bemerke ich Folgendes.

*Die Fläche* (3) *enthält ganz die* 15 *Diagonalen der Vierseite, welche auf jeder Fläche des Pentaeders durch die vier andern Flächen ausgeschnitten werden.*

Denn für eine Fläche des Pentaeders, etwa $\xi_5=0$, verwandelt sich die Identität in:

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0;$$

daher stellen die Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} \xi_1+\xi_2=0 & \text{oder} & \xi_3+\xi_4=0\\ \xi_1+\xi_3=0 & \text{oder} & \xi_2+\xi_4=0\\ \xi_1+\xi_4=0 & \text{oder} & \xi_2+\xi_3=0 \end{array}$$

in Verbindung mit $\xi_5=0$ die Diagonalen des auf $\xi_5=0$ ausgeschnittenen Vierseits dar. Die Gleichung der Fläche aber verschwindet wirklich identisch, wenn zugleich:

$$\xi_1+\xi_2=0,\quad \xi_3+\xi_4=0,\quad \xi_5=0$$

gesetzt wird; daher gehört jede solche Diagonale der Fläche an. Aber diese ist dadurch auch völlig definirt, denn zwei eigentliche Flächen $3^{\text{ter}}$ Ordnung können nicht eine Curve $15^{\text{ter}}$ Ordnung gemein haben, ohne ganz zusammenzufallen. Vielmehr kann man das folgende als Satz aussprechen:

*Die Diagonalen der Vierseite, welche von der Fläche eines Pentaeders je auf der fünften ausgeschnitten werden, liegen auf einer Fläche $3^{ter}$ Ordnung.*

Ich werde diese specielle Fläche deswegen die *Diagonalfläche des Pentaeders* nennen.

Man sieht, dass auf dieser Fläche sofort 15 der 27 Geraden bekannt sind. Und zwar liegen sie in folgender Weise:

*Von den durch die 15 Diagonalen gegebenen Geraden der Diagonalfläche bilden fünfmal 3 ein Dreieck (die Pentaederflächen), zehnmal aber gehen drei durch einen Punkt (Pentaederecke) und liegen zugleich in einer Ebene.*

Man braucht nämlich nur durch eine Ecke des Pentaeders eine Ebene zu legen, welche zugleich die gegenüberliegende Kante desselben enthält. Diese Ebene schneidet die in der Ecke zusammenstossenden Pentaederflächen in Diagonalen und giebt so drei Gerade der Fläche von der angegebenen Beschaffenheit. Eine characteristische Besonderheit der Fläche ist also, dass es 10 Punkte giebt, in denen *drei* Gerade der Fläche sich schneiden, was sonst nicht der Fall ist. Zugleich sieht man, dass von den 45 Dreiecken, in welche die 27 Geraden einer Fläche $3^{ter}$ Ordnung sich zusammenfassen lassen, hier 15 bekannt sind; ihre Ebenen sind die 5 Pentaederflächen und die 10 von den Ecken nach den gegenüberliegenden Kanten gelegten Ebenen. Da ferner eine der 27 Geraden von den Seitenpaaren der durch dieselbe gelegten Dreiecke in Involutionspaaren getroffen wird, müssen die Schnittpunkte der Diagonalen mit den Seitenflächen des Pentaeders Doppelpunkte dieser Involutionen sein, also zu den 54 Punkten gehören, welche die Geraden mit der Hesse'schen Fläche gemein haben und welche Steiner Asymptotenpunkte genannt hat. Jede Ecke zählt dabei, als 3 Diagonalen angehörig, dreifach, und die 10 Ecken liefern also im Ganzen 30 der Asymptotenpunkte. Ausserdem ist auf jeder Diagonale durch die andern mit ihm in einer Seitenfläche liegenden Diagonalen ein weiteres Involutionspaar gegeben.

Ueberhaupt sieht man, wie bei dieser Fläche zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden ein inniger Zusammenhang besteht, dergestalt, dass diese bei andern Flächen getrennten Probleme hier zusammenfliessen, und dass man sagen kann:

*Die Lösung der Gleichung $27^{ten}$ Grades, von welcher die 27 Geraden der Fläche abhängen, erfordert bei der Diagonalfläche nur die Lösung der beim Pentaeder auftretenden Gleichung $5^{ten}$ Grades und die Bestimmung von fünften Wurzeln der Einheit.*

Man beweist dieses dadurch, dass man, die Pentaederflächen als

bekannt vorausgesetzt, die noch fehlenden 12 Geraden bez. 24 Asymptotenpunkte aus ihnen und fünften Einheitswurzeln zusammensetzt. Dies geschieht auf folgende Weise.

Die Asymptotenpunkte sind die Punkte, in welchen die 27 Geraden die Hesse'sche Fläche berühren. Nun wird bekanntlich die Gleichung der letzteren dargestellt durch die Summe der Produkte von je 4 der $\xi$, jedes Produkt mit dem Quadrate der entsprechenden Coefficienten der linearen Identität multiplicirt. Da diese Coefficienten hier 1 sind, so ist die Gleichung der Hesse'schen Fläche:

(5) $$\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \cdots = 0 .$$

Sie wird von einer Pentaederseite, etwa $\xi_5 = 0$, in den Seiten des auf $\xi_5 = 0$ ausgeschnittenen Vierseits getroffen; die Ecken desselben sind die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche und geben die oben schon gefundenen Asymptotenpunkte. Aber die Identität, sowie (5) und die Gleichung der Diagonalfläche sind auch erfüllt, wenn man die $\xi$ in irgend welcher Folge durch die fünften Wurzeln der Einheit ersetzt. Dabei ist es wieder wie in § 9. gleichgültig, ob man alle $\xi$ noch mit derselben fünften Wurzel der Einheit multiplicirt; dagegen ist der jetzige Fall von dem in § 9. behandelten insofern verschieden, als der Uebergang von einem Werthsystem der $\xi$ zu einem reciproken allerdings einen andern Punkt liefert. Sei ein Werthsystem der $\xi$ durch:

(6) $$\xi_i = \omega^{\alpha_i}$$

gegeben, wo die $\alpha_i$ in irgend welcher Ordnung die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 sind, und $\omega$ eine imaginäre fünfte Wurzel der Einheit; dann giebt das reciproke System den Punkt:

(7) $$\xi_i' = \omega^{-\alpha_i} .$$

*Die Verbindungslinien der* 12 (*dem Systeme* (3) § 9. *entsprechenden*) *Punktepaare* (6), (7) *geben die* 12 *fehlenden Geraden der Fläche.*

Denn es ist in der That:

$$\Sigma(\varkappa\xi_i + \lambda\xi_i')^3 = \Sigma(\varkappa\omega^{\alpha_i} + \lambda\omega^{-\alpha_i})^3 = 0 ,$$

welches auch die Werthe der $\varkappa$, $\lambda$ seien; die Verbindungslinie der Punkte (6), (7) gehört also ganz der Fläche an. Es folgt daraus weiter:

*Die Punkte* (6), (7) *sind die Paare der auf diesen Geraden liegenden Asymptotenpunkte.*

Diese 12 neuen Geraden aber gruppiren sich nun so in die 6 Paare § 9. (3), *dass die Geraden eines Paars immer die nämlichen* 5 *Geraden unter den* 15 *Diagonalen treffen.* Soll nämlich eine der 12 Geraden, etwa:

$$\xi_i = \varkappa\omega^{\alpha_i} + \lambda\omega^{-\alpha_i}$$

eine Diagonale treffen, etwa diejenige, die durch zwei der Gleichungen:

$$\xi_5 = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 = 0, \quad \xi_3 + \xi_4 = 0$$

gegeben ist, so muss man ein System $\varkappa$, $\lambda$ angeben können, so dass:

$$\varkappa(\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}) + \lambda(\omega^{-\alpha_1} + \omega^{-\alpha_2}) = 0$$
$$\varkappa(\omega^{\alpha_3} + \omega^{\alpha_4}) + \lambda(\omega^{-\alpha_3} + \omega^{-\alpha_4}) = 0,$$

oder, wenn man durch $\omega^{-\alpha_1} + \omega^{-\alpha_2}$ und $\omega^{-\alpha_3} + \omega^{-\alpha_4}$ dividirt:

$$\omega^{\alpha_1 + \alpha_2}\varkappa + \lambda = 0$$
$$\omega^{\alpha_3 + \alpha_4}\varkappa + \lambda = 0,$$

d. h. es muss endlich sein:

$$\omega^{\alpha_1 + \alpha_2} = \omega^{\alpha_3 + \alpha_4}.$$

Dies aber kann immer nur eine Eigenschaft der Zahlen $\alpha$, nicht eine von $\omega$ sein; setzt man also $\omega^2$ statt $\omega$, d. h. geht man von einer Gruppe der Tafel § 9. (3) zu der daneben stehenden über, so bleibt diese Eigenschaft erfüllt, wenn sie zuvor erfüllt war, und zwei Gerade, die neben einander stehenden Gruppen entsprechen, schneiden also eine gegebene Diagonale entweder gar nicht, oder sie schneiden sie beide.

Die von einem solchen Paar getroffenen 5 Diagonalen liegen einzeln in den 5 Seitenflächen des Pentaeders, und man sieht, wie auf jeder der Diagonalen so durch zwei solcher Paare die fehlenden Involutionspaare ausgeschnitten werden.

Bezeichnen wir, um die Gruppirung zu übersehen, die Paare der Tafel § 9. (3) der Reihe nach durch:

I, II, III, IV, V, VI.

Die Diagonalen aber mögen durch Zahlencombinationen wie 12,34 bezeichnet sein, so dass 12,34 diejenige Diagonale darstellt, welche in der Ebene $\xi_5 = 0$ liegt, und in derselben den Schnittpunkt von $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ mit dem Schnittpunkte von $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ verbindet. In der folgenden Tafel sind dann die 6 Paare mit denjenigen Diagonalen zusammengestellt, welche sie schneiden:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (8) | I. | 12,35; | 13,45; | 14,23; | 15,24; | 25,34 |
| | II. | 12,45; | 13,25; | 14,23; | 15,34; | 24,35 |
| | III. | 12,34; | 13,25; | 14,35; | 15,34; | 23,45 |
| | IV. | 12,35; | 13,24; | 14,25; | 15,34; | 23,45 |
| | V. | 12,45; | 13,24; | 14,35; | 15,23; | 25,34 |
| | VI. | 12,34; | 13,45; | 14,25; | 15,23; | 24,35. |

*Die 6 Paare selbst bilden eine Doppelsechs.*

Damit nämlich 2 Gerade sich schneiden, ist es nöthig und hinreichend, dass die Pentaedercoordinaten zweier Punkte der einen und zweier Punkte der andern mit den Coefficienten der linearen Identität eine Determinante vom Werthe Null besitzen. Als 2 Punkte einer der 12 Geraden nehmen wir ihre Asymptotenpunkte; combiniren wir aber die Coordinaten, welche durch eine Reihe der ersten Columne

§ 9. (3) gegeben sind und ihre reciproken Werthe mit einer nicht gegenüberstehenden Reihe der zweiten Columne und deren reciproken Werthen, so verschwindet immer die in Rede stehende Determinante.

*Die Gleichung* 36^ten^ *Grades, von welcher im Allgemeinen die Auffindung der Doppelsechsen abhängt, hat also hier eine rationale Wurzel, und von den* 36 *Paaren von Abbildungen der Fläche auf einer Ebene ist* 1 *Paar rational, jede der beiden Abbildungen selbst durch Lösung einer einzigen quadratischen Gleichung aufstellbar.*

## § 17.

## Ueber die Abbildung der Diagonalfläche und ein merkwürdiges ebenes Sechseck.

Eine solche Abbildung will ich genauer untersuchen. Ihre Fundamentalpunkte sind durch die 6 Geraden einer Columne § 9. (3) gegeben, die 6 gegenüberstehenden Geraden bilden sich als die Kegelschnitte durch je 5 dieser Punkte ab. Die Trennung der Fundamentalpunkte würde die Lösung einer Gleichung 6^ten^ Grades erfordern, welche Resolvente der Gleichung 5^ten^ Grades ist, also schliesslich die Lösung der letztern. Wir brauchen diese nicht, um die Abbildung herzustellen; aber wir können sie uns ausgeführt denken, um die Lage der Fundamentalpunkte zu studiren.

Die Diagonalen sind in der Abbildung durch die 15 Verbindungslinien der Fundamentalpunkte dargestellt, je drei, welche durch eine Ecke gehen, durch Verbindungslinien, welche jeden Fundamentalpunkt und keinen doppelt enthalten. Solche drei müssen sich in einem Punkte schneiden, dem Bilde einer Ecke. Man hat daher den Satz:

> *Von der Diagonalfläche existiren* 2 *conjugirte Abbildungen, bei denen die* 6 *Fundamentalpunkte so liegen, dass zehnmal* 3 *Verbindungslinien, welche alle* 6 *enthalten, sich in einem Punkte treffen.*

Im Ganzen giebt es 15 Dreiecke, welche man so legen kann, dass die Seiten eines jeden alle Fundamentalpunkte und jeden nur einmal enthalten. Von diesen gehen im vorliegenden Falle 10 in drei Strahlen durch einen Punkt über; die 5 übrigen entsprechen den Diagonaldreiecken, welche in den Flächen des Pentaeders liegen.

Da durch das Obige die *Existenz solcher ebenen Sechsecke dargethan ist, welche auf* 10 *Arten ein Brianchon'sches Sechseck liefert,* so entsteht die Frage, wie sie zu finden sind. Ich werde zeigen, dass, abgesehen von projectivischer Umformung, *nur ein einziges solches existirt; dass dieses aber in reeller Weise dargestellt werden kann.*

Bezeichnet man, der Tafel (8) entsprechend, die Ecken des Sechsecks durch:

$$\text{I, II, III, IV, V, VI,}$$

so schneiden sich, abermals der Tafel gemäss, in je einem Punkte folgende Tripel ihrer Verbindungslinien, welche den in den Ecken des Pentaeders zusammenstossenden Tripeln von Diagonalen entsprechen:

$$(9)\qquad \begin{array}{lll}
\text{II V}, & \text{I VI}, & \text{III IV} \\
\text{I IV}, & \text{III V}, & \text{II VI} \\
\text{III VI}, & \text{II IV}, & \text{I V} \\
\text{II III}, & \text{IV VI}, & \text{I V} \\
\text{IV V}, & \text{I III}, & \text{II VI} \\
\text{I II}, & \text{V VI}, & \text{III IV} \\
\text{V VI}, & \text{I III}, & \text{II IV} \\
\text{I II}, & \text{IV VI}, & \text{III V} \\
\text{IV V}, & \text{II III}, & \text{I VI} \\
\text{III VI}, & \text{I IV}, & \text{II V}.
\end{array}$$

Gehen wir von den ersten beiden Tripeln aus, und bezeichnen durch $P$, $Q$ die Punkte, in denen die Strahlen derselben sich schneiden, so haben wir zwei Strahlbüschel:

$$PQ,\quad P\,\text{I VI},\quad P\,\text{III IV},\quad P\,\text{II V}$$
$$PQ,\quad P\,\text{II VI},\quad P\,\text{III V},\quad P\,\text{I IV}.$$

Dieselben sind in perspectivischer Lage; denn die Punkte VI, III und der Schnittpunkt von II V mit I IV, also die Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser Büschel, liegen wegen des letzten Tripels der Tafel (9) auf einer Geraden. Bezeichnen wir also die Gleichung der Geraden $PQ$ durch $M = 0$, ferner die der Geraden:

$$P\,\text{I VI},\quad P\,\text{III IV},\quad P\,\text{II V}$$

durch:

$$A = 0,\quad A + M = 0,\quad A + \mu M = 0;$$

so können wir die Gleichungen der Geraden:

$$P\,\text{II VI},\quad P\,\text{III V},\quad P\,\text{I IV}$$

durch:

$$B = 0,\quad B + M = 0,\quad B + \mu M = 0$$

darstellen, und die Punkte I, II, III, IV, V, VI werden Durchschnitte von:

$$(10)\qquad \begin{array}{lll}
\text{I} & : A = 0 & , B + \mu M = 0 \\
\text{II} & : A + \mu M = 0, & B = 0 \\
\text{III} & : A + M = 0 & , B + M = 0 \\
\text{IV} & : A + M = 0 & , B + \mu M = 0 \\
\text{V} & : A + \mu M = 0, & B + M = 0 \\
\text{VI} & : A = 0 & , B = 0.
\end{array}$$

Betrachten wir nun die Geraden I II, VI IV, welche wegen des $8^{ten}$ Tripels der Tafel sich mit III V in einem Punkte $S$ schneiden. Den Strahl $PS$ bezeichne ich durch:

$$A + \varrho M = 0.$$

Dann schneiden sich auf VI IV die Paare:

$$\begin{array}{llll} A = 0 & A + \varrho M = 0 & A + \ \ M = 0 & M = 0 \\ B = 0 & B + \ \ M = 0 & B + \mu M = 0 & M = 0, \end{array}$$

auf I II aber die Paare:

$$\begin{array}{llll} A = 0 & A + \varrho M = 0 & A + \mu M = 0 & M = 0 \\ B + \mu M = 0 & B + \ \ M = 0 & B = 0 & M = 0. \end{array}$$

Indem man die Doppelverhältnisse beidemal gleichsetzt, erhält man also die beiden Gleichungen:

$$\varrho\mu = 1 \quad , \quad \mu - \varrho - 1 = 0,$$

oder:

(11) $$\mu^2 - \mu - 1 = 0.$$

Das Doppelverhältniss $\mu$, welches die beiden Strahlbüschel $P$, $Q$ characterisirt, ist also hierdurch völlig bestimmt; es kann nur noch die Werthe:

(12) $$\mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

annehmen, welche auf das Theilungsverhältniss des goldenen Schnitts zurückführen.

Die beiden Fälle aber, welche durch die beiden Werthe (12) noch unterschieden sind, kann man projectivisch aufeinander zurückführen. Bezeichnet man einen der Werthe (11) durch $\mu$, den andern durch $\mu'$, so ist ein Sechseck durch die Formeln (10), das andere durch die Formeln:

(13) $$\begin{array}{ll} A = 0 & , \ B + \mu' M = 0 \\ A + \mu' M = 0, & B = 0 \\ A + M = 0 & , \ B + M = 0 \\ A + M = 0 & , \ B + \mu' M = 0 \\ A + \mu' M = 0, & B + M = 0 \\ A = 0 & , \ B = 0 \end{array}$$

gegeben. Setzt man nun:

$$M = -M', \qquad A = A' + M', \qquad B = B' + M',$$

und beachtet, dass $\mu' + \mu + 1 = 0$, so gehen die Gleichungen (13) in die Gleichungen (10) über, wobei $\mu$ wieder dasselbe ist, und nur $A'$, $B'$, $M'$ an Stelle von $A$, $B$, $M$ getreten ist. Daher ist dieses zweite System dem ersten projectivisch.

Es bleibt also, von projectivischen Veränderungen abgesehen, nur ein einziges System übrig, welches die fraglichen Eigenschaften besitzen kann. Im Vorigen sind nur einige der Tripel bei ihm nach-

gewiesen; dass alle übrigen ihm auch zukommen, folgt aus der bewiesenen Existenz einer Combination mit jenen 10 Tripeln. Es ist übrigens leicht, das Vorhandensein sämmtlicher 10 Durchschnittspunkte vom Tripel direct einzusehen.

## § 18.

## Die Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Diagonalfläche in dem Bilde von $C = 0$ schneidet.

Man verknüpft nun diese Betrachtungen mit den im Früheren entwickelten durch die Bemerkung, *dass unter den Tangenten von* $C = 0$ *die Doppelwendetangenten durch die zuletzt gefundenen Paare von Asymptotenpunkten abgebildet werden.*

Man sieht dies augenblicklich, wenn man erwägt, dass die $\xi$ die Wurzeln der auf ein Paar $x$, $y$ bezogenen Gleichung für das Schnittpunktsystem einer Tangente von $C = 0$ mit den Seiten des Vielseits sind. Dass diese bis auf etwa einen gemeinsamen constanten Factor durch die Gruppen § 9. (3) dargestellt werden, wenn die Gerade eine Doppelwendetangente ist, wurde in § 9. entwickelt. Man sieht also, dass man die Berührungspunkte dieser Tangenten mit $C = 0$ erhält, wenn man in (1) die $\xi$ durch diese Gruppen ersetzt; ferner dass in jenen Formeln wirklich nur die $x$ mit den $y$ vertauscht werden, wenn man die $\xi$ durch ihre reciproken Werthe ersetzt. Endlich aber wird es hierdurch klar, weswegen diese Tangenten, als Doppeltangenten von $C = 0$, nicht durch einzelne Punkte, sondern durch Punktepaare, die 12 Paare der Asymptotenpunkte, abgebildet werden.

Hiermit sind dann aber auch die Grundlagen für die geometrische Definition der Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung gewonnen, die mit der Diagonalfläche zusammen die Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt, welche das Bild von $C = 0$ ist. Jene Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\Sigma\xi^2 = 0$$

geht nämlich offenbar durch alle Asymptotenpunkte; aber sie ist auch die einzige Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche diese Eigenschaft besitzt, und ist dadurch völlig und eindeutig bestimmt. Und andererseits ist es eine besondere Eigenschaft der Diagonalfläche, dass 24 ihrer Asymptotenpunkte auf einer Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Weitere Punkte der Fläche, welche man leicht bestimmen kann, sind diejenigen, welche den gemeinsamen Tangenten von $A = 0$ und $C = 0$, also den Werthsystemen § 8.:

$$0,\ 1,\ i,\ -1,\ -i$$

(in den verschiedenen Anordnungen) entsprechen. Dieses sind zugleich die Durchschnitte der Fläche mit den Diagonalen; und man sieht, dass

sie folgendermassen in den Flächen des Pentaeders liegen. Auf einer Fläche, etwa $\xi_5 = 0$, wird ein Vierseit ausgeschnitten, dessen Diagonalen durch:

$$1)\quad \xi_1 + \xi_2 = 0$$
$$2)\quad \xi_1 + \xi_3 = 0$$
$$3)\quad \xi_1 + \xi_4 = 0$$

gegeben sind. Diesen Gleichungen genügen der Reihe nach die Anordnungen der obigen Gruppe (wobei nur die wesentlich verschiedenen angegeben sind):

$$\begin{array}{llllll}
1) & 1,\ -1,\ i,\ -i,\ 0 & ; & 1,\ -1,\ -i,\ i,\ 0 \\
2) & 1,\ i,\ -1,\ -i,\ 0 & ; & 1,\ -i,\ -1,\ i,\ 0 \\
3) & 1,\ i,\ -i,\ -1,\ 0 & ; & 1,\ -i,\ i,\ -1,\ 0
\end{array}$$

Auf jeder der Diagonalen aber entstehen 2 Punktepaare, welche 2 Ecken des Vierseits und den Durchschnitten mit den andern Diagonalen entsprechen. Zu diesen sind die obigen 3 Punktepaare gleichzeitig harmonisch; und man kann also sagen:

*Die Kegelschnitte, in denen die Fläche $\Sigma\xi^2 = 0$ die Pentaederflächen schneidet, gehen immer durch die 3 Paare von Doppelpunkten der Involutionen, welche auf den Diagonalen durch 2 Ecken und die Schnitte mit den 2 andern in derselben Fläche liegenden Diagonalen bestimmt sind.*

Auch durch diese Kegelschnitte ist die Fläche 2ter Ordnung mehr als hinreichend bestimmt.

Die Curve 6ter Ordnung aber, in welcher diese Fläche 2ter Ordnung die Diagonalfläche schneidet, ist an und für sich durch eine mehr als hinreichende Anzahl von Punkten geometrisch bestimmt. Denn sie geht durch die 24 Asymptotenpunkte, welche nicht in die Ecken des Pentaeders fallen, und durch die 30 in dem letzten Satze angeführten Doppelpunkte der in den Seitenflächen des Pentaeders erzeugten Involutionen.

§ 19.

## Zusammenhang der obigen Untersuchungen mit der Auflösung der Gleichungen 5ten Grades.

Es bleibt mir nun übrig den Zusammenhang darzulegen, in welchem die oben angestellten Betrachtungen mit der Lösung der Gleichung 5ten Grades $f = 0$ stehen.

Wenn man nach Hermite die Gleichung:

$$(1)\qquad x^5 - ax - b = 0$$

als durch elliptische Functionen unmittelbar gelöst betrachtet, so kommt es nur darauf an, die Gleichung 5ten Grades in diese Form zu bringen.

Man hat dann nur einen beliebigen Punkt der Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung zu ermitteln, was geschieht, indem man eine Erzeugende der Fläche $\Psi = 0$ mit der Diagonalfläche schneidet. Dazu ist eine quadratische und eine cubische Gleichung zu lösen; erstere, um eine Erzeugende der Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung zu finden; die andere, um die Durchschnitte derselben mit der Diagonalfläche zu bestimmen. Der gefundene Punkt der Raumcurve $6^{\text{ter}}$ Ordnung giebt eine Tangente von $C = 0$, und wie das Schnittpunktsystem auf dieser zu der Form (1) führt, ist in § 11. gezeigt worden. Kennt man die Schnittpunkte dieses Systems, so sind auch die Seiten des Fünfseits getrennt, die gegebene Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades gelöst.

Dagegen kann man ferner, wie es Kronecker gethan, die Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades dadurch lösen, dass man eine Resolvente derselben mit der Modulargleichung der Transformation $5^{\text{ter}}$ Ordnung elliptischer Functionen in unmittelbare Beziehung bringt.

Als eine solche Resolvente ist die Gleichung $6^{\text{ten}}$ Grades zu betrachten, durch welche die 6 Doppeltangenten von $B_1 = 0$ (oder was dasselbe ist, die 6 Doppeltangenten von $B_2 = 0$) von einander getrennt werden. Man kann also etwa die Gleichung für das Schnittpunktsystem aufstellen, welches eine beliebige Gerade auf einer dieser Gruppen ausschneidet. Die Trennung der beiden Gruppen selbst erfolgt durch eine quadratische Gleichung; und die Gleichung des Produkts aller Geraden einer Gruppe ist also rational darstellbar, mit der Ausnahme, dass eine einzige Quadratwurzel in den Coefficienten auftritt, die Wurzel aus der Discriminante der ursprünglichen Gleichung.

Kennt man eine Wurzel einer solchen Resolvente, so kennt man auch eine Doppeltangente von $B_1 = 0$ oder $B_2 = 0$, d. h. eine Doppelwendetangente von $C = 0$. Aber auf einer solchen wird das Schnittpunktsystem mit den Seiten des Fünfseits durch eine *reine* Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades gegeben, ist also als bekannt anzusehen. Nur ist zuvor, um die Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades auf diese Form zu bringen, eine quadratische Gleichung zu lösen, welche die beiden Wendepunkte von $C$ auf dieser Tangente trennt; diese muss man zu Grunde legen, um der Gleichung die Form $z_1^5 - z_2^5 = 0$ zu geben.

Man kann diese Auflösungsmethode in folgendem Satze zusammenfassen:

> *In einer gegebenen Gleichung* $5^{\text{ten}}$ *Grades bilde man das Fünfseit, dessen Curve* $B_1 = 0$ (oder $B_2 = 0$), *und suche eine der* 6 *Doppeltangenten dieser Curve. Führt man deren Berührungspunkte als Grundpunkte ein, so nimmt die Gleichung* $5^{\text{ten}}$ *Grades die Form einer reinen Gleichung an, und ist also gelöst.*

Ich werde nun zeigen, *wie die Trennung der* 6 *Doppeltangenten*

*einer Gruppe auf die Modulargleichung für die Transformation* $5^{ter}$ *Ordnung der elliptischen Functionen zurückkommt.*

Den 6 Tangenten der Gruppe entsprechen eindeutig die Geraden, welche die eine Hälfte der ausgezeichneten Doppelsechs der Diagonalfläche bilden. Da, wie oben erwähnt, die zur Abbildung der Fläche zu lösende Gleichung $36^{ten}$ Grades eine dieser Doppelsechs entsprechende rationale Wurzel hat, so kann man eine Abbildung sofort leisten*), bei welcher jene 6 Geraden die Fundamentalpunkte liefern, und diese Fundamentalpunkte bilden jenes merkwürdige in § 17. behandelte Sechseck, dessen Seiten sich zehnmal zu drei in einem Punkte schneiden.

Man hat also ein *Vieleck* in der Ebene, wie früher *Vielseite*, welche algebraische Gleichungen repräsentirten. Die Betrachtungen der ersten Paragraphe finden hier sofort Anwendung, nur sind die geometrischen Begriffe nach dem Principe der Dualität umzuformen.

Man erhält eine doppelt unendliche Zahl von Gleichungen, welche zur Trennung der Ecken dieses Sechsecks dienen können, wenn man, wie früher die Schnittpunktsysteme auf Geraden, so jetzt die Strahlbüschel betrachtet, welche von beliebigen Punkten der Ebene nach den Ecken des Sechsecks hingehen. Ich werde zeigen, *dass unter ihnen sich eine einfach unendliche Reihe von Gleichungen befindet, welche lineare Transformationen der gedachten Modulargleichung sind.*

Da nämlich die Invarianten des Sechsecks (vgl. § 2.) hier offenbar rein numerische Grössen sind, so geht die eine zwischen den Invarianten eines solchen Strahlbüschels und denen des Sechsecks bestehende Beziehung hier in eine reine Invariantenrelation für den Strahlbüschel über, welche für alle Punkte der Ebene, als Büschelscheitel betrachtet, besteht. Diese kann man in folgender Weise entwickeln.

Nach § 17. entstehen die Ecken des Secksecks, bei einer gewissen unsymmetrischen Erzeugungsweise, durch die Schnitte der folgenden Geradenpaare:

$$\begin{array}{ll} A=0 & , \; B+\mu M=0 \\ A+\mu M=0 & , \; B=0 \\ A+M=0 & , \; B+M=0 \\ A+M=0 & , \; B+\mu M=0 \\ A+\mu M=0 & , \; B+M=0 \\ A=0 & , \; B=0. \end{array}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen eines Paars und aus $u_x=0$ die $x$, so erhält man die Gleichungen der 6 Ecken; sie haben die Form:

*) Sie wird mittelst eines ausgezeichneten Systems von Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung ausgeführt, welche man auf der Fläche angeben kann.

$$U + \mu V = 0$$
$$U + \mu W = 0$$
$$U + V + W = 0$$
$$U + \mu V + W = 0$$
$$U + V + \mu W = 0$$
$$U = 0.$$

Setzt man endlich in diesen Gleichungen $u_i = p_i + \lambda q_i$, so erhält man die Parameter $\lambda$ der Strahlen, welche von dem Schnittpunkte der Geraden $p_x = 0$, $q_x = 0$ nach den Ecken des Sechsecks gezogen sind. Bezeichnen wir sie der Reihe nach durch $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$, so sind sie durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{llll}
(U_p + \lambda_1 U_q) + \mu(V_p + \lambda_1 V_q) & & & = 0 \\
(U_p + \lambda_2 U_q) & & + \mu(W_p + \lambda_2 W_q) & = 0 \\
(U_p + \lambda_3 U_q) + & (V_p + \lambda_3 V_q) + & (W_p + \lambda_3 W_q) & = 0 \\
(U_p + \lambda_4 U_q) + \mu(V_p + \lambda_4 V_q) + & & (W_p + \lambda_4 W_q) & = 0 \\
(U_p + \lambda_5 U_q) + & (V_p + \lambda_5 V_q) + \mu(W_p + \lambda_5 W_q) & & = 0 \\
(U_p + \lambda_6 U_q) & & & = 0.
\end{array}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die 6 Grössen:

$$U_p, \; U_q, \quad V_p, \; V_q, \quad W_p, \; W_q,$$

so erhält man eine Beziehung zwischen den $\lambda$, welche gilt, von welchem Punkte der Ebene aus man auch den Strahlbüschel gelegt hat. Diese Beziehung ist:

$$0 = \begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 & \mu & \mu\lambda_1 & 0 & 0 \\
1 & \lambda_2 & 0 & 0 & \mu & \mu\lambda_2 \\
1 & \lambda_3 & 1 & \lambda_3 & 1 & \lambda_3 \\
1 & \lambda_4 & \mu & \mu\lambda_4 & 1 & \lambda_4 \\
1 & \lambda_5 & 1 & \lambda_5 & \mu & \mu\lambda_5 \\
1 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

Beachtet man, dass $\mu^2 - \mu - 1 = 0$, so findet man leicht, dass diese Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$(1) \quad \begin{aligned}
0 = {} & \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_6 \\
& + \lambda_2\lambda_3\lambda_6 + \lambda_1\lambda_5\lambda_6 + \lambda_2\lambda_4\lambda_6 + \lambda_3\lambda_4\lambda_5 + \lambda_4\lambda_5\lambda_6 \\
& - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_6 - \lambda_1\lambda_3\lambda_5 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_4\lambda_5 \\
& - \lambda_2\lambda_4\lambda_5 - \lambda_1\lambda_4\lambda_6 - \lambda_2\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3\lambda_4\lambda_6 - \lambda_3\lambda_5\lambda_6 .
\end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts ist die einfachste Combination der Wurzeln $\lambda$, welche die Eigenschaft hat, durch Vertauschung derselben nur 6 Paare von gleichen und entgegengesetzten Werthen anzunehmen. Diese Combination hat Herr Joubert (Comptes Rendus, 1867) studirt,

und gezeigt, dass das Produkt der 6 Werthe, welche der Ausdruck für positive Permutationen der Wurzeln annimmt, sich durch eine Invariante der Form $6^{\text{ten}}$ Grades:

$$f = a\,(z_1 - \lambda_1 z_2)\,(z_1 - \lambda_2 z_2)(z_1 - \lambda_3 z_2)(z_1 - \lambda_4 z_2)\,(z_1 - \lambda_5 z_2)(z_1 - \lambda_6 z_2)$$

ausdrückt. Setzen wir symbolisch:

$$f = a_z^6 = b_z^6 \cdots,$$

und bilden die Covarianten und Invarianten:

$$A = (ab)^6$$
$$i = (ab)^4\, a_z^2 b_z^2 = i_z^4$$
$$B = (ii')^4$$
$$C = (ii')^2\,(ii'')^2\,(i'i'')^2,$$

so wird das Verschwinden eines der Ausdrücke (1) durch das Verschwinden der Invariante:

$$(2) \qquad 125C - 75AB - 6A^3 = 0$$

ausgedrückt. Demnach hat man folgenden für unser Sechseck characteristischen Satz:

*Alle Strahlbüschel, welche von Punkten der Ebene nach den Ecken eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks gezogen werden können, haben die Eigenschaft, dass für die durch sie repräsentirten Formen $6^{\text{ten}}$ Grades die Invariante:*

$$125C - 75AB - 6A^3$$

*verschwindet.*

Es mag nur beiläufig daran erinnert werden, dass in Folge dieser Gleichung die dem Strahlbüschel entsprechende Gleichung $6^{\text{ten}}$ Grades eine Resolvente $6^{\text{ten}}$ Grades besitzt (deren Wurzeln die aus (1) durch positive Permutationen hervorgehenden Ausdrücke sind), welche eine Wurzel 0 hat und sich also auf eine Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades reducirt.

Aber nach dem Früheren (§ 3.) liegen alle Punkte, für welche die Invariante $A$ des Strahlbüschels verschwindet, auf einer Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Ecken des Sechsecks zu Doppelpunkten hat. Setzt man für das Produkt der Ecken des Sechsecks symbolisch den Ausdruck:

$$\varphi = u_\alpha^6 = u_\beta^6 \ldots,$$

so ist die Gleichung dieser Curve:

$$A = (\alpha\beta x)^6 = 0.$$

Diese Curve ist also das Bild des Durchschnitts der Diagonalfläche mit einer Fläche $2^{\text{ter}}$ Ordnung; eine Curve, bei welcher, wie in § 15. bei ähnlicher Veranlassung entwickelt wurde, unendlich viele Tripel von Punkten durch Lösung quadratischer Gleichungen gefunden werden können. Da nun die Punkte eines Tripels durch eine cubische

Gleichung getrennt werden, so kann man durch Lösung quadratischer und einer cubischen Gleichung unendlich viele Punkte der Ebene finden, für welche $A$ verschwindet. Dann aber verschwindet nach (2) auch $C$; aber, wie nach Herrn Joubert für die Modulargleichung $A$ und $C$ verschwinden, so lässt sich auch zeigen, dass jede solche Gleichung als lineare Transformation der Modulargleichung aufgefasst werden kann, und man hat den Satz:

*In der Ebene kann man durch Lösung quadratischer und cubischer Gleichungen beliebig viele Punkte einer Curve* $A = 0$ *finden; die Punkte dieser Curve haben die Eigenschaft, dass die Gleichungen der von ihnen nach den Ecken des zehnfach Brianchon'schen Sechsecks gehenden Strahlbüschel lineare Transformationen der Modulargleichung sind.*

Dass die Gleichung 6ten Grades, für welche $A = 0$, $C = 0$, wirklich durch eine lineare Transformation in die Modulargleichung übergeführt werden kann, entnimmt man sofort der Abhandlung des Herrn Gordan, Annali di mat. Bd. II. Ser. II. Führen wir ausser den oben schon benutzten Invarianten und Covarianten der Form 6ten Grades noch die folgenden ein:

$$l = (ai)^4 a_z^2, \quad m = (il)^2 i_z^2, \quad n = (im)^2 i_z^2,$$
$$\vartheta = (nl)\, n_z l_z, \quad D = (mm')^2, \quad R = (lm)\,(ln)\,(mn),$$

so folgt aus der citirten Abhandlung der Satz (vgl. Göttinger Nachrichten 1870, p. 105):

*Sobald* $A$ *und* $C$ *verschwinden, bestimme man* $\varkappa = u^4$ *aus der Gleichung 4ten Grades:*

$$\frac{1 - 6\varkappa^2 + \varkappa^4}{\varkappa(1 - \varkappa^2)} = \frac{12 R}{B^2 \sqrt{-BD}};$$

*mittelst der Substitution*

$$\frac{v + u^5}{vu^4 - u} = \frac{2\vartheta}{l\sqrt{-BD}},$$

*welche hier, indem* $\vartheta$ *und* $l$ *einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, eine lineare wird, geht* $f = 0$ *in die Modulargleichung:*

$$v^6 - 4u^5 v^5 + 5u^2 v^4 - 5u^4 v^2 + 4uv - u^6 = 0$$

*über.*

So finden sich denn wirklich alle Elemente der Auflösung der Gleichungen 5ten Grades hier in einem geometrischen Bilde zusammengefasst und verbunden; während diese geometrischen Gebilde selbst merkwürdige Eigenschaften zeigen, denen jener Zusammenhang ein erhöhtes Interesse verleiht.

Göttingen, den 10. Juni 1871.

---

# Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen.

Von Felix Klein in Göttingen.

Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen wird in schönster Weise durch eine Anzahl besonderer geometrischer Beispiele illustrirt; ich erinnere nur*) an das Problem der Wendepunkte der Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung, an die 28 Doppeltangenten der Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung, an die 27 Linien auf den Flächen $3^{\text{ten}}$ Grades etc., dann aber namentlich auch an die Kreistheilung.

Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, dass sie die an und für sich so eigenartig abstracten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. Sie beziehen sich zumeist auf Gleichungen von sehr particulärem Character, zwischen deren Wurzeln besondere Gruppirungen Statt haben, und lassen also übersehen, wie so derartige besondere Gleichungen auftreten können. Ich will nun im Folgenden auf eine Methode aufmerksam machen, vermöge deren man ein geometrisches Bild für die *allgemeinen* Gleichungen eines beliebigen Grades erhält, insbesondere für diejenigen Gruppirungen der Wurzeln einer solchen Gleichung, wie man sie zur Aufstellung der Resolventen gebraucht. Diese Methode benutzt als Bild für die $n$ Wurzeln einer Gleichung $n$ Elemente des Raumes von $(n - 2)$ Dimensionen und ersetzt die Vertauschungen der Wurzeln unter sich durch diejenigen linearen Transformationen des genannten Raumes, durch welche die $n$ gegebenen Elemente in sich übergeführt werden. Vermöge dieser Repräsentation wird die Theorie der Gleichungen $n$. Grades in einen merkwürdigen Zusammenhang gebracht mit der Theorie der Covarianten von $n$ Elementen eines Raumes von $n - 2$ Dimensionen, so zwar, dass jede der beiden Theorieen geradezu als ein Bild der anderen angesehen werden kann. — Das Wesentliche an dieser Vorstellungsweise ist, dass die Vertauschungen der $n$ Wurzeln unter sich im geometrischen Bilde ersetzt werden durch lineare Transformationen

*) Vergl. Camille Jordan. Traité des Substitutions. I, p. 301 ff.

eines continuirlichen Raumes. Auch Gleichungen von particulärer Art kann man in ähnlicher Weise geometrisch versinnlichen, wobei dann nicht mehr alle, sondern nur die charakteristischen Vertauschungen ihrer Wurzeln im Bilde als lineare Raumtransformationen erscheinen. Ich beschränke mich im Folgenden darauf, zu zeigen, das eben dieser Charakter des geometrischen Bildes sich bei den Wendepunkten der Curven 3[ter] Ordnung und bei den Kreistheilungsgleichungen vorfindet. — Weiterhin will ich dann noch für die allgemeinen Gleichungen 6[ten] Grades eine auf denselben Principien begründete Repräsentation geben, welche der Liniengeometrie entnommen ist, und durch welche man ein in sich geschlossenes System von 360 linearen und 360 reciproken Umformungen des Raumes von 3 Dimensionen kennen lernt. Dabei tritt insbesondere auch die bekannte Resolvente 6[ten] Grades solcher Gleichungen in Evidenz, welche der besonderen*) Gruppe von 120 Substitutionen entspricht, die sich bei 6 Elementen aufstellen lässt und nicht mit den 120 Substitutionen von 5 Elementen identisch ist.

Die nächste Veranlassung zu den hiermit angedeuteten Dingen sind mir die geometrischen Betrachtungen gewesen, die Herr Clebsch in dem vorstehenden Aufsatze behufs Discussion der Gleichungen 5[ten] Grades angewandt hat, und welche mir derselbe in wiederholten persönlichen Unterhaltungen mitzutheilen die Güte hatte. Auf der anderen Seite stehen dieselben im engsten Zusammenhange mit den Betrachtungen über lineare Transformationen geometrischer Gebilde in sich selbst, wie dieselben von Herrn Lie und mir in dem Aufsatze: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen" (diese Annalen, IV. 1), auseinandergesetzt worden sind.

## I.

### Geometrische Repräsentation für die Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades.

*Es seien $n$ Elemente (oder $n$ ebene Mannigfaltigkeiten von $(n-3)$ Dimensionen) des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen gegeben. Dieselben gehen durch ein geschlossenes System**) von $n!$ linearen Transformationen des betreffenden Raumes in sich über.*

Man kann nämlich allgemein durch eine lineare Transformation eines solchen Raumes $n$ Elemente desselben in $n$ beliebige überführen;

---

*) Cf. Serret. Traité d'Algèbre Supérieure. t. II, p. 308.

**) Unter einem geschlossenen Systeme von Transformationen soll hier, wie dies bereits in der citirten Arbeit von Herrn Lie und mir geschehen ist, ein System verstanden werden, dessen Transformationen mit einander combinirt immer wieder Transformationen des Systems ergeben.

es ist andererseits die Transformation vollkommen bestimmt, wenn $n$ von einander unabhängige entsprechende Elementenpaare gegeben sind. Insbesondere kann man nun $n$ Elemente mit ihren $n$ entsprechenden in beliebiger Reihenfolge zusammenfallen lassen. Es giebt hiernach so viele lineare Transformationen des Raumes, durch die beliebig gewählte $n$ Elemente in sich übergeführt werden, als es Permutationen von $n$ Dingen giebt, also $n!$. Diese Transformationen bilden ein geschlossenes System, da beliebig viele von ihnen mit einander combinirt wieder eine lineare Transformation ergeben, durch welche die Gesammtheit der $n$ Elemente ungeändert bleibt, die also selbst dem gegebenen Systeme angehört.

Ein Beispiel bilden: 3 Punkte einer Geraden, welche durch 6, 4 Punkte einer Ebene, welche durch 24, 5 Punkte des Raumes, welche durch 120 lineare Transformationen ihrer bez. Träger in sich übergehen.

Auf ein beliebiges Element des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen denke ich mir nun die $n!$ Transformationen angewandt, welche die $n$ gegebenen Elemente unter einander vertauschen. Dasselbe nimmt dann im Allgemeinen $n!$ besondere Lagen an. *Das System der somit erzeugten $n!$ Elemente ist das Bild der Galois'schen Resolvente der durch die $n$ gegebenen Elemente vorgestellten Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades.*

Für besondere Annahmen des beliebigen Elementes können die $n!$ Elemente, welche aus ihm hervorgehen, zu mehreren jedesmal zusammenfallen. Die Galois'sche Resolvente wird dann eine Potenz eines Ausdrucks, der als eine besondere Resolvente bezeichnet wird.

*Als Bild jeder besonderen Resolvente erscheinen also diejenigen Elementengruppen, welche mehrfach zählend in den allgemeinen Gruppen von $n!$ Elementen enthalten sind.*

Diese geometrischen Definitionen sind einer analytischen Einkleidung fähig, welche die vollkommene Identität derselben mit den gewöhnlichen Definitionen der Substitutionstheorie klar darlegt. Die $n$ gegebenen Elemente mögen durch ihre Gleichungen vorgestellt sein:

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \ldots\ldots$$

Zwischen den linearen Ausdrücken $p, q, r \ldots.$ besteht eine lineare identische Gleichung. Wir wollen nun die Ausdrücke $p, q, r \ldots$ von vornherein mit solchen Constanten multiplicirt denken, dass die Identität die Form hat:

$$0=p+q+r+\cdots\cdots\cdots$$

Unter dieser Annahme sind die $n!$ Transformationen des Raumes dargestellt, indem man die neuen $p, q, r, \ldots$ den früheren in beliebiger Reihenfolge gleichsetzt. Die fraglichen linearen Transformationen sind

also in ganz gleicher Weise bezeichnet, wie die Vertauschungen von $n$ Dingen $p, q, r, \ldots\ldots$

Sei ferner ein beliebiges Element gegeben:

$$0 = ap + bq + cr + \cdots\cdot\cdot$$

Die $n!$ Elemente, die aus diesem durch die betr. Transformationen hervorgehen, sind dargestellt durch alle diejenigen Gleichungen, welche aus der vorstehenden durch die Vertauschungen der $p, q, r \ldots$ oder, was auf dasselbe herauskommt, der $a, b, c \ldots$ abgeleitet werden können. Die Multiplication aller dieser Gleichungen mit einander ergiebt die Gleichung der ganzen Elementengruppe, die das Bild der Galois'schen Resolvente ist. Besonderen Werthen von $a, b, c \ldots$ entsprechend kann dann diese Resolvente die Potenz eines niederen Ausdruckes werden.

Wir wollen das Gesagte durch das Beispiel $n = 4$, also das Viereck, oder, was bequemer ist, das Vierseit in der Ebene*) illustriren.

Die 4 Seiten desselben seien vorgestellt durch:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

wobei die Identität besteht:

$$p + q + r + s = 0.$$

Aus jeder beliebig angenommenen Geraden:

$$ap + bq + cr + ds = 0$$

entsteht im Allgemeinen ein System von 24 zusammengehörigen. Dieselben kann man leicht in folgender Weise construiren. Die beliebig angenommene Gerade schneidet die 4 Seiten des Vierseits in 4 Punkten, welche mit den jedesmal auf einer solchen Seite liegenden 3 Eckpunkten des Vierseits ein gewisses Doppelverhältniss bestimmen. Man construire nun auf jeder Seite diejenigen 24 Punkte (von denen der jedesmalige Schnittpunkt einer ist), welche mit den 3 auf der Seite liegenden Eckpunkten, die letzteren in beliebiger Reihenfolge genommen, eins der 4 Doppelverhältnisse bilden. Diese viermal 24 Punkte liegen zu 4 vierundzwanzigmal auf einer Geraden; diese 24 Geraden (von denen die gegebene eine ist), sind die gesuchten.

Geht die beliebig gewählte Gerade insbesondere durch einen Eckpunkt des Vierseits, so erhält man, wie leicht zu sehen, nur 12 Gerade, die paarweise durch die Eckpunkte des Vierseits gehen. In der That, wenn die gegebene Gerade durch einen Eckpunkt geht, müssen zwei der Coefficienten $a, b, c, d$ einander gleich werden. Die Galois'sche Resolvente wird dem entsprechend das Quadrat einer Gleichung 12ten Grades.

*) Vergl. den vorstehenden Aufsatz § 4.

Insbesondere kann die gegebene Gerade durch 2 gegenüberstehende Eckpunkte des gegebenen Vierseits gehen. Dann erhält man nur noch Systeme von 3 Geraden, nämlich die 3 Diagonalen des Vierseits. Dieselben sind das Bild einer Resolvente $3^{\text{ten}}$ Grades, und wird man auch auf eine solche geführt, wenn man die $a$, $b$, $c$, $d$ paarweise gleichnimmt, also etwa, was wegen der zwischen den $p$, $q$, $r$, $s$ bestehenden Identität gestattet ist, $a = b = 1$, $c = d = -1$ wählt.

## II.

## Die Covarianten von $n$ Elementen des Raumes von $n - 2$ Dimensionen.

Die Gruppen von $n!$ Elementen, welche nach dem Vorstehenden gegebenen $n$ Elementen des Raumes von $(n - 2)$ Dimensionen zugeordnet werden, sind offenbar *Covarianten* des Systems gegebener Elemente, in welchen die absoluten, durch lineare Transformationen unveränderlichen Zahlenwerthe (Doppelverhältnisse), durch welche das hinzutretende Element mit Bezug auf die $n$ gegebenen festgelegt wird, als Parameter fungiren.

Die Gleichungen dieser Covarianten haben eine merkwürdige Eigenschaft. *Sie sind rational aus den symmetrischen Functionen der $p$, $q$, $r$, ... zusammensetzbar.* Es geht das unmittelbar aus der Entstehung dieser Gleichungen hervor, die wir erhielten, indem wir in einer beliebigen linearen Gleichung die $p$, $q$, $r$, ... auf alle Weisen vertauschten und dann die resultirenden Gleichungen zusammen multiplicirten.

Es versteht sich dabei von selbst, dass die Gleichungen der besonderen Elementengruppen, welche, besonderen Resolventen entsprechend, mehrfach zählend in den allgemeinen Gruppen enthalten sind, damit auch auf sie diese Darstellung Anwendung finde, in der die Multiplicität ausdrückenden Potenz genommen werden müssen.

Andererseits ist ersichtlich, dass von den symmetrischen Functionen der $p$, $q$, $r$ ... eine, nämlich ihre Summe, entsprechend der Identität:

$$0 = p + q + r + \cdots,$$

in Wegfall kommt.

Nun lässt sich leicht einsehen, *dass die bisher betrachteten Gruppen von $n!$ Elementen die einzig denkbaren Covarianten der gegebenen $n$ Elemente sind, welche von getrennten Elementen gebildet werden, oder allgemeiner, dass jede Covariante der gegebenen $n$ Elemente*

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \; \ldots$$

*rational aus den $(n - 1)$ nicht verschwindenden symmetrischen Functionen der $p$, $q$, $r$, ... zusammengesetzt ist.*

In der That, jede Covariante muss durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen, wie das ursprüngliche Gebilde. Ihre Gleichung muss also durch die $n!$ Vertauschungen der $p, q, r \dots$ unter sich im vorliegenden Falle ungeändert bleiben, muss sich also nach bekannten Sätzen rational durch die symmetrischen Functionen ausdrücken lassen.

Dieses Raisonnement bedarf noch einer Ergänzung in demselben Sinne, wie eine solche für die (mehrfach zählenden) Covarianten von weniger als $n!$ Elementen nothwendig war. Die Gleichung der Covariante braucht nämlich nicht völlig bei den Vertauschungen der $p, q, r \dots$ ungeändert zu bleiben, sondern es kann dabei ein Factor vertreten. Dieser Factor kann aber nur eine Einheitswurzel sein, insofern die Wiederholung einer bestimmten Vertauschung endlich einmal die Identität erzeugt, und also eine bestimmte Potenz des Factors gleich wird der Einheit. Die entsprechende Potenz der Covariantengleichung bleibt dann bei den Vertauschungen der $p, q, r, \dots$ völlig ungeändert; sie ist es, die wir als eigentliche Covariante ansprechen müssen, und die sich rational aus den symmetrischen Functionen der $p, q, r, \dots$ zusammensetzen lässt.

*Es ist durch die letzten Betrachtungen die Theorie der Covarianten von $n$ Elementen im Raume von $(n-2)$ Dimensionen in engste Verbindung gesetzt mit der Theorie der Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades.*

Als Beispiel der Anwendbarkeit solcher Ueberlegungen für die Theorie der Covarianten folge hier die aus ihnen entspringende Behandlung des einfachsten Falles $n = 3$, also die Behandlung *der cubischen binären Formen.*

Es sei eine cubische binäre Form $f$ gegeben. Dieselbe sei vorgestellt durch 3 Punkte einer geraden Linie. So kann man die gerade Linie durch 6 lineare Transformationen umformen (unter denen die Identität ist), durch welche die gegebenen 3 Punkte unter einander vertauscht werden. Durch dieselben gruppiren sich die Punkte der Geraden zu 6 zusammen. *Diese Gruppen von je 6 Punkten sind Covarianten der gegebenen cubischen Form; andere Covarianten giebt es nicht,* in dem Sinne, dass jede Covariante sich in eine Anzahl solcher Gruppen von 6 Punkten auflösen muss.

Es ist nun leicht, sich von dem geometrischen Charakter dieser Punktgruppen Rechenschaft zu geben, und erledigt sich dadurch zugleich die Frage: ob etwa unter denselben Potenzen von niederen Gruppen enthalten sind. Eine Gruppe von 6 Punkten enthält nämlich wie dies unmittelbar aus der Erzeugung folgt, wie dies andererseits auch zu ihrer Definition hinreicht, solche 6 Punkte, welche mit den gegebenen 3, wenn man deren Reihenfolge beliebig vertauscht, das nämliche Doppelverhältniss bilden, oder, wass dasselbe ist, sie enthält

solche 6 Punkte, die mit den gegebenen 3, die letzteren in fester Reihenfolge gedacht, 6 zusammengehörige Doppelverhältnisse bilden. Zusammengehörig heissen dabei jedesmal diejenigen 6 Doppelverhältnisse, welche bei veränderter Reihenfolge von 4 gegebenen Punkten auftreten.

Es geht hieraus hervor, dass sich unter den einfach unendlich vielen Gruppen von je 6 Punkten, ausser derjenigen, welche doppelt zählend durch $f = 0$ selbst vorgestellt wird, 2 ausgezeichnete finden werden, entsprechend einem harmonischen und einem äquianharmonischen Verhältnisse.

Die Gruppe der harmonisch liegenden Punkte besteht aus 3 doppelt zählenden Punkten. Dieselben bilden die Covariante 3ten Grades, welche in der Theorie der binären cubischen Formen gewöhnlich mit $Q$ bezeichnet wird.

Die Gruppe der äquianharmonisch liegenden Punkte umfasst nur 2 dreifach zählende Punkte. Dieselben constituiren die quadratische Covariante $\Delta$ der gewöhnlichen Theorie.

Recht anschaulich hat man die gegenseitige Beziehung der Formen $f$, $Q$, $\Delta$, wenn man sie nicht als Punkte einer Geraden, sondern als Strahlen eines Büschels interpretirt und dabei die beiden Strahlen $\Delta = 0$ nach den unendlich weiten imaginären Kreispunkten hingehen lässt. $f = 0$ wird sodann von 3 Strahlen gebildet, welche miteinander gleiche Winkel $= \frac{2}{3} R$ einschliessen. $Q = 0$ umfasst die Halbirungslinien der von diesen 3 Strahlen gebildeten Winkel. Endlich jede sechselementige Gruppe besteht aus solchen 6 Strahlen, welche mit den Elementen von $f = 0$ Winkel $= \pm \varphi$ einschliessen, wo $\varphi$ irgend eine Neigung bezeichnet. Die linearen Transformationen, durch welche $f = 0$ und also auch $Q$ und $\Delta$, sowie jede sechselementige Gruppe in sich übergehen, bestehen einmal in Rotationen des Strahlbüschels in seiner Ebene um jedesmal $\frac{2}{3} R$, sodann in einer Rotation des Strahlbüschels um ein Element von $f = 0$ um $2 R$, durch welche die Ebene des Büschels umgelegt wird.

Unter Zugrundelegung der Factoren von $\Delta$ als Variabeln übersieht man nun leicht, dass sich jede sechselementige Gruppe aus 2 solchen linear und homogen zusammensetzt. Man hat daher zwischen je 3 sechselementigen Gruppen eine homogene lineare Gleichung. Insbesondere wird eine solche Gleichung zwischen $f^2$, $Q^2$, $\Delta^3$ existiren, etwa:

$$\Delta^3 = \varrho f^2 + \sigma Q^2.$$

Es ist bekannt, wie auf einer Identität dieser Form die Auflösung der cubischen Gleichungen beruht.

Wie vorstehend die Theorie der Covarianten dreier Punkte der Geraden aus der Betrachtung der Vertauschung von 3 Elementen unter

sich abgeleitet wurde, so wird man in ganz ähnlicher Weise die Covarianten des Vierseits in der Ebene, des Pentaeders im Raume u. s. w. f. behandeln können. Hierzu eine Bemerkung, die particulär für das Pentaeder ausgesprochen werden soll, aber die ganz geradeso auf den allgemeinen Fall Anwendung findet. Als Resolvente der Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades, welche durch ein Pentaeder im Raume repräsentirt wird, kann nicht nur ein System von 120 zusammengehörigen Ebenen oder Punkten, sondern überhaupt von 120 zusammengehörigen (d. h. aus einem durch Anwendung der Transformationen hervorgehenden) geometrischen Gebilde, Curven, Flächen u. s. w. gelten. Wenn nun auf einer covarianten Fläche des Pentaeders etwa eine endliche Anzahl besonderer Curven aufliegt, so werden sich dieselben immer zu solchen Resolventen zusammengruppiren; was man auch so aussprechen kann: *alle Gleichungen, zu denen covariante Flächen des Pentaeders Anlass geben können, lassen sich in solche zerlegen, welche Resolventen der einen Gleichung* $5^{\text{ten}}$ *Grades sind.*

Ein Beispiel ist das folgende. Es seien die 5 Pentaederebenen:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0,$$

und sei, wie immer:

$$p + q + r + s + t = 0.$$

So giebt es eine covariante Fläche $3^{\text{ten}}$ Grades*):

$$p^3 + q^3 + r^3 + s^3 + t^3 = 0.$$

Die 27 Geraden dieser Fläche zerfallen, wie dies auch Herr Clebsch in dem vorstehenden Aufsatze nachgewiesen hat, in 2 Gruppen, in eine von 15 (dieselben zählen als Glieder einer Galois'schen Resolvente 8mal), und in eine von 12 (welche 10mal zählen).

## III.

## Die Gleichung für die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung. Die Kreistheilung.

Es ist bereits im Eingange hervorgehoben worden, das das Wesentliche an der im Vorstehenden vorgetragenen Repräsentation für die Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades das ist, *dass die Vertauschungen der Wurzeln unter sich im Bilde durch lineare Transformationen des Raumes ersetzt werden können.* Ich will jetzt zeigen, dass die Darstellung, welche gewisse Gleichungen $9^{\text{ten}}$ Grades durch die Wendepunkte der Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung finden, einen ähnlichen Charakter besitzt. Dasselbe gilt für die Kreistheilungsgleichungen. Es tritt nur in beiden

*) Auf die Eigenschaft dieser Flächen, durch lineare Transformationen in sich überzugehen, bin ich zuerst durch Herrn Lie aufmerksam gemacht worden.

Fällen der Umstand modificirend hinzu, dass die geometrisch repräsentirten Gleichungen nicht mehr die allgemeinen ihres Grades sind, sondern dass unter ihren Wurzeln Gruppirungen stattfinden. Entsprechend finden in dem geometrischen Bilde nicht mehr alle Vertauschungen der Wurzeln ihre Darstellung durch lineare Transformationen, sondern nur gewisse, mit den Gruppirungen der Wurzeln eng verknüpfte.

Was zunächst die Gleichung der Wendepunkte betrifft, so ist leicht zu sehen, *dass eine allgemeine ebene Curve* 3ter *Ordnung und insbesondere ihre Wendepunkte durch* 18 *lineare Transformationen in sich übergehen.* Man überzeugt sich davon am einfachsten, wenn man von der canonischen Gleichungsform der auf ein Wendepunktsdreieck bezogenen Curve ausgeht. Dieselbe ist:

$$0 = a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + b x_1 x_2 x_3 .$$

Die betreffenden linearen Transformationen setzen sich zusammen aus Vertauschungen der $x$ unter sich und Multipliciren derselben mit passenden 3ten Wurzeln der Einheit.

*Durch diese Transformationen geht nun nicht nur die gegebene Curve $f$, sondern auch ihre Hesse'sche Determinante $\Delta$, überhaupt jede Curve des Büschels $f + \lambda\Delta$ in sich über.*

Dadurch, dass diese Transformationen gleichzeitig einfach unendlich viele Curven 3ter Ordnung in sich überführen, ist der Widersinn gehoben, der bei einer ersten Abzählung darin liegt, dass eine allgemeine Curve 3ter Ordnung, welche doch von 9 Constanten abhängt, durch eine endliche Anzahl linearer Transformationen, die ja nur 8 Parameter enthalten, in sich übergehen soll.

Als geometrisches Bild für die Gleichung 9ten Grades betrachten wir nun nicht die Curve 3ter Ordnung, welche die Wendepunkte besitzt, sondern *die Wendepunkte selbst und den Transformationscyclus, durch welche diese untereinander vertauscht werden.*

Jede Gleichung, zu der eine Curve 3ter Ordnung, ohne dass dabei ein fremdes Element benutzt wird, Veranlassung geben kann, muss sich in Resolventen der Wendepunktsgleichung zerlegen lassen. Man suche z. B. nach solchen Dreiecken, deren Seiten die $C_3$ jedesmal in einer Ecke berühren. Die Darstellung der $C_3$ durch elliptische Functionen zeigt sofort, dass es 24 solcher Dreiecke giebt. Die Auffindung derselben kommt nämlich auf Neuntheilung der elliptischen Functionen heraus; von den 81 durch dieselbe gelieferten Werthen beziehen sich 9 auf die Wendepunkte selbst und die 72 übrigen ergeben zu 3 jedesmal dasselbe Dreieck. Nun aber schreibt sich die $C_3$ mit Bezug auf ein solches Dreieck als Fundamentaldreieck folgendermassen:

$$0 = a(x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 + x_1 x_2^2) + b x_1 x_2 x_3 .$$

Wenn man $x_1$, $x_2$, $x_3$ cyclisch vertauscht, bleibt diese Gleichung und

das Dreieck ungeändert. Diesen Vertauschungen entsprechen lineare Transformationen, welche in den obengenannten 18 enthalten sind; denn nur diese besitzen die Eigenschaft, die $C_3$ in sich überzuführen. Das Dreieck bleibt also ungeändert durch 3 der 18 Transformationen, durch welche die $C_3$ in sich übergeht. Jedesmal 6 Dreiecke bilden also eine unveränderliche Gruppe, eine Resolvente der Wendepunktsgleichung. Die Auflösung der Gleichung $2^{\text{ten}}$ Grades, welche die Dreiecke bestimmt, verlangt zunächst die Lösung einer Gleichung vom $4^{\text{ten}}$ Grade zur Bestimmung der Gruppen von je 6 zusammengehörigen Dreiecken, sodann nur noch die Lösung der Wendepunktsgleichung. — Man kommt natürlich auf dasselbe Resultat, wenn man die Neuntheilung der elliptischen Functionen behandelt. —

Hierzu noch die beiläufige Bemerkung, dass mit den 18 hier betrachteten linearen Transformationen eng verbunden sind 18 reciproke Transformationen. Dieselben erhält man aus den 18 linearen, unter $x_i$, $u_i$ Punkt- und Linien-Coordinaten mit Bezug auf ein Wendepunktsdreieck verstanden, wenn man die $x_i$ mit den $u_i$ vertauscht. An Stelle der Wendepunkte treten dann deren harmonische Polaren, an Stelle des Büschels $f + \lambda\Delta$ das Büschel der die Polaren berührenden Curven $3^{\text{ter}}$ Classe u. s. w. Bei diesem Gesichtspunkte erscheint die Untersuchung der 18 linearen und 18 reciproken Transformationen als Hauptproblem; dabei erledigt sich denn nebenher die Theorie der Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung oder $3^{\text{ter}}$ Classe und deren wechselseitige Zusammengehörigkeit.

Was die *Kreistheilungsgleichungen* oder die projectivischen Verallgemeinerungen derselben, die *Gleichungen der cyclischen Projectivität**), angeht, so übersieht man sofort, wie so bei ihnen die charakteristischen Vertauschungen der Wurzeln im geometrischen Bilde durch lineare Transformationen (Rotationen der Ebene um den Mittelpunkt des Kreises) ersetzt werden können.

## IV.

## Geometrische Repräsentation der allgemeinen Gleichung sechsten Grades.

Ich wende mich jetzt zur Erörterung der besonderen geometrischen Repräsentation, welche man für die Gleichungen $6^{\text{ten}}$ Grades aufstellen kann. *Dieselbe stellt die Wurzeln der Gleichung durch 6 paarweise in Involution liegende lineare Complexe dar; den Vertauschungen derselben unter sich entsprechen lineare Umformungen des Punktraumes.*

Die dabei in Betracht kommenden geometrischen Dinge sind

*) cf. Clebsch im Crelle'schen Journal t. LXIII. p. 120.

grossentheils dieselben, welche ich in dem Aufsatze: „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und 2ten Grades" (diese Annalen t. II) auseinander gesetzt habe. Gemäss den dortigen Erörterungen besteht zwischen 6 linearen Complexen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots\ldots x_6 = 0,$$

welche paarweise miteinander in Involution liegen (vergl. den genannten Aufsatz), eine identische Gleichung von der Form:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots x_6^2.$$

Nun benutze ich ferner einen Satz der Liniengeometrie, den ich unter einer etwas weniger allgemeinen Form in meiner Inauguraldissertation*) ausgesprochen habe. Derselbe lautet folgendermassen:

Es mögen der Coordinatenbestimmung der geraden Linie 6 beliebige lineare Complexe zu Grunde gelegt sein; dieselben werden eine identische Gleichung 2ten Grades befriedigen:

$$R = 0.$$

*Einer collinearen oder reciproken Umformung des Raumes entspricht eine lineare Transformation der Liniencoordinaten, bei welcher $R$ in ein Multiplum seiner selbst übergeht. Umgekehrt, setzt man statt der Liniencoordinaten solche lineare Ausdrücke, dass $R$ dadurch in ein Multiplum seiner selbst übergeführt wird, so entspricht dem eine collineare oder reciproke Umformung des Raumes.*

In dem hier vorliegenden Falle wird nun durch eine Vertauschung der $x$ untereinander die Identität, welche zwischen denselben besteht, in ihrer Form nicht geändert. Jeder Vertauschung der $x$ entspricht also eine collineare oder reciproke Umformung des Raumes, und zwar ist es eine collineare oder eine reciproke, je nachdem die Vertauschung der $x$ aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt ist.

*Die* 720 *Vertauschungen der* 6 *Complexe $x$ untereinander oder die mit denselben gleichbedeutenden* 360 *collinearen und* 360 *reciproken Umformungen des Raumes gruppiren einerseits jedesmal* 720 *Linien, andererseits je* 360 *Punkte und* 360 *Ebenen zusammen; jede solche Gruppe ist ein Bild der Galois'schen Resolvente der durch die sechs Complexe vorgestellten Gleichung* 6ten *Grades.*

Es ist hier nicht meine Absicht, diese Gruppen näher zu untersuchen, was übrigens im Anschlusse an die Linien-Coordinatenbestimmung sehr leicht ist; ich will hier nur darauf hinweisen, wie die Systeme von geraden Linien, welche bezüglich 2, 3, 4 der Complexe gemeinsam sind (vergl. den citirten Aufsatz), Beispiele für besondere Resolventen bilden.

---

*) „Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des 2ten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form." Bonn 1868. C. Georgi.

Je 2 der 6 gegebenen Complexe haben eine Congruenz gemein und diese besitzt 2 Directricen. Es giebt $\frac{6.5}{2} = 15$ derartiger Directricenpaare. Diese Directricenpaare sind zugleich diejenigen Linienpaare, welche den 4 übrigen Complexen jedesmal gemeinsam sind.

*Die* 15 *Directricenpaare sind das Bild einer Resolvente* 15ten *Grades.*

Die 15 Directricenpaare bilden nun die Kanten von 15 Tetraedern (dem entsprechend, dass man 6 Elemente auf 15 Weisen in 3 Gruppen von 2 theilen kann).

*Diese* 15 *Tetraeder stellen eine zweite Resolvente* 15ten *Grades dar.*

Aus den 15 Tetraedern nun kann man auf 6 Weisen solche 5 aussuchen, die zusammen alle 30 Directricen zu Kanten haben.

*Diese Gruppen von* 5 *Tetraedern repräsentiren eine Resolvente des* 6ten *Grades.*

Es ist dies die schon im Eingange erwähnte von der gegebenen Gleichung verschiedene Resolvente des 6ten Grades.

Je 3 der gegebenen 6 Complexe haben die Linien einer Erzeugung eines Hyperboloids gemein, während die Linien der anderen Erzeugung desselben Hyperboloids den übrigen 3 Complexen angehören. Es giebt 10 derartige Hyperboloide, entsprechend den 10 Möglichkeiten, 6 Dinge in 2 Gruppen von 3 zu theilen.

*Die Hyperboloide bilden eine Resolvente des* 10ten *Grades.*

Ich will dabei ausdrücklich hervorheben, dass die Gleichung 16ten Grades, von der die Bestimmung der Singularitäten der Kummer'schen Fläche 4ten Grades mit 16 Knotenpunkten abhängt*) und die, wie ich a. a. O. gezeigt habe, in unmittelbarer Beziehung zu einem System von 6 linearen Complexen der hier betrachteten Art steht, *keine* Resolvente der durch die Complexe repräsentirten Gleichung 6ten Grades ist. Vielmehr ist ihre Beziehung zu der Gleichung 6ten Grades derartig, dass man ihre 16 Wurzeln durch das Symbol

$$(a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm \cdots \pm a_6 x_6)^2$$

darstellen kann, wo die Vorzeichen der $a$ nur so genommen werden sollen, dass die Zahl der gleichen Vorzeichen immer eine gerade ist.**)

---

*) Dass die Auflösung dieser Gleichung nur die Lösung einer allgemeinen Gleichung 6ten Grades und mehrerer quadratischer verlangt, hat zuerst Herr Camille Jordan nachgewiesen (Crelle's Journal LXX).

**) Zu dieser Gleichung 16ten Grades steht eine zweite von demselben Grade in naher Beziehung: diejenige, welche die 16 Geraden einer $f_4$ mit Doppelkegelschnitt bestimmt (oder auch die 16 Geraden einer $f_3$, die einen festen Kegelschnitt derselben treffen). Die letztere Gleichung verlangt zu ihrer Lösung nur eine Gleichung 5ten Grades und mehrere quadratische. Dieselbe ist aufzufassen als eine der im Texte betrachteten Gleichungen 16ten Grades, bei welcher man eine Wurzel der zu lösenden Gleichung 6ten Grades adjungirt hat.

Zum Schlusse will ich noch darauf hinweisen, wie die hier vorgetragene geometrische Repräsentation der Gleichungen $6^{ten}$ Grades den algebraischen Charakter einiger der Aufgaben übersehen lässt, die in dem allgemeinen Probleme enthalten sind: *diejenigen rationalen Umformungen anzugeben, durch welche eine allgemeine Gleichung* $6^{ten}$ *Grades in eine andere übergeführt wird, welche eine bestimmte Invarianteneigenschaft besitzt.* Eine Methode zur Behandlung dieses Problems ist allerdings bereits von Herrn Clebsch in dem vorstehenden Aufsatze nicht nur für die Gleichungen des $6^{ten}$ Grades, sondern für die eines beliebigen Grades angedeutet (§ 2.); es ist aber vielleicht immer interessant, zu sehen, wie sich diese Dinge bei der hier angewandten geometrischen Repräsentation stellen.

Den 6 Complexen $x$ entsprechen in einer beliebigen Ebene des Raumes 6 Punkte, welche auf einem Kegelschnitte liegen (cf. die citirte Arbeit). Diese 6 Punkte sollen die gegebene Gleichung $6^{ten}$ Grades vorstellen. Giebt man der Ebene nun irgend eine andere Lage, so geht die gegebene Gleichung $6^{ten}$ Grades durch rationale Substitution in eine andere über. Insbesondere kann man der Ebene solche Lagen geben, dass die Gleichung ausgezeichnete Invarianteneigenschaften erhält.

Legt man z. B. die Ebene durch einen der 4 Eckpunkte der eben erwähnten 15 Tetraeder hindurch, so verschwindet für die resultirende Gleichung die Invariante $R$, die 6 entsprechenden Punkte bilden eine Involution.

Fällt die Ebene in eine der 60 Seitenflächen der 15 Tetraeder, so rücken die 6 Punkte in ihr in 3 doppelt zählende Punkte zusammen.

Berührt endlich etwa die Ebene eins der 10 eben genannten Hyperboloide, so zerfällt der Kegelschnitt, der die 6 Punkte enthält, in 2 Gerade, auf deren jeder 3 Punkte liegen. Die Gleichung $6^{ten}$ Grades ist also dann durch eine quadratische Gleichung und 2 cubische lösbar.

Göttingen im Mai 1871.

# An example of the higher transformation of a binary form.

By A. Cayley.

The quartic

(1) $$(a, b, c, d, e)(x, y)^4$$

is by means of the two quadrics

(2) $$(\alpha, \beta, \gamma)(x, y)^2 \quad \text{and} \quad (\alpha', \beta', \gamma')(x, y)^2$$

transformed into

(3) $$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x_1, y_1)^4,$$

that is, eliminating $x$, $y$ from

$$(a, b, c, d, e)(x, y)^4 = 0,$$
$$x_1(\alpha, \beta, \gamma)(x, y)^2 + y_1(\alpha', \beta', \gamma')(x, y)^2 = 0,$$

we obtain

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x_1, y_1)^4 = 0.$$

It is required to express the invariants of (3) in terms of the simultaneous invariants of (1) and (2).

Write

$$P, Q, R = \alpha x_1 + \alpha' y_1, \ \beta x_1 + \beta' y_1, \ \gamma x + \gamma' y_1$$

the equations from which $(x, y)$ have to be eliminated are

$$(a, b, c, d, e)(x, y)^4 = 0, \quad (P, Q, R)(x, y)^2 = 0$$

and the result of the elimination therefore is

$$\begin{vmatrix} & a, & 4b, & 6c, & 4d, & e \\ a, & 4b, & 6c, & 4d, & e & \\ & & & P, & 2Q, & R \\ & & P, & 2Q, & R & \\ & P, & 2Q, & R & & \\ P, & 2Q, & R & & & \end{vmatrix} = 0,$$

viz. this determinant is the transformed quartic $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x_1, y_1)^4$

The developed expression of the determinant is

$$
\begin{aligned}
& a^2R^4 - 8\,ab\,QR^3 \\
& + \begin{pmatrix} -12\,ac \\ +16\,b^2 \end{pmatrix} PR^3 - 24\,ac\,Q^2R^2 + \begin{pmatrix} 24\,ad \\ -48\,bc \end{pmatrix} PQR^2 - 32\,ad\,Q^3R \\
& + \begin{pmatrix} 2\,ae \\ -32\,bd \\ +36\,c^2 \end{pmatrix} P^2R^2 + \begin{pmatrix} -16\,ae \\ +64\,bd \end{pmatrix} PQ^2R + 16\,ae\,Q^4 \\
& + \begin{pmatrix} 24\,be \\ -48\,cd \end{pmatrix} P^2QR - 32\,be\,PQ^3 + \begin{pmatrix} -12\,ce \\ +16\,d^2 \end{pmatrix} P^3R + 24\,ce\,P^2Q^2 \\
& - 8\,de\,P^3Q + e^2P^4.
\end{aligned}
$$

So that writing for $P$, $Q$, $R$ their values, we have the transformed function $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x_1, y_1)^4$, the coefficients being of the forms

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (a,\ b,\ c,\ d,\ e)^2\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^4 \\
b_1 &= (\qquad ,, \qquad)^2\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma)^3\ (\alpha',\ \beta',\ \gamma') \\
&\ \vdots \\
e_1 &= (\qquad ,, \qquad)^2\ \ldots\ldots\ (\alpha',\ \beta',\ \gamma')^4.
\end{aligned}
$$

Writing $I$, $J$ for the invariants of the quartic (1), and

$$
\begin{aligned}
A &= 4(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) - (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2, \\
B &= (e,\ c,\ a,\ b,\ c,\ d)(\alpha\beta' - \alpha'\beta,\ \gamma\alpha' - \gamma'\alpha,\ \beta\gamma' - \beta'\gamma)^2,
\end{aligned}
$$

we have $I$, $J$, $A$, $B$ simultaneous invariants of the forms (1) and (2). Putting moreover $\nabla = I^3 - 27\,J^2$, and writing $I_1$, $J_1$, $\nabla_1$, for the like invariants of the form (3) I find

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 4(4\,IB^2 + 12\,JAB + \tfrac{1}{3}\,I^2A^2) \\
J_1 &= 8\left\{8\,JB^3 + \tfrac{4}{3}\,I^2AB^2 + 2\,IJA^2B + (2\,J^2 - \tfrac{1}{27}\,I^3)\,A^3\right\}
\end{aligned}
$$

and thence

$$\nabla_1 = 256\,(4\,B^3 - IA^2B - JA^3)\,\nabla.$$

As a verification, suppose $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)(x,\ y)^4 = x^4 + y^4$ (whence $I = 1$, $J = 0$). And take $x_1(x+y)^2 - y_1(x-y)^2 = 0$ for the transforming equation, that is $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (1,\ 1,\ 1)$ and $(\alpha',\ \beta',\ \gamma') = (-1,\ 1,\ -1)$. We have $P = R = x_1 - y_1$ and $Q = x_1 + y_1$ and thence

$$
\begin{aligned}
\text{Det.} &= (P^2 + R^2)^2 - 16\,PQ^2R + 16\,Q^4 \\
&= (2\,P^2 - 4\,Q^2)^2 = (-2\,x_1^2 - 12\,x_1y_1 - 2\,y_1^2)^2,
\end{aligned}
$$

that is

$$(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1)(x_1,\ y_1)^4 = 4\,(x_1^2 + 6\,x_1y_1 + y_1^2)^2,$$

whence

$$I_1 = \frac{4096}{3},\ = \frac{2^{12}}{3};\quad J_1 = -\frac{262144}{27},\ = -\frac{2^{18}}{27};$$

also

$$A = -16,\quad B = 8,$$

and the equations for $I_1$, $J_1$ become

$$\frac{4096}{3} = 4\,(4 \cdot 64 + \tfrac{1}{3}\,256)$$

$$-\frac{262144}{27} = 8\,(\tfrac{1}{3} \cdot -16 \cdot 64 + \tfrac{1}{27}\,4096)$$

which are true. More generally assuming

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)\ (x,\ y)^4 = x^4 + 6\,\Theta x^2 y^2 + y^4$$

(whence $I = 1 + 3\,\Theta^2$, $J = \Theta - \Theta^3$) and the same transforming equation, we have

$$(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1)\ (x_1,\ y_1)^4 = 4\,(\overline{1 + 3\,\Theta}\,x_1^2 + \overline{3 - 3\,\Theta}\ 2\,x_1\,y_1 + \overline{1 + 3\,\Theta}\,y_1^2)^2,$$

whence

$$I_1 = \frac{2^{12}}{3}\,(1 - 3\,\Theta)^2, \qquad J_1 = -\frac{2^{18}}{27}\,(1 - 3\Theta)^3;$$

also

$$A = -16, \qquad B = 8\,(1 - \Theta)\,.$$

Substituting these different values in the equations for $I_1$, $J_1$, we obtain

$$16\,(1 - 3\,\Theta)^2 = 12\,(1 + 3\,\Theta^2)\,(1 - \Theta)^2 - 72\,(\Theta - \Theta^3)\,(1 - \Theta) + 4\,(1 + 3\,\Theta^2)^2$$

and

$$\begin{aligned} -\ 8\,(1 - 3\,\Theta)^3 = {} & 27\,(\Theta - \Theta^3)\,(1 - \Theta)^3 - 9\,(1 + 3\,\Theta^2)^2\,(1 - \Theta)^2 \\ & + 27\,(1 + 3\,\Theta^2)\,(\Theta - \Theta^3)\,(1 - \Theta) - 54\,(\Theta - \Theta^3)^2 + (1 + 3\,\Theta^2)^3, \end{aligned}$$

which are in fact satisfied identically.

Cambridge, 26. July 1871.

# Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln.

Von Paul du Bois-Reymond in Freiburg i. Br.

## Einleitung.

Von Fourier ist das erste Integral entdeckt worden, welches dazu dient, Functionen berechenbar darzustellen, die für verschiedene Intervalle ihres Arguments verschiedenen analytischen Gesetzen folgen. Es bot sich ihm als Grenzfall der nach ihn benannten Reihen dar. In der That, setzt man $\frac{\pi}{\Delta\gamma}$ statt $c$, $\gamma_p$ statt $p\Delta\gamma$ in der Reihe:

$$(1)\quad f(x) = -\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} f(\alpha)\cos\left[\frac{p\pi}{c}(\alpha - x)\right]d\alpha,$$

in welche man bekanntlich die gewöhnliche Sinus-Cosinus-Reihe (wo $c = \pi$) überführen kann, und welche die willkürliche Function $f(x)$ im Intervall $-c < x < +c$ darstellt, so wird daraus:

$$(1_a)\quad \pi f(x) = -\frac{\Delta\gamma}{2}\int_{-\frac{\pi}{\Delta\gamma}}^{+\frac{\pi}{\Delta\gamma}} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{p=0}^{p=\infty}\Delta\gamma\int_{-\frac{\pi}{\Delta\gamma}}^{+\frac{\pi}{\Delta\gamma}} f(\alpha)\cos[\gamma_p(\alpha - x)]\,d\alpha,$$

und dieser Ausdruck geht, wenn man $\Delta\gamma$ verschwinden lässt, nach der Definition des Integrales als Grenze einer Summe in

$$(2)\quad \pi f(x) = \int_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos[\gamma(\alpha - x)]\,d\alpha$$

über, welches die *Fourier'sche Formel* ist.

Diesen Uebergang von der Summe zum Integral bei einer unendlichen Reihe zu versuchen, war ein kühner und folgenreicher Gedanke, der Lejeune-Dirichlet's Ausspruch*) bestätigt, „dass in der

*) In seiner Vorlesung über partielle Differentialgleichungen bei Angabe der Operation, durch welche Taylor zu seiner Reihe geführt wurde. Diese Operation bestand darin, dass er in der bekannten endlichen Differenzreihe:

$$y_n = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_2 y + \cdots \Delta_n y,$$

wo $\Delta y = f(x+\Delta) - f(x)$, $\Delta_2 y = f(x + 2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)$ etc., sowohl $x$ als $\frac{1}{n}$ Null werden liess, und zwar so, dass $n\Delta x$ dabei constant blieb.

Mathematik alle grossen Entdeckungen aus dem Uebergange vom Endlichen zum Unendlichgrossen oder Unendlichkleinen entsprungen seien."

Gleichwohl kann man die eben angedeutete Fourier'sche Herleitung seiner Formel als einen völlig befriedigenden *Beweis* derselben nicht gelten lassen, da bei dem gewöhnlichen und legitimen Uebergange von der Summe zum Integral die Grenzen des Integrales als endlich vorausgesetzt werden, und ein Integral mit unendlicher Grenze erst selbst durch Uebergang von einem Integral mit endlicher Grenze zu einem Integral mit unendlicher Grenze entstanden gedacht werden muss. Es häufen sich daher in der Fourier'schen Operation mehrere Grenzübergänge, was ohne besondere Rechtfertigung im Allgemeinen nicht zulässig ist. Um aus der Fourier'schen Entwickelung einen *Beweis* zu machen, wäre, die Richtigkeit von (1) und die Convergenz des Integrales in (2) vorausgesetzt, zu zeigen, dass in der mit der Fourier'schen Entwickelung identischen Gleichung:

$$\pi f(x) - \int_0^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha) \cos[\gamma(d - x)]$$

$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \left( \Delta\gamma \int_{-\frac{\pi}{\Delta\gamma}}^{+\frac{\pi}{\Delta\gamma}} f(\alpha) \cos[\gamma_p(\alpha - x)]\, d\alpha - \int_{p\Delta\gamma}^{(p+1)\Delta\gamma} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha) \cos[\gamma(\alpha - x)] \right)$$

die Grösse rechter Hand durch Verkleinerung von $\Delta\gamma$ kleiner gemacht werden kann, wie jede vorgelegte Grösse. Denn da die Grösse linker Hand $\Delta\gamma$ nicht enthält, so müsste sie alsdann von vornherein kleiner als jede noch so kleine Grösse sein, d. h. sie müsste Null sein: ein häufig anzuwendendes Schlussverfahren, dessen Eigenthümlichkeit darin besteht, dass man dabei einen Grenzübergang umgeht, wie ja z. B. in dem eben behandelten Falle $\Delta\gamma$ nicht Null gesetzt zu werden braucht. Nun, es lässt sich zwar der Nachweis führen, dass die Summe rechter Hand mit $\Delta\gamma$ unter jede Grenze abnimmt, der Nachweis ist aber etwas umständlich, und jedenfalls kann man auf diesem Wege die Fourier'sche Formel nicht verallgemeinern.

Ein anderer Beweis der Fourier'schen Formel, der in älteren Arbeiten auftritt, ist der sogenannte Deflers'sche*), dessen Poisson sich bedient**), der von Herrn Liouville***) sogar zu einer freilich im Resultate nur theilweise richtigen Verallgemeinerung der Fourier'schen Formel benutzt wurde, und der auch in Lehrbücher†) über-

*) Bulletin de la Société philomatique 1819. Citat von Poisson.

**) Ec. Polyt. Tome 12, pag. 454 u. a. a. O.

***) Journal de Math. d. Liouville, 1. Bd. Note sur une manière de généraliser la formule de Fourier.

†) Cournot, Infinitesimalanalysis, übers. von Schnuse, pag. 445.

gegangen ist. Indessen, weit entfernt, ein vollgültiger Beweis der Fourier'schen Formel zu sein, ist vielmehr der sogenannte Deflers'sche Beweis nur ein Aperçu, geeignet, bei erster Bekanntschaft die ungewöhnliche Formel plausibel erscheinen zu lassen. Der Beweis lautet wie folgt:

„Setzen wir der Einfachheit halber in (2) $x = 0$, so können wir (2) schreiben:

$$\pi f(0) = \lim_{h=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \lim_{h=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Da nun im Integral rechts für endliche Werthe von $\alpha$ und $h = \infty$ $f\left(\frac{\alpha}{h}\right) = f(0)$ wird, für unendliche Werthe von $\alpha$ $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ aber verschwindet, so ist wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha = \pi$ die vorstehende Gleichung erwiesen."

Zunächst ist das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha$ gar nicht für eine beliebige Function $f(\alpha)$ convergent, sondern $f(\alpha)$ unterliegt, weil das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha h}{\alpha}\, d\alpha$ *bedingt* convergent ist, nicht blos der Beschränkung, nicht unendlich werden zu dürfen, sondern, wie ich an einem anderen Orte*) zeigen werde, auch dieser, dass das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(\alpha)}{d\alpha}\, d\alpha$ *absolut* convergent sein muss.

Aber abgesehen hiervon, selbst wenn man, wie dies nöthig zu sein scheint (Art III), über die Function $f(\alpha)$ für sehr grosse Werthe ihres Argumentes gewisse einschränkende Voraussetzungen macht, so liegt doch in dem Schlusse noch ein anderer wirklicher Fehler, der deutlich hervortritt, wenn man von der Function $f(x)$ annimmt, dass sie für einzelne Intervalle von $x$ Null ist. Setzen wir z. B. $f(x)$ gleich Null ausser im Intervall $0 < x < A$ und wenden auf das Integral

$$\int_0^A f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \int_0^{Ah} f\left(\frac{\alpha}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

den Deflers'schen Schluss an. Wenn $h$ ins Unbegrenzte wächst, wird $f\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ für jeden endlichen Werth von $\alpha$ sich dem Werthe $f(0)$ nähern, für unbegrenzt grosse Werthe von $\alpha$ wird $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ verschwinden, also

*) In einem bald erscheinenden Werkchen „über Convergenz und Divergenz von Integralen und Reihen" (B. G. Teubner's Verlag).

müsste für $h = \infty$ dies Integral $f(0)\frac{\pi}{2}$ werden, was auch wirklich der Fall ist, aber nicht oder doch nicht allein aus dem eben angegebenen Grunde. Denn der nämliche Schluss lässt sich z. B. bei dem Integral $\int\limits_0^{Ah} \frac{\sin\frac{\alpha}{h}}{\alpha}\, d\alpha$ wiederholen, das Null werden müsste, aber in Wirklichkeit gleich $\int\limits_0^{A} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha$ ist. Versucht man es, dem Deflers'schen Schlusse Präcision zu ertheilen, so gelangt man zu der nun zu erwähnenden Theorie.

In einer Abhandlung *Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welchen das Fourier'sche Doppelintegral gehört* *), habe ich Betrachtungen über das Fourier'sche Integral und ihm verwandte Integrale veröffentlicht, welche den Zweck hatten, zum Kern der Frage vorzudringen. Bei aufmerksamem Studium der Fourier'schen Formel und indem, um durchgreifende Aufklärungen zu gewinnen, die Frage möglichst allgemein gestellt wurde, zeigte es sich zunächst, dass das Problem darauf hinausläuft, die Richtigkeit der Gleichung

$$\int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx\, f(x)\, \varphi(x, z) = f(0) \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx\, \varphi(x, z)$$

nachzuweisen, sobald festgestellt ist, dass das Integral $\int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx\, \varphi(x, z)$ für jeden Werth von $a$ $(0 < a \leqq \infty)$ *einen endlichen, von dem variablen a unabhängigen* Werth hat. Indem das Integral links als

$$\lim_{h=\infty} \int\limits_0^a f(x)\, \Phi(x, h)\, dx,$$

wo $\int\limits_0^h dz\, \varphi(x, z) = \Phi(x, h)$, aufgefasst wurde, gelang der Beweis der obigen Gleichung mit Hülfe eines Mittelwerthsatzes, auf welchen die Untersuchung mit der zwingenden Nothwendigkeit organischen Zusammenhangs führte, ich meine mit Hülfe des Lemma des § 3. der citirten Abhandlung.

Ueber den dort gegebenen Beweis dieses „zweiten" Mittelwerthsatzes sei es mir gestattet, einige Worte zu sagen. Ich habe diesem Beweise einen absoluten Charakter zu geben versucht, indem ich *nur Integralzerlegungen und Mittelwerthe* anwendete und durchaus nicht

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, pag. 65.

auf die Definition des Integrales als Grenze einer Summe zurückging, und muss bekennen, dass anders mich der erste veröffentlichte Beweis des Satzes nicht völlig befriedigt haben würde, weil ein Beweis, seine Richtigkeit vorausgesetzt, um so vollkommener dem zu beweisenden Theorem angepasst ist, je weniger Merkmale der im Theorem auftretenden Begriffe er benutzt. Verzichtet man auf diese Eigenschaft, so kann, wie Hr. Hankel gezeigt hat*), der Beweis erheblich kürzer gefasst werden.

Durch diese in der citirten Abhandlung durchgeführte Untersuchung und einige andere darin enthaltene Betrachtungen war indessen das uns von Fourier erschlossene Gebiet noch keineswegs völlig durchforscht. Vielmehr blieben sogar noch manche Fragen allgemeiner Natur zu behandeln übrig, deren einige Gegenstand der hier vorliegenden, jene erste ergänzenden Mittheilungen sind. Folgendes ist in wenig Worten ihr Inhalt:

Ein bestimmtes Doppelintegral

$$\int_{X_0}^{X_1} dx \int_{Y_0}^{Y_1} dy\, f(x, y),$$

wo $X_0$, $X_1$, $Y_0$, $Y_1$ Zahlen bedeuten, ist das Resultat des Ueberganges der variabeln Grenzen $x_0$, $x_1$, $y_0$, $y_1$ des unbestimmten Integrales $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy\, f(x, y)$ in die Zahlenwerthe $X_0$, $X_1$, $Y_0$, $Y_1$. Setzt man $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$ und giebt dem bestimmten Doppelintegral die Form $F(X_1, Y_1) - F(X_0, Y_1) - F(X_1, Y_0) + F(X_0, Y_0)$, so ist klar, dass das bestimmte Integral, je nach der Reihenfolge, in der die Grössen $x_0$, $y_0$, $x_1$, $y_1$ ihre festen Werthe annehmen, oder — wenn sie ihnen gleichzeitig ertheilt werden — je nach den zwischen ihnen festgesetzten Beziehungen, einer unendlichen Anzahl von Werthen fähig sein kann, wie ja die Zweideutigkeit von Doppelintegralen schon von Cauchy**) entdeckt und mit Beispielen belegt worden ist. Diese Vieldeutigkeit der Doppelintegrale setzt die „Stetigvieldeutigkeit"***) der Function $F(x, y)$ für die den Grenzen des bestimmten Integrales entsprechenden Werthepaare von $x$ und $y$ voraus. So kann z. B.

*) Schlömilch's Zeitschrift.

**) Mémoire sur les intégrales définies, Par. Mém. des Savans étrangers.

***) Unter Stetigvieldeutigkeit ist die Singularität von Functionen mehrerer Variabeln verstanden, bei welcher sie für einen Punkt nicht allein einer unendlichen Zahl discreter Werthe, sondern einer stetigen Folge von Werthen fähig sind, so ist für $x = 0$, $y = 0$ $\frac{y}{x + x^2}$ aller Werthe fähig, denn für $y = ax$ wird $\frac{y}{x + x^2} = \frac{a}{1 + x}$. Setzt man hierin $x = 0$, so ist also $\lim \frac{y}{x + x^2} = a$, mithin eine ganz beliebige Grösse (Borchardt's Journal, Bd. 70.).

$$F(x, y) = \frac{a(x-1) + b(y-1) + (x-1)(y-1)}{a_1(x-1) + b_1(y-1) + (x-1)(y-1)}$$

für $x = 1$, $y = 1$, je nachdem man erst $x = 1$, dann $y = 1$ setzt, oder umgekehrt verfährt, oder $y - 1 = \alpha(x - 1)$ und dann $x = 1$ setzt, die Werthe

$$\frac{b}{b_1}, \quad \frac{a}{c_1}, \quad \frac{a + \alpha b}{a_1 + \alpha b_1}$$

erhalten, wo $\alpha$ ganz beliebig ist.

Von den verschiedenen Annahmen über den Sinn eines Doppelintegrales, die hiernach möglich sind, ist in der citirten Abhandlung nur die der Fourier'schen Formel analoge berücksichtigt worden, wonach

$$\int_0^\infty dz \int_0^a dx f(x)\varphi(x, z) = \lim_{h=\infty,\, z_0=0} \lim_{x_0=0} \int_{z_0}^h dz \int_{x_0}^a dx f(x)\varphi(x, z).^{*})$$

Es blieb also noch der allgemeinere Fall zu untersuchen übrig, wo

$$\int_0^\infty dz \int_0^a dx f(x)\varphi(x, z) = \mathrm{Lim} \int_{z_0}^h dz \int_{x_0}^a dx f(x)\varphi(x, z)$$

und Lim einen ganz beliebigen gleichzeitigen oder successiven Uebergang der Grössen $x_0$, $z_0$, $h$ in die Werthe 0, 0, $\infty$ bedeutet.

Aber noch in einer anderen und wichtigeren Beziehung waren meine älteren Untersuchungen zu vervollständigen.

Schon Fourier hatte durch zweimalige Anwendung seiner Formel eine neue Formel aufgestellt, um willkürliche Functionen von zwei Veränderlichen durch ein *vierfaches* Integral darzustellen. Es ist dies die Formel:

$$\pi^2 f(\xi, \eta) = \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y) \cos z(x - \xi) \cos z_1 (y - \eta)$$

und ebenso kann man Functionen von drei Veränderlichen durch sechsfache Integrale ausdrücken u. s. w.

Eine viel merkwürdigere Formel ist indessen von Hrn. C. Neumann entdeckt worden und findet sich (p. 149) in seiner 1862 erschienenen Schrift: *Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.***) Durch die Neumann'sche Formel wird eine willkürliche Function von zwei Veränderlichen durch ein *dreifaches* Integral dargestellt. Sie lautet:

---

*) $\lim_{h=\infty,\, z_0=0}$ bedeutet hier, dass es gleichgültig ist, in welcher Folge man $h = \infty$ zu $z_0 = 0$ setzt und $\lim_{h=\infty,\, z_0=0} \lim_{x=0} J$ ist gleichbedeutend mit $\lim_{h=\infty,\, z_0=0} \left(\lim_{x_0=0} J\right)$.

**) Halle, bei H. W. Schmidt.

$$2\pi f(o_1, \varphi_1) = \int_0^\infty n\,dn \int_0^\infty o\,do \int_0^{2\pi} d\varphi\, J\left(n\sqrt{o^2 + o_1^2 - 2\,o o_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}\right),$$

wo $J(x)$ die Bessel'sche Function nullter Ordnung, und sie ergiebt sich, wenn man einen von ihm gefundenen Ausdruck für die stationäre Temperatur eines Punktes im Innern einer homogenen Kugel von beliebig vertheilter und gegebener Oberflächentemperatur auf einen Punkt an der Oberfläche anwendet. Diese Herleitung ist, wie Herr C. Neumann selbst bemerkt, nicht völlig streng, indessen hat er die Richtigkeit seiner Formel durch eine treffend gewählte Analogie fast ausser Zweifel gesetzt.

War die im 69. Bande des Borchardt'schen Journals gegebene Theorie der Fourier'schen Formel die richtige, so musste sie auch Rechenschaft geben von diesen ferneren Formeln, der Fourier'schen mit dem vierfachen und der Neumann'schen mit dem dreifachen Integral, was denn auch vollständig der Fall ist.

Den in dieser Einleitung berührten Fragen entsprechend, zerfällt die Abhandlung in drei Abschnitte:

I. Die erweiterte Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale und Formeln für Darstellung von willkürlichen Functionen einer Veränderlichen.

II. Die Theorie der Fourier'schen drei- und mehrfachen Integrale und die Formeln zur Darstellung von willkürlichen Functionen zweier Veränderlichen durch dreifache und vierfache Integrale.

III. Anwendung der in II. entwickelten Theorie auf besondere Fälle von hervorragendem Interesse.

---

## Ueber die Fourier'schen Doppelintegrale und die Fourier'sche Formel.

### I.

### Fourier'sche Integrale, bei denen die unbestimmt gedachten Grenzen successive ihre bestimmten Werthe annehmen.

Das Integral

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x, y)$$

soll unabhängig von $a$ sein. Wir setzen $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \varphi(x, y)$, um zu untersuchen, was aus dem unbestimmten Integral

$$(1)\quad \int_{y_0}^h dy \int_{x_0}^a dx\, \varphi(x, y) = F(a; h) - F(a, y_0) - F(x_0, h) + F(x_0, y_0)$$
$$= \Pi(x_0, y_0, a, h) = \Pi$$

wird, wenn die Variabeln $x_0$, $y_0$, $h$ *successive* in die bestimmten Werthe 0, 0, $\infty$ übergehen.

Ist die Grösse $F(a, \infty) - F(a, 0)$ von $a$ unabhängig und ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = \infty$ in $F(x_0, h)$, $F(x_0, y_0)$ gesetzt werden, so wird das Aggregat $\Pi$ für jene Werthe stets Null. Ich nehme nun an, diese Reihenfolge sei nicht gleichgültig, sondern $F(x_0, h)$ nehme den Werth $F_1'$ oder $F_2'$ an, je nachdem erst $x_0 = 0$, dann $h = \infty$ gesetzt oder umgekehrt verfahren wird, ebenso werde $F(x_0, y_0)$ entweder $F_1''$ oder $F_2''$, je nachdem erst $x_0$, dann $y_0$, oder erst $y_0$, dann $x_0$ verschwindet. Da $F(a, \infty) - F(a, 0)$ von $a$ unabhängig ist, so kann man sich darin $a = 0$ gesetzt denken, und dann wird diese Differenz $F_2' - F_2''$.

Eine vierfache Anordnung der Einführung ihrer festen Werthe 0, 0, $\infty$ für $x_0$, $y_0$, $\infty$, die verschiedene Werthe von $\Pi$ liefert, ist möglich. In folgender Aufzeichnung stehen von links nach rechts die nacheinander einzuführenden Werthe von $x_0$, $y_0$, $h$ angegeben, sodass links beginnt:

für $\begin{matrix} h = \infty, \\ y_0 = 0 \end{matrix}$ $x_0 = 0$ wird $\Pi = F_2' - F_2'' - F_2' + F_2'' = 0$

für $x_0 = 0$, $\begin{matrix} h = \infty \\ y_0 = 0 \end{matrix}$ wird $\Pi = F_2' - F_2'' - F_1' + F_1''$

für $h = \infty$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ wird $\Pi = F_2' - F_2'' - F_2' + F_1'' = F_1'' - F_2''$,

für $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, $h = \infty$ wird $\Pi = F_2' - F_2'' - F_1' + F_2'' = F_2' - F_1''$.

Diese vier verschiedenen Fälle können wir in Form von einfachen Integralen schreiben. Wir setzen $\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = \varphi(x, y)$. Die vier oben angegebenen Werthe erhalten wir aus den Integralen

$$(2)\quad \begin{aligned} &\int_{x_0}^{a} \big(\psi(x, \infty) - \psi(x, 0)\big)\, dx, \quad &&\int_0^a \big(\psi(x, h) - \psi(x, y_0)\big)\, dx, \\ &\int_0^a \big(\psi(x, \infty) - \psi(x, y_0)\big)\, dx, \quad &&\int_0^a \big(\psi(x, h) - \psi(x, 0)\big)\, dx, \end{aligned}$$

indem wir im ersten $x_0$ verschwinden lassen, im zweiten in beliebiger Reihenfolge $h = \infty$, $y_0 = 0$, im dritten $y_0 = 0$, im vierten $h = \infty$ werden lassen, und zwar in den letzten drei Fällen, *nachdem* die Integration nach $x$ von 0 bis $a$ vollzogen ist.

Auf die letzten drei Integrale, wenn man sich unter dem Integralzeichen die Klammer noch mit einer beliebigen Function $f(x)$ multiplicirt denkt, ist die Analyse des § 4. meiner in der Einleitung citirten Abhandlung über Fourier'sche Integrale unverändert anzuwenden. Man hat nur für das dort stehende $\Phi(x, h)$ nacheinander zu setzen

$\psi(x, h) - \psi(x, y_0)$, $\psi(x, \infty) - \psi(x, y_0)$, $\psi(x, h) - \psi(x, 0)$ und schliesslich im ersten Falle zugleich $h = \infty$, $y_0 = 0$, im zweiten $y_0 = 0$, im dritten $h = \infty$ werden zu lassen.

Auf diese Weise ist das Integral

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, f(x)\, \varphi(x, y)$$

im Allgemeinen zunächst dreideutig und kann die Werthe:

(3) $$f(0)\{F_2' - F_2'' - F_1' + F_1''\}, \quad f(0)\{F_1'' - F_2''\}, \quad f(0)\{F_2' - F_1'\}$$

annehmen.

## II.

**Fourier'sche Integrale, bei denen die unbestimmten Grenzen beliebig, gleichzeitig oder nacheinander ihre bestimmten Werthe annehmen.**

Allein es lässt sich dem Theorem:

$$\int_0^\infty dy \int_0^a dx\, f(x)\, \varphi(x, y) = f(0) \int_0^\infty dy \int_0^a dx\, \varphi(x, y)$$

ein noch allgemeinerer Ausdruck geben, der mir mittheilenswerth erscheint.

Wir können nämlich in dem Aggregat

$$\Pi = F(a, h) - F(a, y_0) - F(x_0, h) + F(x_0, y_0)$$

die Grössen $x_0$, $y_0$, $h$ in die Werthe 0, 0, $\infty$ auch *gleichzeitig* übergehen lassen, und zwar nach beliebiger gegenseitiger Beziehung, indem wir z. B. annehmen $x_0 = \varrho_1(t)$, $y_0 = \varrho_2(t)$, $\frac{1}{h} = \varrho_3(t)$, wo die Functionen $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ mit $t$ in beliebiger relativer Stärke verschwinden. Dann wird das Aggregat $\Pi$ je nach der Beschaffenheit dieser Functionen die oben angegebenen vier Werthe, aber auch unendlich viele andere Werthe annehmen können. Die Function $F(x, y)$ ist für die Werthesysteme $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \infty$ *stetigvieldeutig*.

Wir wollen mit Lim einen solchen ganz beliebigen Grenzübergang bezeichnen, der auch den Fall umfasst, wo die Variabeln $x_0$, $y_0$, $\frac{1}{h}$ successive verschwinden. Nach der obigen Bezeichnung ist dann:

$$\operatorname{Lim} \Pi = \operatorname{Lim} \int_{x_0}^a (\psi(x, h) - \psi(x, y_0))\, dx,$$

und die Grösse $\psi(x, h) - \psi(x, y_0)$ wollen wir kurz mit $\Phi$ bezeichnen. Die Ausgangswerthe der Grössen $x_0$, $y_0$, $\frac{1}{h}$, von welchen aus sie sich in Bewegung setzen, um in ihre Grenzwerthe 0, 0, 0 überzugehen, können von diesen Grenzwerthen beliebig wenig verschieden sein, und

so können wir insbesondere von $x_0$ annehmen, dass es einen ganz beliebig kleinen Werth hat, der nur eben nicht Null sein darf. Ist demgemäss auch $\alpha$ eine beliebig kleine, aber fest gedachte Grösse, die indessen zu dem Ausgangswerthe von $x_0$ in der Beziehung $0 < x_0 < \alpha$ steht, so ist nothwendiger Weise:

$$\operatorname{Lim} \int_{x_0}^{\alpha} \Phi\, dx = \operatorname{Lim} \Pi$$

und folglich:

$$\operatorname{Lim} \int_{\alpha}^{a} \Phi\, dx = 0.$$

Betrachten wir nun das Integral:

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\, \Phi\, dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x)\, \Phi\, dx + \int_{\alpha}^{a} f(x)\, \Phi\, dx$$

und wenden auf seine beiden Theile rechter Hand den zweiten Mittelwerthsatz an, welcher lautet:

$$\int_A^B f(x)\, \Psi(x)\, dx = f(A) \int_A^B \Psi(x)\, dx + (f(B) - f(A)) \int_{\xi}^{B} \Psi(x)\, dx, \qquad A < \xi < B$$

[$\Psi(x)$ zwischen den Grenzen $A$ und $B$ beliebig, $f(x)$ zwischen diesen Grenzen entweder nirgends ab- oder nirgends zunehmend], so erhalten wir:

$$\int_{x_0}^{\alpha} f(x)\, \Phi\, dx = f(x_0) \int_{x_0}^{\alpha} \Phi\, dx + (f(\alpha) - f(x_0)) \int_{\xi}^{\alpha} \Phi\, dx, \qquad x_0 < \xi < \alpha$$

$$\int_{\alpha}^{a} f(x)\, \Phi\, dx = f(\alpha) \int_{\alpha}^{a} \Phi\, dx + (f(a) - f(\alpha)) \int_{\xi_1}^{a} \Phi\, dx, \qquad \alpha < \xi_1 < a$$

und durch Addition:

$$\int_{x_0}^{a} f(x)\, \Phi\, dx = f(x_0) \int_{x_0}^{\alpha} \Phi\, dx + (f(\alpha) - f(x_0)) \int_{\xi}^{\alpha} \Phi\, dx$$

$$+ f(\alpha) \int_{\alpha}^{a} \Phi\, dx + (f(a) - f(\alpha)) \int_{\xi_1}^{a} \Phi\, dx.$$

Nach dieser Umformung lassen wir die Grössen $x_0$, $y_0$, $h$ sich in Bewegung setzen, um in ihre Grenzwerthe 0, 0, $\infty$ überzugehen. Sind sie dort angelangt, so ist aus dem ersten Glied rechts geworden:

$$f(0)\,.\operatorname{Lim} \Pi\,.$$

Das dritte Glied rechts wird Null und das vierte offenbar auch,

wenn Lim $\xi_1$ eine feste Grösse ist, da $\alpha \leqq$ Lim $\xi_1 \leqq \alpha$ sein muss. Aber auch im Falle Lim $\xi_1$ unbestimmt wäre, müsste das vierte Glied verschwinden, denn wenn der Lim $(F(a, h) - F(a, y_0)) = F_2' - F_2''$ unabhängig von $a$ ist für *jeden festen Werth* von $a$ innerhalb eines Intervalles $A \leqq a \leqq B$, so kann der Grenzwerth $F(a, h) - F(a, y_0)$ kein anderer als $F_2' - F_2''$ werden, auch wenn man sich, während $h$ und $y_0$ in ihre Grenzwerthe übergehen, $a$ beliebig im Intervall $A \ldots B$ hin und her bewegt denkt, z. B. wenn wir $a$ durch $A + \sin^2(h).(B - A)$ ersetzt denken. Das zweite Glied wird:

$$(f(\alpha) - f(0)) \operatorname{Lim} \int_{\xi}^{\alpha} \Phi \, dx .$$

Da es aber der Unterschied der Grössen:

$$\operatorname{Lim} \int_{x_0}^{\alpha} f(x) \Phi \, dx , \qquad f(0) \operatorname{Lim} \Pi ,$$

mithin von $\alpha$ unabhängig ist und wegen der Differenz $f(\alpha) - f(0)$, in der $\alpha$ eine beliebig klein zu denkende Grösse, beliebig klein gemacht werden kann, so *ist* dieses zweite Glied auch kleiner als jede noch so klein zu denkende Grösse, also ist es Null.

Was die Beschränkung der Function $f(x)$ betrifft, dass sie im Intervall $0 \ldots a$ entweder nirgends ab- oder nirgends zunehmen dürfe, so ist sie wie in der citirten Abhandlung zu beseitigen. Nur in Bezug auf etwaiges Unendlichwerden von $f(x)$ ist zu bemerken, dass die dortige Angabe, die sich an die analoge von Lejeune-Dirichlet, die Fourier'schen Reihen betreffende Bemerkung anlehnt, nicht genau ist: *die Function $f(x)$ darf nur so unendlich werden, dass das Integral $\int_0^a f(x)\,dx$ absolut convergirt.* Dies findet sich für die Fourier'schen Reihen näher ausgeführt in meinem Habilitations-Programm. Unter diesen Voraussetzungen ist somit der allgemeinere Satz erwiesen:

*Bedeutet Lim einen Grenzübergang, bei welchem die Grössen $x_0$, $y_0$, $h$ in irgend einer Reihenfolge nacheinander oder gemäss irgend welchen Beziehungen gleichzeitig in die Werthe $0$, $0$, $\infty$ übergehen, und wird $f(x)$ im Intervall $x = 0 \ldots x = a$ nur in einzelnen Punkten unstetig, unbestimmt oder unendlich, und zwar nur so, dass $\int_0^a f(x)\,dx$ absolut convergent ist, so besteht die Gleichung:*

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Lim} \int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx \, f(x) \, \varphi(x, y) = f(0) \operatorname{Lim} \int_{y_0}^{h} dy \int_{x_0}^{a} dx \, \varphi(x, y) .$$

## III.

## Ueber den Uebergang vom Fourier'schen Integral zur Fourier'schen Formel.

Soviel über die „Fourier'schen Doppelintegrale“, wie ich vorgeschlagen habe, ein Integral $\int_0^\infty dz \int_0^a dx\, \varphi(x, z)$ zu nennen, wenn es von $a$ unabhängig ist. Es ist noch Einiges zu bemerken in Betreff des Uebergangs vom Fourier'schen Integral zur Fourier'schen Formel, welche die willkürlichen Functionen darstellt.

Wir wollen der Einfachheit halber diese Bemerkung an das eigentliche Fourier'sche Integral

$$\int_0^\infty dz \int_0^a dx\, f(x) \cos xz = \frac{\pi}{2} f(0)$$

knüpfen. Wir haben auch:

$$\int_0^\infty dz \int_{-a_1}^0 dx\, f(x) \cos xz = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Mithin bestehen folgende Gleichungen:

$$\int_0^\infty dz \int_{-a_1}^{+a} dx\, f(x) \cos xz = \pi f(0), \tag{4}$$

$$\int_0^\infty dz \int_0^a dx\, f(x) \cos xz = \int_0^\infty dz \int_{-a}^0 dx\, f(x) \cos xz = \frac{\pi}{2} f(0),$$

$$\int_0^\infty dz \int_\alpha^a dx\, f(x) \cos xz = 0,$$

im Fall $\alpha$ und $a$ gleichzeitig positiv oder negativ sind.

Würden wir statt $f(x)$ eine Function von der Form $F(x + \xi)$ eingeführt haben, so hätten wir die erste Formel (4) auch schreiben können:

$$\int_0^\infty dz \int_{\xi - a_1}^{\xi + a} dx\, F(x) \cos z(x - \xi) = \pi f(\xi),$$

$a$ und $a_1$ sind ganz willkürlich. Wir können also $\xi + a = B$, $\xi - a_1 = A$ setzen und von $A$ und $B$ annehmen, dass sie von $\xi$ unabhängige, übrigens ganz willkürliche Grössen sind. Alsdann ergiebt sich wegen $a = B - \xi$, $a_1 = \xi - A$ aus den Gleichungen (4), dass

$$\int_0^\infty dz \int_A^B dx\, F(x) \cos z(x - \xi)$$

den Werth $\pi F(\xi)$ hat für $B-\xi>0$, $\xi-A>0$, oder $A<\xi<B$. Für $\xi-A=0$ oder $B-\xi=0$ hat dies Integral den Werth $\frac{\pi}{2}F(\xi)$ und für $\xi>B$, $\xi<A$ ist es Null.

Wir dürfen, hierüber besteht kein Zweifel, $A$ und $B$ numerisch so gross annehmen, wie wir wollen. Aber unendlich dürfen wir $A$ und $B$ ohne Weiteres nicht werden lassen. Denn da das Integral $\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \cos xz$ aus dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \frac{\sin xh}{x}$ dadurch erhalten wird, dass $h$ von einem endlichen zum unendlichen Werth übergeht, $h$ also einmal endlich gewesen sein muss, so muss dann auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \frac{\sin xh}{x}$$

convergent gewesen sein, da ein divergentes (unendliches oder unbestimmtes) Integral nicht Object eines Grenzüberganges sein kann. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin xh}{x}$ ist bedingt convergent, und es gilt der in der Einleitung erwähnte, an einem anderen Orte zu beweisende Satz, „dass wenn ein Integral $\int_0^\infty \varphi(x)\, dx$ *bedingt* convergirt, das Integral $\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\, dx$ nur dann stets ebenfalls convergent ist, wenn $\int_0^\infty \frac{df(x)}{dx} dx$ *absolut* convergirt."

Um die Grenzen $A$ und $B$ des Integrales $\int_{-A}^{+B} dx\, f(x) \frac{\sin xh}{x}$ unendlich machen zu dürfen, würde also die Function $f(x)$ von beliebig grossen positiven oder negativen Werthen an nicht mehr ganz willkürlich, sondern gewissen Beschränkungen unterworfen sein, wenn nicht vielleicht ein solcher Satz existirte, „dass das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \frac{\sin xh}{x}$ für jede beliebige endliche Function $f(x)$ von hinreichend grossen Werthen von $h$ an convergent ist." Ohne die Vermuthung aussprechen zu wollen, dass ein solcher Satz nicht existirt, muss ich doch bemerken, dass mir nicht einmal ein Analogon zu einem solchen Satz bekannt ist.

Wenn wir also hier, und wo es auch sei, von einem Fourier'schen Integral

$$\int_0^\infty dz \int_{-a}^{+a} dx\, f(x) \cos xz = \pi f(0)$$

zur Fourier'schen Formel

$$(5)\qquad \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F(x) \cos\,[z\,(x-\xi)] = \pi F(\xi)$$

übergehen, so wird dies stets unter der stillschweigenden Voraussetzung geschehen, dass die Function $F(x)$ von hinlänglich grossen positiven oder negativen Werthen ihres Argumentes an so beschaffen ist, dass das Integral convergent ist.

---

## Fourier'sche drei- und mehrfache Integrale.

### IV.

### Der zweite Mittelwerthsatz bei Doppelintegralen.

Wir stellen zunächst den zweiten Mittelwerthsatz bei zweifachen Integralen auf. Durch Anwendung des Mittelwerthsatzes auf das nach $y$ genommene Integral erhält man:

$$\int_{X_0}^{X_1} dx \int_{Y_0}^{Y_1} dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y)$$

$$= \int_{X_0}^{X_1} dx \left\{ f(x, Y_0) \int_{Y_0}^{\eta} dy\, \varphi(x, y) + [f(x, Y_1) - f(x, Y_0)] \int_{\eta}^{Y_1} dy\, \varphi(x, y) \right\},$$
$$Y_0 < \eta < Y_1,$$

unter der Voraussetzung, dass im Integrationsgebiet des Doppelintegrales links $f(x, y)$ in der $y$ Richtung entweder nirgends zu- oder nirgends abnimmt. Der Mittelwerth $\eta$ ist eine Function von $x$. Wendet man nun auf jeden Theil des Integrales nach $x$ rechter Hand den zweiten Mittelwerthsatz noch einmal an, so ergiebt sich:

$$\int_{X_0}^{X_1} dx \int_{Y_0}^{Y_1} dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y) = f(X_0, Y_0) \int_{X_0}^{\xi} dx \int_{Y_0}^{\eta} dy\, \varphi(x, y)$$
$$+ [f(X_1, Y_0) - f(X_0, Y_0)] \int_{\xi}^{X_1} dx \int_{Y_0}^{\eta} dy\, \varphi(x, y)$$
$$+ [f(X_0, Y_1) - f(X_0, Y_0)] \int_{X_0}^{\xi_1} dx \int_{\eta}^{Y_1} dy\, \varphi(x, y)$$
$$+ [f(X_1, Y_1) - f(X_0, Y_1)] \int_{\xi_1}^{X_1} dx \int_{\eta}^{Y_1} dy\, \varphi(x, y)$$
$$- [f(X_1, Y_1) - f(X_0, Y_0)] \int_{\xi_2}^{X_1} dx \int_{\eta}^{Y_1} dy\, \varphi(x, y)$$

$$(6)\quad Y_0 < \eta < Y_1,\quad X_0 < \xi < X_1,\quad X_0 < \xi_1 < X_1,\quad X_0 < \xi_2 < X_1,$$

unter der ferneren Voraussetzung, dass $f(x, y)$ für $y = Y_0$ und $y = Y_1$, während $x$ von $X_0$ bis $X_1$ geht, entweder nicht zunimmt oder nicht abnimmt.

Gemäss seiner Herleitung ist der vorstehende Mittelwerthsatz unsymmetrisch. Es kommen drei Mittelwerthe von $x$ und nur einer von $y$ vor. Diese übrigens für das Folgende gleichgültige Unsymmetrie liesse sich auf Unkosten der Einfachheit der Formel heben, wenn man die Formel bei umgekehrter Reihenfolge der Operationen ableitete und dann die Summe beider Formeln bildete*).

## V.

## Vorbereitende Sätze für die Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes auf die Fourier'schen dreifachen Integrale.

Nun sei

$$\int_0^\infty dz \int_0^a dx \int_0^b dy\, \varphi(x, y, z) = A$$

von $a$ und $b$ unabhängig. Wir setzen $\int_0^h \varphi(x, y, z)\, dz = \Phi(x, y, h)$, und ich nehme an, dass $\Phi(x, y, h)$ für keinen Punkt des Gebietes $0 < x \leqq a_1$, $0 < y \leqq b_1$ und für keinen Werth von $h$, incl. $h = \infty$, unendlich werde. Es wird also ein Unendlichwerden von $\Phi(x, y, h)$ nur für $x = 0$, $y = 0$ nicht ausgeschlossen.

*Bezeichnet alsdann* $\mathsf{S}\, dx\, dy$ *eine Integration über ein vom Gebiete* $0 < x \leqq a_1$, $0 < y \leqq b_1$ *eingeschlossenes, übrigens beliebig begrenztes Gebiet, bezeichnet ferner* $\mathsf{S}_0\, dx\, dy$ *eine Integration über ein dem Gebiete* $0 \leqq x \leqq a_1$, $0 \leqq y \leqq b_1$ *angehöriges Gebiet, welches theils durch die Linien* $x = 0$, $y = 0$, *theils durch eine dritte, diese Linie verbindende beliebige Linie begrenzt ist, so ist:*

$$(7)\quad \lim_{h=\infty} \mathsf{S}\, dx\, dy\, \Phi(x, y, h) = 0, \quad \lim_{h=\infty} \mathsf{S}_0\, dx\, dy\, \Phi(x, y, h) = A.$$

*Beweis.* Es sei $0 < \alpha < a < a_1$, $0 < \beta < b < b_1$, so hat man:

$$\lim \int_0^\alpha dx \int_0^\beta dy\, \Phi(x, y, h) = A,$$

$$\lim \int_\alpha^a dx \int_0^\beta dy\, \Phi(x, y, h) = 0,$$

$$\lim \int_0^a dx \int_\beta^b dy\, \Phi(x, y, h) = 0,$$

*) Man würde etwas kürzer zum Ziele kommen, wenn man von vornherein Polarcoordinaten einführte, weil alsdann auch für mehrfache Integrale der Mittelwerthsatz für einfache Integrale genügt. Der im Texte verfolgte Weg schien mir indessen manche Vorzüge zu haben.

$$\lim\int_\alpha^a dx\int_\beta^b dy\,\Phi(x, y, h) = 0\,,$$

wie man nach der Voraussetzung, dass $A$ von $a$ und $b$ unabhängig sei, durch Zerlegung findet, indem man bedenkt, dass die Integrale:

$$\int_0^a dx\int_0^b dy\,\Phi(x, y, h),\quad \int_0^\alpha dx\int_0^\beta dy\,\Phi(x, y, h),$$

$$\int_0^a dx\int_0^\beta dy\,\Phi(x, y, h),\quad \int_0^\alpha dx\int_0^b dy\,\Phi(x, y, h)$$

alle für $h = \infty$ den Limes $A$ haben müssen. Es ist also allgemein Null der Limes jedes Integrals $\iint dx\,dy\,\Phi(x, y, h)$ über ein dem Gebiete $0 < x \leqq a_1$, $0 < y \leqq b$ angehöriges rechteckiges Gebiet, in dessen Begrenzungen $x$ oder $y$ constant sind. Betrachten wir jetzt ein anderes als rechteckig begrenztes Gebiet $G$, so werden wir es mit beliebig grosser Annäherung aus Rechtecken zusammensetzen können, oder mit anderen Worten, wir werden aus Rechtecken ein Gebiet $R$ zusammensetzen können, welches $G$ mit beliebiger Vollkommenheit deckt. Wegen der Endlichkeit von $\Phi(x, y, h)$ wird das Integral $S\,dx\,dy\,\Phi(x, y, h)$, erstreckt über das Gebiet, über welches sich dann $G$ *allein* oder $R$ *allein* ausdehnt, ebenfalls beliebig klein gemacht werden können, so dass, da für $h = \infty$ das Integral über $R$ verschwindet, auch dasjenige über $G$ verschwinden muss.

Es ist nicht überflüssig hinzuzufügen, dass der

$$\lim_{h=\infty} \mathrm{S}\,dx\,dy\,\Phi(x, y, h)$$

verschwinden muss, auch wenn man sich die Begrenzung des Integrationsgebietes, während $h$ zu unendlichen Werthen ansteigt, in fortdauernder Formveränderung begriffen denkt, in solcher Weise, dass für $h = \infty$ sie keine feste Begrenzung, sondern eine unbestimmte ist, die nur den Punkt $x = 0$, $y = 0$ nicht enthalten darf.

Die Gleichung $\lim \mathrm{S}_0\,dx\,dy\,\Phi(x, y, h) = A$ folgt ohne Weiteres aus den Gleichungen:

$$\lim\int_0^A dx\int_0^B dy\,\Phi(x, y, h) = A,\quad \lim \mathrm{S}\,dx\,dy\,\Phi(x, y, h) = 0. \qquad Q.\ E.\ D.$$

## VI.

### Beweis der Formel

$$\int_0^\infty dz\int_0^a dx\int_0^b dy\, f(x, y)\,\varphi(x, y, z) = f(0, 0)\int_0^\infty dz\int_0^a dx\int_0^b dy\,\varphi(x, y, z),$$

**im Falle das Integral rechts von $a$ und $b$ unabhängig ist.**

Nun denken wir uns das Integral $\int_0^a dx\int_0^b dy\, f(x, y)\,\Phi(x, y, h)$ auf folgende Weise zerlegt:

$$\int_0^a\int_0^b = \int_0^a\int_0^\beta + \int_\alpha^a\int_0^\beta + \int_0^a\int_\beta^b + \int_\alpha^a\int_\beta^b$$

und wenden auf jeden der vier Theile rechter Hand den zweiten Mittelwerthsatz an, unter der Voraussetzung, dass $f(x, y)$ den durch jenen Satz auferlegten Bedingungen genügt. Ohne die sich daraus ergebende lange Formel wirklich hinzuschreiben, können wir doch leicht die Schlüsse ziehen, die uns zum gewünschten Resultat führen.

Die Glieder, in welche die vier vorstehenden Theilintegrale zerfallen, sind dreifacher Art.

*Erstens* das Glied:

$$f(0, 0)\int_0^\alpha dx\int_0^\beta dy\, \Phi(x, y, h).$$

*Zweitens* Glieder der Form:

$$\{f(\alpha, 0) - f(0, 0)\}\, J_1 \quad , \quad \{f(0, \beta) - f(0, 0)\}\, J_2 ,$$

wo $J_1$ und $J_2$ Integrale sind mit den oberen Grenzen $\alpha$ und $\beta$ und Mittelwerthen $\xi$, $\eta$ als unteren Grenzen, die den Bedingungen $0 \leq \xi \leq \alpha$, $0 \leq \eta \leq \beta$ genügen.

*Drittens* Glieder, welche mit Integralen multiplicirt sind, deren Begrenzungen nicht in das Gebiet $0 \leq x < \alpha$, $0 \leq y < \beta$ hineinragen.

Für $h = \infty$ verschwinden nach dem Obigen die Glieder dritter Art. Das Glied erster Art wird $f(0, 0)\, A$, und da nun die Grösse $\lim_{h=\infty}\int_0^a dx\int_0^b dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, h) - f(0, 0)\, A$ unabhängig von $\alpha$ und $\beta$ und gleich den Gliedern zweiter Art ist, die durch Verkleinerung von $\alpha$ und $\beta$ kleiner als jede vorgelegte Grösse gemacht werden können, so folgt:

$$(8)\quad \lim_{h=\infty}\int_0^a dx\int_0^b dy f(x, y)\varphi(x, y, h) = f(0, 0)\lim_{h=\infty}\int_0^a dx\int_0^b dy\, \varphi(x, y, h).$$

Aus dieser Gleichung folgt dann genau wie oben (Art. V.):

$$(9)\quad \begin{cases} \lim_{h=\infty} \mathrm{S}\, dxdy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, h) = 0, \\ \lim_{h=\infty} \mathrm{S}_0\, dxdy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, h) = f(0, 0)\lim_{h=\infty}\mathrm{S}\, dxdy\, \varphi(x, y, h), \end{cases}$$

wo die Integration $\mathrm{S}\,dxdy$ sich über ein Gebiet erstreckt, das den Punkt $x = 0$, $y = 0$ nicht enthält, während das Gebiet der Integration $\mathrm{S}_0\,dxdy$ die Linien $x = 0$, $y = 0$ und eine beide beliebig verbindende, den Punkt $x = 0$, $y = 0$ nicht enthaltende Linie zu Begrenzungen hat.

Die Gebiete $S_0 dx dy$, $S dx dy$ können beliebig klein sein. Ferner ist innerhalb eines solchen Gebietes die Function $f(x, y)$ nur den Beschränkungen, die der Mittelwerthsatz verlangt, unterworfen und keiner andern, denn eine geringe Ueberlegung lehrt, dass wenn $f(x, y)$ innerhalb irgend eines Gebietes $S dx dy$, das dem Gebiete $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ angehört, weder in der $x$ Richtung noch in der $y$ Richtung vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt übergeht, man die Function $f(x, y)$ leicht durch das ganze Gebiet $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ so fortgesetzt sich denken kann, dass in diesem ganzen Gebiete ein Zeichenwechsel von $f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)$, $f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)$ gleichfalls nicht stattfindet.

Es erübrigt nun noch in der Gleichung:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a dx \int_0^b dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, h) = f(0, 0) \lim_{h=\infty} \int_0^a dx \int_0^b dy\, \varphi(x, y, h),$$

die Beschränkungen von $f(x, y)$, aufzuheben, soweit sie nicht in der Natur der Sache liegen, sondern aus der Anwendung des Mittelwerthsatzes entsprangen. Unter der Voraussetzung, dass $f(x, y)$ nur in einzelnen Punkten oder Linien Singularitäten habe, bei denen es endlich bleibt, und dass auf $x=0$, $y=0$ eine solche Singularität nicht falle, wird man stets, nachdem man die singulären Punkte und Linien durch neue Begrenzungen ausgeschlossen hat, das Gebiet $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ in solche Gebiete zerlegen können, in denen $f(x, y)$ in der $x$ Richtung sowohl, wie in der $y$ Richtung entweder nirgends wächst, oder nirgends abnimmt. Das Integral über diejenigen Gebiete, die den Punkt $x = 0$, $y = 0$ nicht enthalten, giebt an der Grenze $h = \infty$ Null. Das Integral über das Gebiet erstreckt, welches den Punkt $x = 0$, $y = 0$ enthält, wird an der Grenze $f(0, 0)\, A$.

Die Integrale über die ausgeschlossenen Gebiete liefern zu dem Gesammtintegral, da man die neuen Begrenzungen den Singularitäten beliebig nähern kann, einen verschwindenden Beitrag, so dass die vorstehende Formel für jede ausser in einzelnen Punkten und Linien stetige Function $f(x, y)$ Gültigkeit besitzt. Aehnlich wie bei dem Integral $\int_0^a dx\, f(x)\, \varphi(x, h)$ zeigt man dann noch bei jenem Integral, dass die Function $f(x, y)$ so unendlich werden darf, dass das Integral über die Unendlichkeitsstelle erstreckt absolut convergirt, worauf ich hier indessen nicht des Genaueren eingehe.

## VII.

### Möglichste Verallgemeinerung der Formeln des vorigen Artikels.

Ich führe noch an, was nach dem Früheren wohl einleuchtet, dass man das Integral:

$$\int_0^\infty dz \int_0^a dx \int_0^b dy\, \varphi(x, y, z)$$

nicht als $\lim_{h=\infty} \int_0^a dx \int_0^b dy\, \varphi(x, y, h)$, wo $\int_0^h \varphi(x, y, z)\, dz = \Phi(x, y, h)$, aufzufassen braucht, wie ich der Einfachheit halber gethan habe, sondern an der ganzen Entwickelung ist nichts Wesentliches zu ändern, wenn wir das Integral ansehen als:

$$\operatorname{Lim} \int_{z_0}^h dz \int_{x_0}^a dx \int_{y_0}^b dy\, \varphi(x, y, z),$$

wo der Grenzübergang Lim bedeutet, dass die Grössen $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\frac{1}{h}$ entweder in beliebiger Reihenfolge nach einander, oder gemäss einem beliebig vorgeschriebenen Gesetze gleichzeitig verschwinden. Es gilt dann auch die allgemeine Formel:

$$(10)\quad \operatorname{Lim} \int_{z_0}^h dz \int_{x_0}^a dx \int_{y_0}^b dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, z) = f(0, 0) \operatorname{Lim} \int_{z_0}^h dz \int_{x_0}^a dx \int_{y_0}^b dy\, \varphi(x, y, z).$$

Ich bemerke endlich Folgendes. Da es für die vorstehende Analyse nur darauf ankommt, dass das Doppelintegral $\int_0^a dx \int_0^b dy\, \Phi$ einen von $a$ und $b$ unabhängigen Grenzwerth habe, so haben wir an Stelle des dreifachen Integrals z. B. ebenfalls für ein vierfaches die Formel:

$$(11)\quad \begin{aligned} &\operatorname{Lim} \int_{z_0}^h dz \int_{z_0'}^{h'} dz' \int_{x_0}^a dx \int_{y_0}^b dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, z, z') \\ &= f(0, 0) \operatorname{Lim} \int_{z_0}^h dz \int_{z_0'}^{h'} dz' \int_{x_0}^a dx \int_{y_0}^b dy\, \varphi(x, y, z, z'), \end{aligned}$$

wenn Lim einen beliebigen Grenzübergang $z_0 = 0$, $z_0' = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = \infty$, $h' = \infty$ bedeutet, und der Lim rechter Hand von $a$ und $b$ unabhängig wird.

Wir gelangen demnach durch naheliegende Verallgemeinerung zu folgendem Princip:

*Es sei*

$$\int\limits_{y_0'}^{y_1'} dy' \int\limits_{y_0''}^{y_1''} dy'' \dots \int\limits_{x_0'}^{a_1} dx' \int\limits_{x_0''}^{a_2} dx'' \dots \int\limits_{x_0^{(n)}}^{a_n} dx^{(n)} \varphi(x', x'', \dots x^{(n)}, y', y'' \dots)$$

*ein Integral, welches bei irgend einem durch Lim zu bezeichnenden Uebergang der Veränderlichen $x_0'$, $x_0''$, ... $x_0^{(n)}$, $y_0'$, $y_0''$, ... $y_1'$, $y_1''$, ... in die festen Werthe $X_0'$, $X_0''$, ... $X_0^{(n)}$, $Y_0'$, $Y_0''$, ... $Y_1'$, $Y_1''$ ... einen von $a_1$, $a_2$, .. $a_n$ unabhängigen Werth erhält, und die Function $f(x', x'', \dots x^{(n)})$ habe übrigens keine der Mannigfaltigkeit $(x', x'', \dots x^n)$ entsprechenden Unstetigkeiten, nur für dieser Mannigfaltigkeit angehörige $(n-1)$fache, $(n-2)$fache u. s. w. Mannigfaltigkeiten seien Singularitäten gestattet, über welche erstreckt das Integral $\int\limits_{x_0'}^{a_1} dx_1' \dots \int\limits_{x_0^{(n)}}^{a_n} dx^{(n)} f(x', x'', \dots x^{(n)})$ absolut convergirt, so ist:*

$$(12)\quad \mathrm{Lim} \int\limits_{y_0'}^{y_1'} dy' \dots \int\limits_{x_0'}^{a_1} dx' \dots f(x', \dots) \varphi(x' \dots, y', \dots) = f(X_0', \dots) \,\mathrm{Lim} \int\limits_{y_0'}^{y_1'} dy' \dots \int\limits_{x_0'}^{a_1} dx' \dots \varphi(x', \dots y', \dots)$$

womit dem Princip, das der Fourier'schen Formel zu Grunde liegt, der umfassendeste Ausdruck gegeben sein möchte.

## VIII.

### Uebergang vom Fourier'schen dreifachen Integral zu Fourier'schen Formeln für Functionen von zwei Variabeln.

Wenn eine Function $\varphi(x, y, z)$ so beschaffen ist, dass die Gleichung:

$$\int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, z) = f(0, 0) \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy\, \varphi(x, y, z)$$

stattfindet, in der die rechte Seite endlich und bestimmt sei, so genügt dies noch nicht, um eine der Fourier'schen Formel ähnliche Formel daraus abzuleiten, die zur Darstellung willkürlicher Functionen zweier Veränderlichen diente, sondern man muss haben:

$$\int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy\, \varphi(x, y, z) = A_1, \qquad \int\limits_0^\infty dz \int\limits_{-a_1}^0 dx \int\limits_0^b dy\, \varphi(x, y, z) = A_2,$$

$$\int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^a dx \int\limits_{-b_1}^0 dy\, \varphi(x, y, z) = A_3, \qquad \int\limits_0^\infty dz \int\limits_{-a_1}^0 dx \int\limits_{-b_1}^0 dy\, \varphi(x, y, z) = A_4,$$

wo die Grössen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ endlich und bestimmt und von $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ unabhängig sind. Setzen wir $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = H$, so folgt dann:

$$\int_0^\infty dz \int_{-a_1}^{+a} dx \int_{-b_1}^{+b} dy\, f(x, y)\, \varphi(x, y, z) = f(0, 0)\, H.$$

Ich nehme an die Function $f(x, y)$, welche in diese Gleichung eingeht, habe die Form $F(\xi + x, \eta + y)$, so kann ich durch Veränderung der Variabeln unter dem Integral links die Formel schreiben:

$$\int_0^\infty dz \int_{-a_1+\xi}^{+a+\xi} dx \int_{-b_1+\eta}^{+b+\eta} dy\, F(x, y)\, \varphi(x - \xi, y - \eta, z) = F(\xi, \eta)\, H$$

oder wenn man $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ unter der Voraussetzung, dass das Integral links convergent bleibt (siehe Art. III), unendlich werden lässt, so ergiebt sich die der Fourier'schen analoge Formel:

$$(13) \qquad \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, F(x, y)\, \varphi(x - \xi, y - \eta, z) = F(\xi, \eta)\, H.$$

Grenzen wir in der $xy$ Ebene ein Gebiet $S$ ab, innerhalb dessen die Function $F(\xi, \eta)$ eine ganz beliebige ist, und ausserhalb dessen sie Null ist und bezeichnen eine Integration, über das Gebiet $S$ erstreckt, mit $S dx dy$, so ist endlich:

$$(14) \qquad \int_0^\infty dz\, \mathrm{S} dx dy\, F(x, y)\, \varphi(x - \xi, y - \eta, z) = \begin{cases} F(\xi, \eta)\, H, \\ 0, \end{cases}$$

je nachdem der Punkt $\xi$, $\eta$ dem Gebiet angehört oder nicht.

## IX.

### Dieselben Formeln in Polarcoordinaten.

Man würde zu den obigen Formeln auch mit Hilfe von Polarcoordinaten gelangen, wie ich noch kurz andeuten will.

Nimmt man nämlich an, dass das Integral:

$$\int_0^r dr \int_\varphi^{\varphi + \Delta\varphi} d\varphi\, \chi(r, \varphi, h)$$

für $h = \infty$ von $r$ unabhängig wird, und einen von den Veränderlichen $\varphi$ und $\Delta\varphi$ abhängigen bestimmten Werth erhält, so lässt sich wieder beweisen, dass das Integral $\mathrm{S} dr d\varphi\, \chi(r, \varphi, h)$ für $h = \infty$ verschwindet, wenn das Integrationsgebiet $\mathrm{S} r dr d\varphi$ den Punkt $r = 0$ nicht enthält. Die übrige Entwickelung der Formel:

$$(15)\quad \lim_{h=\infty}\int\limits_0^r dr\int\limits_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} d\varphi\, f(r,\,\varphi)\,\chi(r,\,\varphi,\,h) = f(0)\lim_{h=\infty}\int\limits_0^r dr\int\limits_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} d\varphi\,\chi(r,\,\varphi,\,h),$$

wo $f(0) = f(0,\,\varphi)$ von $\varphi$ unabhängig gedacht ist, ist der obigen ganz ähnlich. Aus dieser Formel findet man dann Formel (13) und (14) oder die entsprechende in Polarcoordinaten.

Man kann die Formel:

$$\int\limits_0^\infty dz\,\mathrm{S}\,dx\,dy\,F(x,\,y)\,\Phi(x-\xi,\,y-\eta,\,z) = F(\xi,\,\eta)\,H$$

auch direct in Polarcoordinaten schreiben, unter der Voraussetzung, dass die Function $\Phi$ im ganzen Gebiet der Integration $\mathrm{S}dx\,dy$ endlich sei, und wenn festgehalten wird, dass die Integration $\int\limits_0^\infty dz$ nach der Integration $\mathrm{S}dx\,dy$ einzutreten hat. Es seien $r$, $\varphi$ die Polarcoordinaten des beweglichen Punktes $x$, $y$ und $r_1$, $\varphi_1$ seien diejenigen des bei der Integration festgedachten Punktes $\xi$, $\eta$. Alsdann ist:

$$x-\xi = r\cos\varphi - r_1\cos\varphi_1,\quad y-\xi = r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1,$$
$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = r^2+r_1{}^2-2rr\cos\varphi-\varphi_1,$$

und wenn wir noch $f(r,\,\varphi)$ statt $F(x,\,y)$ schreiben, so wird die vorstehende Formel:

$$(16)\quad \int\limits_0^\infty dz\,\mathrm{S}\,r\,dr\,d\varphi\,f(r,\,\varphi)\,\Phi(r\cos\varphi-r_1\cos\varphi_1,\,r\sin\varphi-r_1\sin\varphi_1,\,z) = f(r_1,\,\varphi_1)\,H,$$

wo das Gebiet $\mathrm{S}r\,dr\,d\varphi$ ganz mit dem Gebiet $\mathrm{S}dx\,dy$ sich decken muss. Ist Letzteres das Gebiet $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx$, so wird man Polarcoordinaten erst dann einführen dürfen, wenn man sich vorher überzeugt hat, dass die Integrale über die Gebiete $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx$ und $\int\limits_0^\infty r\,dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi$, welche im Unendlichen verschiedene Begrenzungen haben, identisch sind.

---

## Anwendungen der Theorie der Fourier'schen dreifachen Integrale auf einige Fälle von hervorragendem Interesse.

### X.

### Die Function $\varphi(x,\,y,\,z)$ habe die Form $\varphi[z(x^2+y^2)]$.

Doch wenden wir uns von diesen allgemeinen Betrachtungen zu specielleren.

Als besonders interessanten Fall der Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale hatte ich in der cit. Abhandlung hervorgehoben das Integral:

$$\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \varphi(z(x-\xi)) = f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx, \tag{17}$$

wo $\int_0^x \varphi(x)\, dx = \Phi(x)$. Es gehen nämlich die Integrale:

$$\int_0^h dz \int_0^a dx\, \varphi(zx) \quad , \quad \int_0^h dz \int_{-a}^0 dx\, \varphi(xz),$$

wenn man $\int_0^x \varphi(x)\, dx = \Phi(x)$ setzt, über in diese:

$$\int_0^{ah} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx \quad , \quad \int_{-ah}^0 \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$$

und wenn diese Integrale für $h = \infty$ convergiren, so erhält man Formel (17) auf die mehrfach angegebene Art. Ist insbesondere $\varphi(x) = \cos x$, so wird die Formel:

$$\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \cos z(x-\xi) = f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi f(\xi),$$

welches also die ursprünglich von Fourier entdeckte Formel ist. Suchen wir einen ähnlich einfachen Fall bei Fourier'schen dreifachen Integralen.

Setzen wir das Integral an:

$$\int_0^\infty dz^2 \int_0^a dx \int_0^b dy\, \varphi[z^2(x^2+y^2)]$$

und schreiben $\int_0^x \varphi(x)\, dx = \Phi(x)$, so geht es über in:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a dx \int_0^b dy\, \frac{\Phi[h^2(x^2+y^2)]}{x^2+y^2} = \lim \int_0^{ah} dx \int_0^{bh} dy\, \frac{\Phi(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, \frac{\Phi(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Dies Integral ist also von $a$ und $b$ unabhängig und wenn es convergirt, so ist es von der unseren Betrachtungen zu Grunde gelegten Art. Führen wir Polarcoordinaten ein, so wird es:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{\Phi(r^2)}{r}\, dr = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{\Phi(r)}{r}\, dr.$$

Um die Legitimität der Anwendung von Polarcoordinaten festzustellen, wollen wir die Differenz der Integrale:

$$\int_0^A dx \int_0^B dy\, \frac{\Phi(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \int_0^R r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2}$$

aufstellen, wenn $R^2 = A^2 + B^2$. Dieser Unterschied besteht aus zwei Theilen, die wir so schreiben:

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{B}{A}} d\varphi \int_{\frac{A}{\cos\varphi}}^{R} r\,dr\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2} \quad , \quad \int_{\operatorname{arctg}\frac{B}{A}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{B}{\sin\varphi}}^{R} r\,dr\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2}\,.$$

oder auch:

$$\operatorname{arctg}\frac{B}{A} \int_{\frac{A}{\cos\varphi_1}}^{R} r\,dr\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2} \quad , \quad \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right) \int_{\frac{B}{\sin\varphi_2}}^{R} r\,dr\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2}\,,$$

$$0 < \varphi_1 < \operatorname{arctg}\frac{B}{A} \quad , \quad \operatorname{arctg}\frac{B}{A} < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\,.$$

Beide Theile verschwinden für $A = \infty$, $B = \infty$, $R = \infty$, wenn $\int^{\infty} r\,dr\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2}$ ein convergentes Integral ist, so dass also:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy\, \frac{\Phi(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{\Phi(r^2)}{r^2}\,.$$

Soll das Integral $\int_0^{\infty} \frac{\Phi(r)}{r}\,dr$ convergent sein, so muss auch $\Phi(0) = 0$ sein, so dass wir setzen können $\int_0^{x} \frac{d\Phi(x)}{dx}\,dx = \Phi(x)$. Wir haben so den Satz:

*Wenn das Integral* $\int_0^{\infty} \frac{\Phi(r)}{r}\,dr$ *convergent ist, so ist:*

$$(18) \quad \int_0^{\infty} dz^2 \int_0^{a} dx \int_0^{b} dy\, f(x,\,y)\, \varphi[z^2(x^2+y^2)] = f(0,\,0)\, \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(r)}{r}\,dr\,,$$

wo $\varphi(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$.

Weiter hat man:

$$\int_0^{a} dx \int_0^{b} dy\, \varphi[z^2(x^2+y^2)] = \int_{-a}^{0} dx \int_0^{b} dy = \int_0^{a} dx \int_{-b}^{0} dy = \int_{-a}^{0} dx \int_{-b}^{0} dy\,,$$

woraus folgt:

$$\int_0^{\infty} dz^2 \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} dy\, f(x,\,y)\, \varphi[z^2(x^2+y^2)] = f(0,\,0)\,.\,\pi \int_0^{\infty} \frac{\Phi(r)}{r}\,dr$$

und wenn man zur Fourier'schen Formel übergeht:

$$(19)\quad \int_0^\infty dz^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, F(x,y)\,\varphi[z^2((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)] = F(\xi,\eta)\,.\,\pi\int_0^\infty \frac{\Phi(r)}{r}\,dr$$

oder in Polarcoordinaten:

$$(20)\int_0^\infty dz^2 \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(r,\varphi)\,\varphi\left[z^2(r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi-\varphi_1))\right] = f(r_1,\varphi_1)\,.\,\pi\int_0^\infty \frac{\Phi(r)}{r}\,dr.$$

## XI.

**Die Function $\varphi(x, y, z)$ habe die Form $\varphi[z(Ax^2+2Bxy+Cy^2)]$.**

Dem Integral (18) kann noch eine etwas allgemeinere Form gegeben werden. Wir gehen zu diesem Zweck aus von diesem Integral:

$$(21)\qquad \int_0^h dz^2 \int_0^a dx \int_0^b dy\, \varphi(z^2 w),$$

wo $w = Ax^2 + 2ABxy + Cy^2$ unp $AC > B^2$.

Wir führen statt $x$ und $y$ durch die orthogonale Substitution:

$$x = a^0 X + b^0 Y$$
$$y = a' X + b' Y$$

die neuen Variabeln $X$ und $Y$ ein, welche den Bedingungen:

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$
$$w = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2$$

genügen, wo $\lambda_0$ und $\lambda_1$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^2 - \lambda(A + C) + AC - B^2 = 0$$

sind. Das Integral $\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, \frac{\Phi(w)}{w}$ geht dadurch über in:

$$\mathrm{S}\,dX\,dY\,\frac{\Phi(\lambda_0 X^2+\lambda_1 Y^2)}{\lambda_0 X^2+\lambda_1 Y^2} = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\,\mathrm{S}\,dX_1\,dY_1\,\frac{\Phi(X_1^2+Y_1^2)}{X_1^2+Y_1^2},$$

wo das Zeichen $\mathrm{S}\,dX\,dY$ und $\mathrm{S}\,dX_1\,dY_1$ eingeführt ist, um eine Integration über ein Gebiet anzudeuten, welche man nur durch mehrere Integrale ausdrücken könnte, wenn man auf die gewöhnliche Weise bei unveränderten Integrationsvariabeln die Integrale mit Grenzen schreiben wollte. Durch Einführung von Polarcoordinaten geht das Integral aber, wie leicht ersichtlich, in folgendes über:

$$(21_a)\qquad \frac{\pi}{4\sqrt{AC-B^2}}\int_0^\infty \frac{\Phi(r)}{r}\,dr.$$

Würde man das Integral $\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, \frac{\Phi(w)}{w}$ direct auf Polarcoordinaten transformirt haben, so hätte man gefunden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} r\,dr\ \frac{\Phi(r^2 w_1)}{r^2 w_1},$$

wo $w_1 = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi$. Vorstehendes Integral wird:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\Phi(r)}{r}\,dr \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{w_1}.$$

Dies Integral mit seiner obigen Form $(21_a)$ verglichen findet man zuerst:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{w_1} = \frac{\pi}{2\sqrt{AC - B^2}}$$

und dann, wenn man setzt: $A + C = 1$, $A - C = A'$, $2B = B'$, $\varphi = \frac{\psi}{2}$:

$$\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{1 + A'\cos\psi + B'\sin\psi} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - A'^2 - B'^2}},$$

wie dies bekannt ist.

## XII.

## Die von Fourier selbst aufgestellte Formel für willkürliche Functionen von zwei Variabeln in allgemeinerer Form.

Um noch eine letzte Classe von Fourier'schen Integralen hervorzuheben, wird:

$$\int_0^h dz \int_0^k dz_1 \int_0^a dx \int_0^b dy\ \varphi(xz)\,\varphi_1(yz_1)$$

$$= \int_0^{ah} dx\ \frac{\Phi(x)}{x}\cdot\int_0^{bk} dy\ \frac{\Phi_1(y)}{y}\quad,\quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx,\ \ \Phi_1(x) = \int_0^x \varphi_1(x)\,dx,$$

für $h = \infty$, $k = \infty$ offenbar von $a$ und $b$ unabhängig, endlich und bestimmt sein, wenn die Integrale:

$$\int_0^{\infty}\frac{\Phi(x)}{x}\,dx \quad , \quad \int_0^{\infty}\frac{\Phi_1(x)}{x}\,dx$$

convergent sind. Nehmen wir noch an, dass die Integrale:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\Phi(x)}{x}\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{0}\frac{\Phi_1(x)}{x}\,dx$$

convergent sind, so erhalten wir die Formel:

$$(22)\quad \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(x, y)\, \varphi[z(x-\xi)]\, \varphi_1[z_1(y-\eta)] = f(\xi, \eta)$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\Phi(x)}{x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\Phi_1(x)}{x}.$$

## XIII.

**Die Function $\varphi$ wird durch den Cosinus und die Bessel'sche Function $J(\sqrt{x})$ ersetzt.**

Um nun noch für die Function $\varphi$ einige specielle Fälle anzuführen, beginnen wir mit der zuletzt abgeleiteten Formel (22). Für

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) = \cos x$$

geht sie in die bereits von Fourier für Darstellung von Functionen zweier Variabeln gegebene Formel:

$$(22)\quad \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(x, y) \cos z(x-\xi) \cos z_1(y-\eta) = \pi^2 f(\xi, \eta)$$

über.

In der Wahl der Functionen $\varphi(x)$, welche geeignet sind, die Formeln (19) und (20) zu specialisiren, haben wir, was bemerkenswerth ist, ein viel weiteres Feld wie bei der entsprechenden Formel (17) für Doppelintegrale, da jene Formeln nur die Convergenz des Integrals $\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$, Formel (17) aber die Convergenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$ voraussetzt.

Schreiben wir in Formel (19) $\sin x$ statt $\Phi(x)$, so erhalten wir:

$$(23)\quad \int_0^\infty dz^2 \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, f(x, y) \cos\left[z^2\left\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right\}\right] = \frac{\pi^2}{2} f(\xi, \eta)$$

oder in Polarcoordinaten:

$$(24)\quad \int_0^\infty dz^2 \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(r, \varphi) \cos[z^2(r^2 + r_1{}^2 - 2rr_1 \cos \varphi - \varphi_1)] = \frac{\pi^2}{2} f(r_1, \varphi_1).$$

Wollen wir in dieser Formel die trigonometrischen Functionen z. B. durch *Bessel*'sche Functionen ersetzen, so bedürfen sie einer kleinen Modification.

Beschränken wir uns auf die Bessel'sche Function nullter Ordnung $J(x)$, welche der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 J(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{d\,J(x)}{dx} + J(x) = 0$$

genügt, und einerseits durch die Reihe:

$$J(x) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{(1\cdot 2)^2} - \frac{\xi^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \cdot\cdot,$$

wo $\xi = \left(\frac{x}{2}\right)^2$, andererseits durch das Integral:

$$J(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos\alpha)\,d\alpha$$

dargestellt wird.

Die Stelle des cos in der vorstehenden Formel kann sie nicht vertreten, da das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^x J(u)\,du$$

divergent ist, indem $\int_0^x J(x)\,dx$ mit unendlich werdendem $x$ der Eins sich nähert. Versuchen wir es aber mit der Function:

$$1 - x + \frac{x^2}{(1\cdot 2)^2} - \frac{x^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \cdot\cdot$$

oder was auf das Nämliche hinauskommt, mit $J(\sqrt{x})$, und untersuchen das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^x J\sqrt{u}\,du\,.$$

Zunächst wird daraus, wenn $\sqrt{u} = \nu$ gesetzt wird:

$$2\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^{\sqrt{x}} J(\nu)\,\nu\,d\nu.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung $\frac{d^2 J}{d x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dJ}{dx} + J = 0$ mit $x$ und integrirt von 0 bis $x$, so folgt:

$$\int_0^x x\,J(x)\,dx = -\,x\,\frac{dJ(x)}{dx}\,.$$

Also wird aus vorstehendem Integral:

$$-2\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,\sqrt{x}\,\frac{dJ(\sqrt{x})}{d\sqrt{x}}$$

oder für $\sqrt{x} = r$:

$$-4\int_0^\infty dr\,\frac{dJ(r)}{dr} = -4\,\Big|_0^\infty J(r) = 4\,.$$

Durch die Function $J(\sqrt{x})$ können wir also den $\cos x$ ersetzen, und erhalten die Formeln:

$$(25)\quad \int\limits_0^\infty dz^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(x,\, y)\, J\left[z^2\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 4\pi\, f(\xi,\, \eta)$$

oder in Polarcoordinaten:

$$(26)\quad \int\limits_0^\infty dz^2 \int\limits_0^\infty r\, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, f(r,\, \varphi)\, J[z^2(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\varphi-\varphi_1)]^{\frac{1}{2}} = 4\pi\, f(r_1,\, \varphi_1)$$

und wenn hierin $r = \mathrm{o}$, $r_1 = \mathrm{o}_1$, $z = n$ gesetzt wird, so ergiebt sich die von Herrn C. Neumann entdeckte in der Einleitung besprochene Formel:

$$2\pi\, f(\mathrm{o}_1,\, \varphi_1) = \int\limits_0^\infty n\, dn \int\limits_0^\infty \mathrm{o}\, d\mathrm{o} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, f(\mathrm{o},\varphi)\, J\left(n\sqrt{\mathrm{o}^2+\mathrm{o}_1^2-2\,\mathrm{o}\mathrm{o}_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right).$$

In allen diesen Formeln kann man das Entfernungsquadrat:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$$

durch einen homogenen Ausdruck:

$$A(x-\xi)^2+2B(x-\xi)(y-\eta)+C(y-\eta)^2$$

mit der Bedingung $AC > B^2$ ersetzen, wodurch sie etwas allgemeinere physikalische Probleme lösen als mit dem blossen Entfernungsquadrat.

Freiburg i. Br., 26. Juni 1871.

# Propriétés de quelques quadratures déduites de l'intégration des expressions différentielles à deux variables.

Par M. Andréiewsky à Varsovie.

Étant donnée une expression différentielle homogène, d'ordre $n$, à deux variables indépendantes $x$, $y$ c'est à dire, une expression de la forme:

(1) $Adx^n + Bdx^{n-1}dy + Cdx^{n-2}dy^2 + \cdots + Kdxdy^{n-1} + Ldy^n$

(où les coefficients $A, B \ldots L$ sont fonctions quelconques de $x$ et $y$), on peut demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression (1) soit le résultat de la différentiation d'une expression de la même forme, que (1), mais d'ordre $n-1$, et comment trouver alors les coefficients de cette dernière.

Cette question et d'autres dans le même genre concernant les expressions à plusieurs variables ont été traitées par Raabe dans son cours de calcul différentiel et intégral; il a prouvé, que si les coefficients $A, B \ldots L$ satisfont identiquement à la seule condition:

$$\frac{\partial^n A}{\partial y^n} - \frac{\partial^n B}{\partial y^{n-1}\partial x} + \frac{\partial^n C}{\partial y^{n-2}\partial x^2} - \cdots + (-1)^n \frac{\partial^n L}{\partial x^n} = 0$$

alors l'expression (1) sera la différentielle de l'expression:

$$A_1 dx^{n-1} + B_1 dx^{n-2}dy + \cdots + L_1 dy^{n-1}$$

et la recherche de $A_1 \ldots L_1$ ne dépendra, que des quadratures. Mais Raabe n'a indiqué aucune application de cette théorie; il en a donné seulement des exemples numériques. Il est vrai, qu'en laissant les variables $x$, $y$ indépendantes entre elles, on ne peut pas exiger quelque application intéressante.

Cependant, sans rien changer à cette théorie, on peut y admettre entre les variables $x$, $y$ une relation linéaire, on peut poser, par exemple, $y = ax + b$ ($a$, $b$ étant des constantes quelconques), car la différentielle de $y$ restant constante, cette supposition n'influera nullement sur la forme de l'expression (1).

En profitant de cette remarque, je suis parvenu à déduire de l'intégration des expressions (1) quelques propriétés de certaines quadratures, que je me propose d'exposer dans cette note.

Mais avant de passer aux applications, je présenterai la théorie de l'intégration des expressions (1) d'une manière différente, que Raabe, en me bornant, pour fixer les idées, au second et au troisième ordre. Il sera utile, que cette exposition soit précédée par la résolution de la question suivante:

Connaissant les trois dérivées partielles du second ordre d'une fonction $u$, à deux variables $x$, $y$:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = B, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$$

trouver cette fonction.

$A$, $B$, $C$ sont des fonctions données de $x$, $y$ satisfaisant naturellement aux deux conditions:

$$(3) \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Cette question se résout très-facilement; en vertu des conditions (3), on a:

$$(4) \qquad A dx + B dy = dU, \quad B dx + C dy = dV.$$

D'un autre côté les équations (2) donnent:

$$d\frac{\partial u}{\partial x} = A dx + B dy, \quad d\frac{\partial u}{\partial y} = B dx + C dy;$$

donc, en comparant avec (4):

$$(5) \qquad du = U dx + V dy + \alpha dx + \beta dy$$

($\alpha$, $\beta$ étant des constantes arbitraires).

La condition de l'intégrabilité $\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}$ est satisfaite, car on a: $B = \frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}$ (4).

On peut donc appliquer aux équations (4), (5) une formule connue pour l'intégration des différentielles exactes du premier ordre, et on aura:

$$U = \int_{x_0}^{x} A dx + \int_{y_0}^{y} B_{x_0} dy + \alpha', \quad V = \int_{x_0}^{x} B dx + \int_{y_0}^{y} C_{x_0} dy + \beta'$$

$$u = \int_{x_0}^{x} U dx + \int_{y_0}^{y} V_{x_0} dy + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

où $x_0$ est un nombre pris à volonté et $B_{x_0}$ désigne en général la valeur de $B$ pour $x = x_0$.

Éliminant $U$, $V$ entre ces trois équations et remarquant, que $V_{x_0} = \int_{y_0}^{y} C_{x_0} dy + \beta'$, nous aurons:

$$(6)\qquad u = \int_{x_0}^{x}{}^2 A\,dx^2 + \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} B_{x_0}\,dx\,dy + \int_{y_0}^{y}{}^2 C_{x_0}\,dy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

où le symbole $\int_{x_0}^{x}{}^2 A\,dx^2$ désigne le résultat de l'intégration double de la fonction $A$ par rapport à la même variable $x$, et entre les mêmes limites $x_0$, $x$, ce qu'on désigne ordinairement ainsi: $\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} A\,dx$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont des constantes arbitraires différentes des premières.

Ainsi, nous avons la formule (6) pour la recherche directe de la fonction $u$.

Si les dérivées partielles du troisième ordre de la fonction $u$ étaient données:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = A, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = B, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = C, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = D.$$

où $A$, $B$, $C$, $D$ satisfont aux conditions:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x}$$

on aurait trouvé la formule:

$$(7)\qquad \begin{aligned} u = &\int_{x_0}^{x}{}^3 A\,dx^3 + \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}{}^2 B_{x_0}\,dx^2\,dy + \int_{y_0}^{y}{}^2\int_{x_0}^{x} C_{x_0}\,dx\,dy^2 \\ &+ \int_{y_0}^{y}{}^3 D_{x_0}\,dy^3 + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \end{aligned}$$

où $\int_{x_0}^{x}{}^3 A\,dx^3 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} A\,dx$ et $\alpha \ldots \gamma_1$ sont des constantes arbitraires. Ces formules (6), (7) .... qui servent à trouver la fonction $u$, quand toutes ses dérivées d'un seul ordre, second, troisième, etc. .. sont connues, présentent une analogie remarquable.

Soit donnée maintenant l'expression:

$$(8)\qquad A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2;$$

si elle est le résultat de la différentiation d'une expression $T\,dx + U\,dy$ du premier ordre ($T$, $U$ étant certaines fonctions de $x$, $y$), on aura: $A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2 = d(T\,dx + U\,dy)$, ou:

$$(9)\qquad \frac{\partial T}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = C.$$

De ces équations on tire: $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x}$ , $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$, et en comparant entre elles les dérivées $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, on obtient la seule condition:

(10) $$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}=0.$$

Pour trouver la fonction $T$, d'après ses dérivées $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, nous pourrons les réduire au même ordre, par exemple au premier, et cela de la manière suivante: différentiant $\frac{\partial T}{\partial x}$ par rapport à $y$, nous obtenons:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial A}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}.$$

Ayant les dérivées de $\frac{\partial T}{\partial y}$, nous écrivons par la formule connue:

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial A}{\partial y}\,dx+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x_0}dy+\alpha.$$

Nous avons donc maintenant les dérivées du premier ordre $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ de la fonction inconnue $T$ et, par la même formule, en remarquant, que $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{x_0}=\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x_0}dy+\alpha$, nous aurons:

(11) $$T=\int_{x_0}^{x}A\,dx+\int_{y_0}^{y}{}^{2}\left(\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x_0}dy^2+\alpha y+\beta.$$

De la même manière on trouve:

(11) $$U=\int_{y_0}^{y}C\,dy+\int_{x_0}^{x}{}^{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{y_0}dx^2+\alpha_1 x+\beta_1,$$

$\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$ désignant des constantes arbitraires.

Ainsi la condition (10) est nécessaire et suffisante pour l'existence des fonctions $T$, $U$. Ces dernières, comme le montre les équations (11), renferment 4 constantes arbitraires; mais il n'est pas difficile de se convaincre, qu'il existe entre les constantes $\alpha$, $\alpha_1$ une certaine relation; en effet, si nous substituons les valeurs (11) de $T$ et $U$ dans la seconde équation (9), nous aurons:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial A}{\partial y}\,dx+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x_0}dy+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial C}{\partial x}\,dy+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{y_0}dx+\alpha+\alpha_1=B.$$

Cette dernière équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de $x$ et $y$; en y faisant $x=x_0$, $y=y_0$, on a:

(12) $$\alpha+\alpha_1=B_{x_0y_0}$$

($B_{x_0y_0}$ désignant la valeur de $B$ pour $x=x_0$, $y=y_0$).

Telle est la relation entre $\alpha$ et $\alpha_1$; nous en déduisons $\alpha_1=B_{x_0y_0}-\alpha$, d'où nous concluons, que l'expression $T\,dx+U\,dy$, qui est l'intégrale de (8), renfermera une expression différentielle arbitraire de la forme:

(13) $$\omega = c(ydx - xdy) + edx + e_1 dy,$$

($c$, $e$, $e_1$ sont 3 constantes arbitraires).

Considérons maintenant l'expression du 3$^{\text{eme}}$ ordre:

(14) $$Adx^3 + Bdx^2dy + Cdxdy^2 + Ddy^3.$$

Pour qu'elle soit la différentielle de l'expression du second ordre:

(15) $$Tdx^2 + Udxdy + Vdy^2,$$

on doit avoir:

(16) $$\frac{\partial T}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = C, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = D,$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = D, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x}.$$

La comparaison de ces dérivées des fonctions $T$, $U$, $V$ entre elles mène à une seule condition:

(17) $$\frac{\partial^3 A}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 B}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 C}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 D}{\partial x^3} = 0,$$

et admettant, qu'elle est satisfaite, la recherche de $T$, $U$, $V$ pourra s'effectuer par des quadratures.

Pour trouver $T$, nous avons ses dérivées $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 T}{\partial y^3}$, au moyen desquelles nous formons toutes ses dérivées du 3$^{\text{eme}}$ ordre:

$$\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

Ensuite, par la formule (7), on obtient:

$$T = \int_{x_0}^{x} {}^{3} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} dx^3 + \int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} {}^{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)_{x_0} dx^2 dy + \int_{y_0}^{y} {}^{2} \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{x_0} dx\, dy^2$$
$$+ \int_{y_0}^{y} {}^{3} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{x_0} dy^3 + \alpha y^2 + \alpha' xy + \alpha'' x^2 + \beta y + \beta' x + \gamma.$$

Les trois premiers membres de cette formule se réduisent à $\int_{x_0}^{x} A dx$ (par la formule (6)) plus des termes arbitraires, qui peuvent être compris dans $\alpha' xy + \alpha'' x^2 + \beta' x$.

En substituant la valeur trouvée de $T$ dans la première équation (16), on verra, que chacune des constantes $\alpha'$, $\alpha''$, $\beta'$ doit être zéro, de sorte que l'expression finale de $T$ sera:

(18) $$T = \int_{x_0}^{x} A dx + \int_{y_0}^{y} {}^{3} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{x_0} dy^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma.$$

On aura de même:

$$(18)\quad V = \int_{y_0}^{y} D\,dy + \int_{x_0}^{x}{}^{3}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_{y_0} dx^3 + \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1.$$

Les dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x}$ de la fonction $U$ nous donnent:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial^2 C}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2},$$

et par suite:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{x_0} dy + \alpha_2.$$

Ayant ainsi toutes les dérivées du second ordre de la fonction $U$, nous écrivons par la formule (6) sa valeur:

$$(18)\quad U = \int_{x_0}^{x}{}^{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx^2 + \int_{y_0}^{y}{}^{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{x_0} dx\,dy^2$$

$$+ \int_{y_0}^{y}{}^{2}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x_0} dy^2 + \alpha_2 xy + \beta_2 x + \beta_3 y + \gamma_2.$$

Les fonctions $T$, $U$, $V$ renferment 10 constantes arbitraires $(\alpha, .. \gamma_2)$, mais elles sont liées entre elles par de certaines relations, qu'on obtient en substituant les valeurs (18) de $T$, $U$, $V$ dans les équations (16) et en tenant compte de la condition (17). Ces relations sont les suivantes:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2\alpha + \alpha_2 &= \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{x_0 y_0}, & \beta + \beta_2 &= B_{x_0 y_0} - y_0\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_{x_0 y_0} \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}, & \beta_1 + \beta_3 &= C_{x_0 y_0} - x_0\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent les 10 constantes arbitraires se réduiront au nombre de 6. Si on désigne les seconds membres de (19) respectivement par $M$, $N$, $P$, $Q$ (ce seront des constantes déterminées), on aura:

$$\alpha = M - \frac{\alpha_2}{2},\quad \alpha_1 = P - \frac{\alpha_2}{2},\quad \beta_2 = N - \beta,\quad \beta_3 = Q - \beta_1.$$

Substituons ces valeurs dans la somme de tous les termes de l'expression (15), qui dépendront des constantes $\alpha \ldots \gamma_2$, c'est à dire dans la somme:

$$(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)\,dx^2 + (\alpha_2 xy + \beta_2 x + \beta_3 y + \gamma_2)\,dx\,dy$$
$$+ (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\,dy^2$$

et si dans le résultat de cette substitution on omet les termes avec

des coefficients déterminés, ne laissant que les termes arbitraires, la somme $\omega$ de ces derniers sera:

$$\omega = -\frac{\alpha_2}{2}(y^2dx^2 + x^2dy^2 - 2xy\,dx\,dy) + \beta(y\,dx^2 - x\,dx\,dy) \\ + \beta_1(x\,dy^2 - y\,dx\,dy) + \gamma\,dx^2 + \gamma_2\,dx\,dy + \gamma_1\,dy^2$$

ce qu'on pourra présenter sous la forme:

$$\omega = (y\,dx - x\,dy)\,[(cy + c_1)\,dx - (cx + c_2)\,dy] \\ + e\,dx^2 + e_1\,dx\,dy + e_2\,dy^2, \tag{20}$$

$c$, $c_1$, $c_2$; $e$, $e_1$, $e_2$ étant les 6 constantes arbitraires.

La formule (20) exprime ainsi la somme de tous les termes arbitraires, qui figureront dans l'expression (15).

La recherche des fonctions $T$, $U$, $V$ dans le cas de leur existence ne présente, en général, aucune difficulté et peut s'effectuer de plusieurs manières; la méthode que nous venons d'exposer nous paraît avoir l'avantage de présenter les relations entre les constantes arbitraires (12) et (19) sous une forme assez simple, tandis que ces relations n'ont pas été du tout remarquées par Raabe. Néanmoins, elles sont utiles dans les applications, dont nous allons nous occuper.

Posons dans l'expression (8) $y = ax + b$ ($a$ et $b$ étant des constantes déterminées), elle deviendra: $A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2 = F\,dx^2$, où $F = A + aB + a^2C$ et chacun des coefficients $A$, $B$, $C$ aura la forme

$$A = f(x,\ ax + b). \tag{21}$$

On sait, que si les coefficients de l'expression (2) satisfont à la condition (10), cette expression aura une intégrale $T\,dx + U\,dy$, qui pour $y = ax + b$ deviendra $(T + aU)\,dx$, $T$ et $U$ ayant aussi la forme (21). Ainsi on a alors $F\,dx^2 = d\,[(T + aU)\,dx]$, ou $F\,dx = d(T + aU)$, d'où l'on conclut ce théorème:

*Soit* $F = A + aB + a^2C$, $A$, $B$, $C$ *ayant la forme* (21); *si après le remplacement de* $ax + b$ *par* $y$, *ces fonctions satisfont identiquement à la condition* (10), *l'intégrale* $\int F\,dx$ *aura la forme:*

$$\int F\,dx = T + aU, \tag{22}$$

$T$ *et* $U$ *ayant aussi la forme* (21); *on obtient leurs valeurs au moyen des formules* (11) *dans lesquelles on aura à remplacer après les intégrations* $y$ *par* $ax + b$.

Quant aux termes arbitraires du second membre de (22) il est facile de voir, que leur somme se réduira à une seule constante arbitraire, comme cela doit arriver.

En effet, si dans l'expression (13) de $\omega$ on fait $y = ax + b$, le facteur $y\,dx - x\,dy$ devient $= b\,dx$ et par conséquent $\omega = C\,dx$, $C$ étant une constante arbitraire.

Prenons, par exemple, la fonction

$$F = 2x(ax+b)^3 + a[3x^2(ax+b)^2 + (x^2-2)(ax+b) - 1] + \tfrac{1}{3}a^2x^3$$

où les coefficients $A = 2xy^3$, $B = 3x^2y^2 + (x^2-2)y - 1$, $C = \frac{1}{3}x^3$ satisfont à la condition (10). Nous avons: $\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x} = 6x^2y - 2$, $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 2xy$.

Donc, en prenant $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, on aura, à l'aide des formules (11):

$$T = [x^2y^3 - y^2 + \alpha y + \beta]_{y=ax+b}, \quad U = [\tfrac{1}{3}yx^3 + \alpha_1 x + \beta_1]_{y=ax+b}$$

et comme $B_{x_0y_0}$ est dans le cas actuel $B_{00} = -1$, la relation (12) donnera $\alpha + \alpha_1 = -1$, par conséquent, les valeurs de $T$ et $U$ sont:

$$T = x^2(ax+b)^3 - (ax+b)^2 + \alpha a x + c_1,$$
$$U = \tfrac{1}{3}x^2(ax+b) - x - \alpha x + c_2$$

($c_1$, $c_2$ étant des const. arb.).

En les substituant dans (22) on verra, que l'intégrale $\int F\,dx$ a la forme:

$$\int F\,dx = x^2(ax+b)^3 - (ax+b)^2 + a[\tfrac{1}{3}x^3(ax+b) - x] + c.$$

Posant $y = ax+b$ dans l'expression (14), on arrive au théorème suivant:

*Si $F = A + aB + a^2C + a^3D$, où $A \ldots D$ ont la forme* (21), *et si, après le remplacement de $ax+b$ par $y$, ces fonctions satisfont identiquement à la condition* (17), *l'intégrale $\int F\,dx$ sera de la forme:*

$$\int F\,dx = T + aU + a^2V, \tag{23}$$

*$T$, $U$, $V$ ayant aussi la forme* (21); *les valeurs de ces fonctions s'obtiennent par les formules* (18) *en $y$ remplaçant après les intégrations $y$ par $ax+b$.*

La somme des termes arbitraires du second membre de (23) se réduira à une constante arbitraire; cela se voit par l'expression (20) de $\omega$, qui pour $y = ax+b$ devient $Cdx^2$, $C$ étant une constante arbitraire.

Les théorèmes relatifs aux intégrales (22), (23) présentent des conséquences intéressantes dans les cas de l'égalité des coefficients $A, B \ldots$ Nous considérerons préalablement le cas de cette égalité dans les expressions (8), (14).

Si $A = B = C$, l'expression (8) devient $A(dx^2 + dx\,dy + dy^2)$ et la condition (10) sera:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0. \tag{24}$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence des fonctions $T$, $U$ telles, que: $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = A$.

On peut montrer maintenant, que chacune des fonctions $T$, $U$ satisfaisant au système:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{25}$$

sera aussi une solution de l'équation (24).

Différentions pour cela l'équation $\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$ par rapport à $y$; nous aurons:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \tag{26}$$

d'un autre côté, la différentiation de $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$ donne: $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$.

Éliminant entre ces deux équations et l'équation (26) les dérivées de $U$, on a: $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, c'est à dire que $T$ est une solution de (24).

Les fonctions $T$, $U$ entrent dans le système (25) d'une manière symmétrique, et on verra de même, que $U$ est aussi solution de (24).

Si $A = B = C = D$ dans l'expression (14), elle devient:

$$A\,(dx^3 + dx^2\,dy + dx\,dy^2 + dy^3).$$

Le coefficient $A$ devra satisfaire à la condition:

$$\frac{\partial^3 A}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 A}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 A}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} = 0 \tag{27}$$

pour qu'il existe des fonctions correspondantes $T$, $U$, $V$. Ces dernières seront liées entre elles par les relations:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = A.$$

Nous allons montrer maintenant, que chacune des fonctions $T$, $U$, $V$ satisfaisant au système:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{28}$$

sera une solution de l'équation (27).

Différentions pour cela l'équation $\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ par rapport à $y$, l'équation $\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ par rapport à $x$, et prenons la différence des résultats; nous aurons: $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$, et différentiant cette dernière équation par rapport à $y$, on a l'équation:

$$\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial x}$$

laquelle à cause de $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x}$ devient:

$$\frac{\partial^3 T}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 T}{\partial y \partial x^2},$$

d'où l'on voit, que $T$ est effectivement solution de (27).

La fonction $V$ entrant dans le système (28) de la même manière que $T$, on vérifiera comme pour $T$, que $V$ est solution de (27). Quant à la fonction $U$, elle entre dans le système (28) d'une manière différente que $T$ et $V$; néanmoins, on peut se convaincre, que cette fonction est aussi solution de la même équation (27).

En effet, on déduit du système (28):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x},$$

et la différentiation de ces équations donne:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 T}{\partial y \partial x^2}, \qquad \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 T}{\partial y^2 \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2}, \qquad \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y},$$

d'où l'on conclut:

$$(29) \qquad \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 U}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}.$$

D'un autre côté: $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x}$, et par conséquent: $\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y}$, d'où il suit, que le second membre de (29) est zéro, ou que $U$ est une solution de (27).

Revenons maintenant aux intégrales (22), (23).

Il est clair, que pour $C = B = A$, la formule (22) devient:

$$(30) \qquad \int A\, dx = \frac{T + aU}{1 + a + a^2},$$

où $A$ est une fonction de la forme $f(x, ax + b)$, qui après la substitution $ax + b = y$ satisfait à l'équation (24).

De plus, nous venons de voir, que les fonctions $T$, $U$ après la même substitution satisferont aussi à l'équation (24).

On peut donc appliquer à ces fonctions $T$, $U$ la même formule (30) et écrire:

$$\int T\, dx = \frac{T_1 + aU_1}{1 + a + a^2}, \qquad \int U\, dx = \frac{T_2 + aU_2}{1 + a + a^2}.$$

Cela posé, multiplions l'équation (30) par $dx$ et intégrons les deux membres de nouveau par rapport à $x$; nous aurons:

$$(31) \qquad \int^2 f(x, ax + b)\, dx^2 = \frac{S + aS_1 + a^2 S_2}{(1 + a + a^2)^2},$$

où $S = T_1$, $S_1 = U_1 + T_2$, $S_2 = U_2$.

Les fonctions $S$, $S_1$, $S_2$, ainsi que $T_1$, $U_1$, $T_2$, $U_2$ sont de la forme $f(x, ax+b)$ et après la substitution $ax+b=y$ elles satisferont à l'équation (24).

Par conséquent, de la même manière, que la formule (31) a été déduite de (30), on déduira de (31) la formule suivante:

$$\int^3 f(x,\ ax+b)\,dx^3 = \frac{R + aR_1 + a^2R_2 + a^3R_3}{(1+a+a^2)^3}$$

et ainsi de suite.

Nous pouvons maintenant, par ce qui précéde, énoncer ce théorème:

*Si $A = f(x, y)$ est une solution quelconque de l'équation:*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0,$$

*on aura:*

$$(32)\qquad \int f(x,\ ax+b)\,dx = \frac{T + aU}{1+a+a^2}$$

*où $T$ et $U$ sont des fonctions de $x$, ayant aussi la forme $f(x, ax+b)$; on les obtient par les formules* (11) *en y faisant $C = B = A$ et substituant $ax+b$ à $y$ après les intégrations.*

*De plus, l'intégrale simple de $f(x, ax+b)$ étant une fois de la forme* (32), *toutes les intégrales multiples de la même fonction suivent une loi déterminée, exprimée par cette formule pour l'intégrale de $n^{\text{ième}}$ multiplicité:*

$$\int^n f(x,\ ax+b)\,dx^n = \frac{Q + aQ_1 + \cdots + a^nQ_n}{(1+a+a^2)^n}$$

*où $Q \ldots Q_n$ sont fonctions de $x$, ayant toujours la forme $f(x, ax+b)$ et satisfaisant à la même condition* (24).

Si dans la formule (23) on pose: $D = C = B = A$, on obtient ce résultat:

*La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int f(x,\ ax+b)\,dx$$

*soit de la forme:*

$$(33)\qquad \int f(x,\ ax+b)\,dx = \frac{T + aU + a^2V}{1+a+a^2+a^3},$$

*$T$, $U$, $V$ ayant aussi la forme $f(x, ax+b)$, est que $f(x, y)$ soit solution de l'équation:*

$$\frac{\partial^3 A}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 A}{\partial y^2\,\partial x} + \frac{\partial^3 A}{\partial y\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} = 0.$$

Nous avons montré, que $T$, $U$, $V$ après la substitution $ax+b=y$ satisferont à la même équation; donc, comme pour l'intégrale (32), nous pourrons dire, que: *dès que l'intégrale simple de $f(x, ax+b)$*

*aura la forme* (33), *toutes les intégrales multiples de cette fonction s'exprimeront par la formule:*

$$\int^n f(x,\ ax+b)\,dx^n = \frac{R + aR_1 + a^2R_2 + \cdots + a^{2n}R_{2n}}{(1+a+a^2+a^3)^n}\,.$$

Des deux théorèmes précédents on pourrait conclure, par analogie, ce théorème général:

*La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int f(x,\ ax+b)\,dx$$

*soit de la forme:*

$$(34)\qquad \int f(x,\ ax+b)\,dx = \frac{P + aP_1 + a^2P_2 + \cdots + a^{\varkappa-1}P_{\varkappa-1}}{1+a+a^2+\cdots a^{\varkappa}},$$

$P \ldots P_{\varkappa-1}$ *ayant aussi la forme* $f(x,\ ax+b)$, *est que* $f(x,\ y)$ *soit solution de l'équation:*

$$(35)\qquad \frac{\partial^{\varkappa} A}{\partial y^{\varkappa}} - \frac{\partial^{\varkappa} A}{\partial y^{\varkappa-1}\partial x} + \frac{\partial^{\varkappa} A}{\partial y^{\varkappa-2}\partial x^2} - \cdots + (-1)^{\varkappa}\frac{\partial^{\varkappa} A}{\partial x^{\varkappa}} = 0$$

*et dès que l'intégrale simple de* $f(x,\ ax+b)$ *aura la forme* (34) *toutes ses intégrales multiples s'exprimeront par la formule:*

$$\int^n f(x,\ ax+b)\,dx^n = \frac{S + aS_1 + a^2S_2 + \cdots + a^{n(\varkappa-1)}S_{n(\varkappa-1)}}{(1+a+a^2+\cdots+a^{\varkappa})^n},$$

$S \ldots S_{n(\varkappa-1)}$ *ayant aussi la forme* $f(x,\ ax+b)$ *et satisfaisant à l'équation* (35).

# Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper.

Von Felix Klein in Göttingen.

Mit den Betrachtungen der Plueckerʼschen Liniengeometrie stehen gewisse Probleme der Mechanik starrer Körper im engsten Zusammenhange, so namentlich die Aufgabe der Zusammensetzung beliebiger, auf einen starren Körper wirkender Kräfte, und die Untersuchung der von einem starren Körper ausgeführten unendlich kleinen Bewegungen.

Von einem solchen Zusammenhange spricht Pluecker bereits in der ersten grösseren Mittheilung, die er über seine neuen geometrischen Forschungen machte*); bald darauf widmet er dessen Auseinandersetzung einen besonderen Aufsatz.**) Auf denselben Gegenstand beziehen sich einzelne Stellen seiner „Neuen Geometrie"***), besonders die Nummern 25 und 39.

Pluecker beabsichtigte, wie aus wiederholten Andeutungen in der „Neuen Geometrie" ersichtlich, die Anwendung seiner geometrischen Principien auf Mechanik in einem grösseren zusammenhängenden Werke, das der „Neuen Geometrie" nachfolgen sollte, auseinanderzusetzen. Dass Pluecker diese Absicht nicht mehr verwirklicht hat, ist umsomehr zu bedauern, als die vorgenannten wenigen Stellen, wo er sich über seine mechanischen Conceptionen ausspricht, nur sehr kurz und schwer verständlich, häufig auch unbestimmt sind. Ich werde nun im Nachstehenden zunächst in kurzem Referate den Zusammenhang der im Eingange genannten mechanischen Probleme mit der Liniengeometrie darlegen, sodann einige Punkte besprechen, die mir in der Plueckerʼschen Darstellung nicht ganz deutlich erscheinen. Hieran anknüpfend, werde ich dann eine besondere Art physikalischen Zusammenhangs erörtern, welche sich zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen aufstellen lässt.

---

*) On a New Geometry of Space. Phil. Trans. 1865, p. 725, cf. Additional Note.

**) Fundamental Views regarding Mechanics. 1866. p. 361.

***) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, B. G. Teubner. 1868/69.

## § 1.

## Einiges über den Zusammenhang der Mechanik starrer Körper mit der Liniengeometrie.

Dass in der That zwischen der Liniengeometrie und der Mechanik starrer Körper ein intimer Zusammenhang besteht, um dies zu sehen, braucht man nur die geometrischen Betrachtungen über die Mechanik starrer Körper durchzugehen, wie sie von Poinsot, Moebius, Chasles u. A. angestellt worden sind.*) Man hat bei diesen Untersuchungen fortwährend mit geometrischen Dingen zu thun, welche in der Liniengeometrie gleich anfangs und fundamental auftreten. Eine kurze Auseinandersetzung mag dies erläutern.

Die fraglichen Betrachtungen beziehen sich wesentlich auf die bereits genannten zwei Aufgaben, deren eine die Zusammensetzung von Kräften behandelt, welche auf einen starren Körper wirken, während die andere die unendlich kleinen Bewegungen untersucht, die ein starrer Körper vollführt. Beide Probleme sind gewissermassen geometrisch identisch, insofern die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen eines starren Körpers auf die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen eines solchen zurückkommt *und sich unendlich kleine Rotationen nach ganz derselben Regel wie Kräfte, nämlich nach der Regel vom Parallelogramm, zusammensetzen.* Dabei tritt also der Begriff der *Kraft* dem der *unendlich kleinen Rotation* als coordinirt **) gegenüber. Alle Betrachtungen, die man hinsichtlich Kräften anstellt, welche auf einen starren Körper wirken, können in ganz gleicher Form für unendlich kleine Rotationen angestellt werden, die ein solcher Körper ausführt, und umgekehrt.

Irgendwie gegebene Kräfte, welche einen starren Körper angreifen, können nun immer durch *zwei* Kräfte ***) ersetzt werden, deren eine man nach einer beliebig angenommenen Geraden wirken lassen

---

*) Vergl. bes. Moebius: Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837. Theil I. In grosser Vollständigkeit finden sich die betreffenden Untersuchungen in Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig 1870.

**) Diese Coordination von Kraft und Rotation ist nur eine mathematische, keine physikalische. Vergl. § 4.

***) Die *Kräftepaare*, welche in der Poinsot'schen Theorie eine so wichtige Rolle spielen, sind dabei anzusehen als (unendlich kleine) Kräfte, welche nach einer unendlich fernen Geraden wirken. In der That haben die beiden Kräfte eines Paares, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, nach dem Hebelgesetze eine unendlich ferne (und dann unendlich kleine) Resultante.

Analogerweise sind in den Betrachtungen des Textes Translationen eines Körpers anzusehen als Rotationen um unendlich ferne Axen.

Kräftepaare und Translationen sind also in demselben Sinne coordinirt, wie Kräfte und Rotationen.

kann; worauf denn die Gerade, nach der die andere Kraft wirkt, und die Intensität beider Kräfte gegeben sind. Ebenso lässt sich jedes System unendlich kleiner Rotationen, oder, kürzer gesagt, jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers aus *zwei* unendlich kleinen Rotationen zusammensetzen. Eine der Rotationsaxen kann dabei beliebig im Raume angenommen werden; dann ist die andere Axe und die Grösse der um beide stattfindenden Rotation bestimmt. Durch ein Kräftesystem oder eine unendlich kleine Bewegung werden sonach die Geraden des Raumes paarweise conjugirt; bereits Moebius hat gezeigt*), dass die gegenseitige Beziehung beider durch eine besondere Art dualer Verwandtschaft gegeben ist, derjenigen Art, die man nach v. Staudt als „Nullsystem" bezeichnet und die dadurch gegenüber anderen dualen Verwandtschaften ausgezeichnet ist, dass jeder Punkt mit der ihm entsprechenden Ebene vereinigt liegt. Im Nullsysteme giebt es dreifach unendlich viele „Nullgerade", das sind solche Linien, welche mit ihren conjugirten zusammenfallen. Alle Linien, welche durch einen beliebigen Punkt in dessen entsprechender Ebene verlaufen, sind Nullgerade, und sind die Nullgeraden auch umgekehrt dadurch vollständig definirt, dass sie in der jedem ihrer Punkte entsprechenden Ebene liegen. — Will man eine der beiden Kräfte, in welche ein gegebenes Kräftesystem zerlegt werden soll, nach einer Nullgeraden des betreffenden Nullsystems wirken lassen, so wirkt auch die zweite Kraft nach derselben Nullgeraden. Die Intensität beider Kräfte wird unendlich gross und die Kräfte erscheinen entgegengesetzt gerichtet. Man hat es dann also mit einem Grenzfalle der allgemeinen Zerlegung des Kräftesystems in zwei Kräfte zu thun, der nur, insofern er Grenzfall ist, einen Sinn hat. Bei der Betrachtung unendlich kleiner Rotationen würde man ebenso, wenn man eine der beiden Rotationen, in die man das System zerlegen kann, um eine Nullgerade des zugehörigen Nullsystems geschehen lässt, zu einem an und für sich nicht verständlichen Grenzfalle gelangen. Die Nullgeraden haben in beiden Fällen auch noch eine weitere leicht angebbare Eigenschaft. Im Falle des Kräftesystems sind die Nullgeraden diejenigen Linien des Raumes, um welche das Moment des Kräftesystems gleich Null ist; im Falle der unendlich kleinen Bewegung sind die Nullgeraden diejenigen Linien, welche senkrecht zu sich selbst versetzt werden, d. h. ohne eine Verschiebung parallel mit ihrer Richtung zu erfahren.**)

---

*) Crelle's Journal t. X. Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse im Raume.

**) Moebius, Statik. I. § 84 ff. Chasles in den Comptes Rendus. 1843. Sur les mouvements infiniment petits des corps.

*Nun ist die dreifach unendliche Mannigfaltigkeit der Nullgeraden eines Nullsystems genau dasselbe, was Pluecker als einen linearen Liniencomplex bezeichnet* *), d. h. also wie diejenige dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden, deren Coordinaten eine lineare Gleichung befriedigen.

Ein beliebiges Kräftesystem, wie eine beliebige unendlich kleine Bewegung ist sonach jedesmal mit einem bestimmten linearen Complexe in Verbindung gesetzt. Die Linien des Complexes sind diejenigen Raumgeraden, in Bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden. Die durch den Complex paarweise zugeordneten Geraden — die *conjugirten Polaren des Complexes* in der Pluecker'schen Terminologie **) — sind diejenigen Linienpaare, nach denen zwei Kräfte wirken können, welche dem gegebenen Kräftesystem äquivalent sind, bez. um welche zwei unendlich kleine Rotationen geschehen können, die die gegebene unendlich kleine Bewegung ersetzen.

Das beliebige Kräftesystem, resp. die beliebige unendlich kleine Bewegung kann für die geometrische Vorstellung geradezu durch den zugehörigen linearen Complex ersetzt werden. Man muss dabei im Falle des Kräftesystems nur von der absoluten Grösse der wirkenden Kräfte absehen und alle solchen Kräftesysteme als wesentlich identisch betrachten, die sich nur hinsichtlich ihrer Intensität unterscheiden. Bei unendlich kleinen Bewegungen wird dem Begriffe des Unendlichkleinen entsprechend von vornherein von der absoluten Grösse abstrahirt, und es braucht eine solche Abstraction also nicht hier noch ausdrücklich eingeführt zu werden.

Ein linearer Complex kann insbesondere ein specieller Complex werden ***), d. h. in die Gesammtheit aller Geraden übergehen, die eine feste Gerade schneiden. Das mit dem linearen Complexe gleichbedeutende Kräftesystem reducirt sich dem entsprechend auf eine einzelne Kraft, die nach der festen Geraden wirkt; die mit dem linearen Complexe gleichbedeutende unendlich kleine Bewegung auf eine Rotation, welche um die feste Gerade geschieht.

---

*) cf. Pluecker. Neue Geometrie n. 29.

**) Neue Geometrie n. 28.

***) Neue Geometrie n. 45. Dem entspricht, dass die Determinante des betr. Nullsystems verschwindet.

## § 2.

## Analytische Darstellung. Coordinaten von Kräften und (unendlich kleinen) Rotationen. Coordinaten von Kräftesystemen und (unendlich kleinen) Bewegungen.

Man beweist die vorgetragenen Dinge am einfachsten, wenn man, nach dem Vorgange von Pluecker*), einer Kraft, resp. unendlich kleinen Rotation, geradezu *Coordinaten* ertheilt, nämlich dieselben Coordinaten, welche die gerade Linie besitzt, nach welcher die Kraft wirkt, bez. um welche die Rotation geschieht.

Seien, unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, $x, y, z$ und $x', y', z'$ die Coordinaten zweier Punkte der zu bestimmenden Geraden, so erhält ihre Verbindungslinie bei Pluecker als Coordinaten die relativen Werthe der folgenden 6 Ausdrücke:

$$\varrho X = x - x' \qquad \varrho Y = y - y' \qquad \varrho Z = z - z'$$
$$\varrho L = yz' - y'z \quad \varrho M = x'z - xz' \quad \varrho N = xy' - x'y\,.$$

Dabei ist identisch:

$$XL + YM + ZN = 0\,,$$

wodurch die relativen Werthe der 6 Grössen $X, Y, Z, L, M, N$ auf die zur Bestimmung einer Geraden nothwendigen 4 Constanten zurückkommen.

Auf *dieselben* 6 Coordinaten kommt man bekanntlich, wenn man die Gerade nicht, wie vorstehend, als Verbindungslinie zweier Punkte, als einen *Strahl*, wie Pluecker sagt, sondern als Durchnittslinie zweier Ebenen, als eine *Axe*, nach Pluecker's Ausdrucksweise, auffasst. — Während die mechanische Vorstellung der nach einer Geraden wirkenden Kraft mit der geometrischen der Geraden als Strahl verknüpft ist, ist es die mechanische der um eine Gerade geschehenden Rotation mit der geometrischen der Geraden als Axe.

*Einer Kraft, die nach einer Geraden wirkt, bez. einer unendlich kleinen Rotation, die um eine solche geschieht, ertheilen wir nun geradezu die* 6 *Grössen*

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

*als Coordinaten.*

Für Kräfte kommt diese Coordinatenbestimmung, sobald man noch die absoluten Werthe der 6 Coordinaten der Intensität der Kraft proportional festlegt, auf die gewöhnliche Art und Weise heraus, wie man Kräfte in der Mechanik bezeichnet. $X, Y, Z$ sind die Componenten parallel zu den 3 Coordinatenaxen, $L, M, N$ die Drehungsmomente um dieselben Axen.

*) cf. Neue Geometrie n. 25.

Eine solche Festlegung der absoluten Werthe der Coordinaten hat bei einer unendlich kleinen Rotation so lange keinen Sinn, als man nicht eine (willkürlich gewählte) andere unendlich kleine Rotation als gleichzeitig mit ihr eintretend ansieht, der man dann die Intensität 1 ertheilt.

*Kräfte und Rotationen, deren Coordinaten in dieser Weise absolute Werthe bekommen haben, setzen sich nun zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren.**)

Dieser Satz sagt zunächst aus, dass alle Systeme von Kräften, bez. alle Systeme von Rotationen, welche durch Addition der den einzelnen Kräften bez. Rotationen zugehörigen Coordinaten dieselben 6 Werthe ergeben, äquivalent sind.

Diese durch Addition erhaltenen 6 Werthe, welche wir als *Coordinaten des Kräftesystems* bez. als *Coordinaten der unendlich kleinen Bewegung* ansprechen können, mögen heissen:

$$\mathsf{\Xi},\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \mathsf{\Lambda},\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}.$$

Es kann nun insbesondere sein:

$$\mathsf{\Xi\Lambda} + \mathsf{HM} + \mathsf{ZN} = 0.$$

*Dann kann das Kräftesystem durch eine einzelne Kraft, die unendlich kleine Bewegung durch eine Rotation ersetzt werden, deren Coordinaten geradezu sind:*

$$X = \mathsf{\Xi},\quad Y = \mathsf{H},\quad Z = \mathsf{Z},\quad L = \mathsf{\Lambda},\quad M = \mathsf{M},\quad N = \mathsf{N}.$$

Ist aber die Bedingung

$$\mathsf{\Xi\Lambda} + \mathsf{HM} + \mathsf{ZN} = 0$$

nicht erfüllt, so kann man das Kräftesystem nur durch 2 Kräfte, die unendlich kleine Bewegung nur durch 2 Rotationen ersetzen. Sind die Coordinaten der beiden Kräfte, bezüglich der beiden Rotationen:

$$X',\ Y',\ Z',\ L',\ M',\ N' \quad \text{und} \quad X'',\ Y'',\ Z'',\ L'',\ M'',\ N'',$$

so muss sein:

$$X' + X'' = \mathsf{\Xi},\quad Y' + Y'' = \mathsf{H},\quad Z' + Z'' = \mathsf{Z}$$
$$L' + L'' = \mathsf{\Lambda},\quad M' + M'' = \mathsf{M},\quad N' + N'' = \mathsf{N}.$$

Gleichzeitig ist dann:

$$X'L' + Y'M' + Z'N' = 0,\qquad X''L'' + Y''M'' + Z''N'' = 0.$$

---

*) Battaglini hat die sich hier anknüpfenden Dinge in einer Reihe von Aufsätzen in den Rendiconti und Atti der Akademie zu Neapel unter Zugrundelegung tetraedrischer Coordinaten ausgeführt. [In den Rendiconti vom Februar, Mai, August 1869, Mai 1870 und in den Atti. Vol. IV, 1869.]

Man vergl. auch Cayley: On the six Coordinates of a line. Cambridge Transactions. Vol. XI. 1868, bes. das Kapitel: Statical and Kinematical Applications (p. 25).

*Diese Gleichungen sagen nun aus, dass die geraden Linien $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$, $N'$ und $X''$, $Y''$, $Z''$, $L''$, $M''$, $N''$ conjugirte Polaren sein sollen in Bezug auf den linearen Complex, dessen Gleichung ist*

$$\mathsf{\Lambda} X + \mathsf{M} Y + \mathsf{N} Z + \Xi L + \mathsf{H} M + \mathsf{Z} N = 0.$$

Da sich in der „Neuen Geometrie“ nicht gerade eine Stelle findet, aus der man dieses ohne Weiteres ersehen kann, folge hier der kurze Beweis.

Die Bedingung, dass eine gerade Linie die feste Gerade $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$, $N'$ schneide, ist:

$$L'X + M'Y + N'Z + X'L + Y'M + Z'N = 0.$$

Ebenso für die Gerade $X''$, $Y''$, $Z''$, $L''$, $M''$, $N''$:

$$L''X + M''Y + N''Z + X''L + Y''M + Z''N = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$\mathsf{\Lambda} X + \mathsf{M} Y + \mathsf{N} Z + \Xi L + \mathsf{H} M + \mathsf{Z} N = 0.$$

Das heisst: Alle Geraden, welche die beiden $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$, $N'$ und $X''$, $Y''$, $Z''$, $L''$, $M''$, $N''$ schneiden, gehören dem fraglichen linearen Complexe an. Das aber ist die charakteristische Eigenschaft*) der conjugirten Polaren, w. z. b.

Die Coefficienten

$$\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$$

in der Gleichung des linearen Complexes kann man geradezu als *Coordinaten des linearen Complexes* **) bezeichnen. Es ist das darum gestattet, weil, wenn die 6 Coefficienten insbesondere die Gleichung befriedigen:

$$\Xi\mathsf{\Lambda} + \mathsf{H}\mathsf{M} + \mathsf{Z}\mathsf{N} = 0,$$

sie die Coordinaten desjenigen speciellen Complexes sind, der dann durch die gegebene lineare Gleichung

$$\mathsf{\Lambda} X + \mathsf{M} Y + \mathsf{N} Z + \Xi L + \mathsf{H} M + \mathsf{Z} N = 0$$

dargestellt wird, d. h. die Coordinaten derjenigen geraden Linie, welche von allen der Gleichung genügenden Geraden geschnitten wird. Es muss ja in der That die vorstehende Gleichung bestehen, damit sich 2 Gerade mit den Coordinaten $\Xi$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$, $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ und $X$, $Y$, $Z$, $L$, $M$, $N$ schneiden.

Gebrauchen wir nun diesen Ausdruck: Coordinaten eines linearen Complexes, gleichgültig, ob der Complex ein specieller (eine gerade

*) Neue Geometrie n. 28.

**) Vergl.: „Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten“. Math. Ann. t. II, p. 366.

Linie) geworden ist oder nicht, so können wir, unabhängig davon, ob ein gegebenes Kräftesystem eine Resultante hat oder nicht, resp. ob eine gegebene unendlich kleine Bewegung sich auf eine Rotation reducirt oder nicht, den Satz aussprechen:

*Das geometrische Bild für ein Kräftesystem, bez. eine unendlich kleine Bewegung mit den Coordinaten:*

$$\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \Lambda, \mathsf{M}, \mathsf{N}$$

*ist ein linearer Complex, der dieselben Coordinaten besitzt.*

## § 3.

## Besprechung einiger besonderer Punkte.

Es sind nun einige Dinge, wie bereits im Eingange erwähnt, die in der von Pluecker gegebenen Darstellung des Zusammenhanges seiner Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, wie sie etwa in der 25. Nummer der „Neuen Geometrie“ vorliegt, nicht ganz klar zu sein scheinen.

Kräftesysteme und unendlich kleine Bewegungen können, nach dem Vorstehenden, beide unter demselben geometrischen Bilde, dem linearen Complexe, vorgestellt werden. Ein und derselbe Complex ist also einmal Bild eines Kräftesystems, das andere Mal Bild einer unendlich kleinen Bewegung: ganz in demselben Sinne, wie ein und dieselbe gerade Linie (ein specieller Complex) einmal eine nach ihr wirkende Kraft, das andere Mal eine um sie stattfindende Rotation versinnlichte. Zwischen dem Kräftesystem und der unendlich kleinen Bewegung, die sich auf denselben linearen Complex beziehen, besteht ebensowenig ein ursächlicher physikalischer Zusammenhang, als zwischen der Kraft, welche nach einer Geraden wirkt, und der Rotation, die um dieselbe Gerade stattfindet.

Aber in der Pluecker'schen Darstellung sieht es so aus, als wenn das Kräftesystem die Ursache der zugehörigen (auf denselben linearen Complex bezüglichen) unendlich kleinen Bewegung sei. Dementsprechend wird denn auch Beides, als wesentlich identisch, mit dem einheitlichen Namen „Dyname“ bezeichnet.

Dass ein Kräftesystem und eine unendlich kleine Bewegung bei diesen Betrachtungen überhaupt nicht in einen ursächlichen Zusammenhang gesetzt werden können, ist daraus ersichtlich, dass bei einem gegebenen Kräftesystem doch nur dann eine bestimmte Bewegung des starren Körpers erfolgt, wenn derselbe eine Masse, einen Schwerpunkt, ein Trägheitsellipsoid etc. besitzt. Durch einen bestimmten starren Körper, dessen Masse etc. ein für allemal gegeben ist, wird

also allerdings jedem Kräftesystem eine bestimmte unendlich kleine Bewegung, die seine Wirkung ist, coordinirt.*) So lange man aber nur schlechthin von einem starren Körper spricht, dessen Massenvertheilung gar nicht in Betracht kommt, kann von einer ursächlichen Zuordnung überhaupt nicht die Rede sein.

Es entsteht dabei die Frage, ob nicht eine andere Art physikalischen Zusammenhanges zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen obwaltet, auf den die mathematische Coordination der beiden Dinge zurückzuführen wäre. Davon soll in dem nächsten Paragraphen gehandelt werden.

Ein weiterer Punkt, der in der Pluecker'schen Darstellung nicht ganz deutlich scheint, ist der folgende, der übrigens mit dem erwähnten nahe zusammenhängt.

Wenn wir von einer Kraft sprechen, so knüpft das an die geometrische Vorstellung der Geraden als einer Punktreihe, als eines Strahles, an. Dagegen, wenn eine (unendlich kleine) Rotation um eine Gerade stattfindet, so fassen wir die Gerade als ein Ebenenbüschel, als eine Axe. An eine Axe die Vorstellung einer Kraft anzuknüpfen, d. h. also eine Kraft sich zu denken, welche einen frei beweglichen starren Körper um eine *bestimmte* Gerade drehen will, ist ebenso unmöglich, wie mit einem Strahl die Vorstellung einer unendlich kleinen Bewegung zu verbinden, die dann den Körper nach einer einzelnen, *bestimmten* Geraden verschieben müsste. Eine Drehkraft, d. h. ein Kräftepaar, hat nicht eine Axe, sondern unendlich viele, deren Richtung allein gegeben ist; ebenso verschiebt eine Translation nicht einen einzelnen Strahl in sich, sondern gleichzeitig alle parallelen Strahlen. Man kann also auch nicht die geometrische Vorstellung einer Axe mit der mechanischen einer Drehkraft, die geometrische Vorstellung eines Strahles mit der mechanischen einer Translation verknüpfen. Es kann nur die Rede sein von Kräften, die *nach* geraden Linien wirken, und von Bewegungen, die *um* solche geschehen. Dies tritt bei Pluecker nicht deutlich hervor; Pluecker spricht meist von Kräften und Rotationen, dann aber auch wieder von Translationen und Drehkräften, und hat es an einzelnen Stellen den Anschein, als wäre jede Kraft mit einer Translation, jede Drehkraft mit einer Rotation ursächlich verknüpft.

---

*) Da sowohl das Kräftesystem als die unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Complex ersetzt werden können, so begründet jeder starre Körper von gegebener Massenvertheilung eine besondere Art räumlicher Verwandtschaft, bei welcher jedem linearen Complexe ein zweiter zugeordnet ist. Für Körper, deren Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, wird die Verwandtschaft geradezu die Polar-Reciprocität hinsichtlich einer um den Schwerpunkt des Körpers herumgelegten Kugel.

Dass man nur von Kräften sprechen kann, welche *nach* geraden Linien wirken, nur von Bewegungen, die *um* solche geschehen, kommt auf den undualistischen Charakter zurück, den überhaupt unsere Massbestimmung besitzt. Dieselbe bezieht sich bekanntlich auf eine ebene Curve $2^{\text{ten}}$ Grades, den unendlich weit entfernten imaginären Kreis. Man kann nun aber nach dem Vorgange von Cayley*) eine allgemeinere Massbestimmung concipiren, bei welcher eine allgemeine Fläche $2^{\text{ten}}$ Grades dieselbe Rolle spielt, wie sonst die genannte ebene Curve. Führt man eine solche Massbestimmung ein und ersetzt gleichzeitig die sechsfach unendlich vielen Bewegungen unseres Raumes durch ebenso viele lineare Transformationen, welche die fundamentale Fläche $2^{\text{ten}}$ Grades unverändert lassen**): — so kann man gleichmässig von Kräften sprechen, die nach Geraden und die um Gerade wirken, und von Bewegungen, die um Gerade und nach Geraden geschehen. Es würden aber beide Arten von Kräften und beide Arten von Bewegungen gleichbedeutend sein. Eine Drehung um eine Gerade ist dann dasselbe, wie eine Verschiebung nach der ihr in Bezug auf die fundamentale Fläche $2^{\text{ten}}$ Grades conjugirten Polare. Ebenso eine Kraft, die nach einer Geraden wirkt, dasselbe, wie eine Kraft, die um deren conjugirte Polare zu drehen bestrebt ist.

Ein dritter Punkt, der bei Pluecker wenigstens nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, ist der, dass man nur unendlich kleine Rotationen, überhaupt unendlich kleine Bewegungen in Betracht ziehen darf. Endliche Bewegungen setzen sich ja in anderer Weise zusammen, als unendlich kleine, es ist z. B. die Aufeinanderfolge bei der Zusammensetzung nicht gleichgültig, während es bei unendlich kleinen Bewegungen, ebenso wie bei der Zusammensetzung von Kräften, auf die Reihenfolge nicht ankommt.

---

*) cf. Cayley. A sixth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. 1859. Sodann: Salmon's Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Cap. XXII. (der Fiedler'schen Uebersetzung).

**) Eine Fläche $2^{\text{ten}}$ Grades geht durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Aber dieselben sondern sich in 2 sechsfach unendliche Gruppen. *Bei den Transformationen der einen Gruppe bleiben die beiden Systeme geradliniger Erzeugender der Fläche ungeändert, bei den Transformationen der zweiten Gruppe vertauschen sich die beiden Systeme gegenseitig.* Die Transformationen der ersten Gruppe sind im Texte gemeint; sie gehen, wenn die $F_2$ allmählich in den unendlich weiten imaginären Kreis übergeht, allmählich in die sechsfach unendlich vielen Bewegungen des Raumes über. — Bei einer nächsten Gelegenheit denke ich zu zeigen, wie die im Texte erwähnte Cayley'sche Massbestimmung unter Hinzunahme dieser sechsfach unendlich vielen Transformationen genau zu denselben geometrischen Vorstellungen hinleitet, wie sie, von einem ganz anderen Ausgangspunkte aus, Lobatchefsky und Bolyai entwickelt haben.

## § 4.

## Ueber die Art des physikalischen Zusammenhanges zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.

Es lässt sich nun in der That ein physikalischer Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen angeben, welcher es erklärt, wie so die beiden Dinge mathematisch coordinirt auftreten. Diese Beziehung ist nicht von der Art, dass sie jedem Kräftesystem eine einzelne unendlich kleine Bewegung zuordnet, sondern sie ist anderer Art, sie ist eine *dualistische.*

Es sei ein Kräftesystem mit den Coordinaten

$$\mathsf{\Xi},\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \mathsf{\Lambda},\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}$$

und eine unendlich kleine Bewegung mit den Coordinaten

$$\mathsf{\Xi}',\ \mathsf{H}',\ \mathsf{Z}',\ \mathsf{\Lambda}',\ \mathsf{M}',\ \mathsf{N}'$$

gegeben, wobei man die Coordinaten in der im § 2. besprochenen Weise absolut bestimmt haben mag. *Dann repräsentirt,* wie hier nicht weiter nachgewiesen werden soll, *der Ausdruck*

$$\mathsf{\Lambda}'\mathsf{\Xi} + \mathsf{M}'\mathsf{H} + \mathsf{N}'\mathsf{Z} + \mathsf{\Xi}'\mathsf{\Lambda} + \mathsf{H}'\mathsf{M} + \mathsf{Z}'\mathsf{N}$$

*das Quantum von Arbeit, welche das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung leistet.*

Ist insbesondere:

$$\mathsf{\Lambda}'\mathsf{\Xi} + \mathsf{M}'\mathsf{H} + \mathsf{N}'\mathsf{Z} + \mathsf{\Xi}'\mathsf{\Lambda} + \mathsf{H}'\mathsf{M} + \mathsf{Z}'\mathsf{N} = 0,$$

so leistet das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung *keine* Arbeit.

*Diese Gleichung nun repräsentirt uns, indem wir einmal* $\mathsf{\Xi}$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$, $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$, *das andere Mal* $\mathsf{\Xi}'$, $\mathsf{H}'$, $\mathsf{Z}'$, $\mathsf{\Lambda}'$, $\mathsf{M}'$, $\mathsf{N}'$ *als veränderlich betrachten, den Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.*

Betrachten wir $\mathsf{\Xi}$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$, $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ als veränderlich, so sagt die Gleichung aus: Es giebt vierfach unendlich viele Kraftsysteme*), welche bei einer gegebenen unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit leisten. Ihre Coordinaten haben eine homogene lineare Gleichung zu befriedigen. Das kann man auch so aussprechen:

*Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Kräftesystems wird eine unendlich kleine Bewegung dargestellt;* ganz in demselben Sinne, wie etwa in der analytischen Geometrie durch eine homogene lineare Gleichung zwischen Punktcoordinaten, welche aussagt, dass die Entfernung eines Punktes von einer gewissen Ebene gleich Null sein soll, diese gewisse Ebene dargestellt wird.

---

*) Diejenigen als identisch betrachtet, die sich nur hinsichtlich des absoluten Werthes ihrer Coordinaten unterscheiden.

Betrachten wir dagegen $\Xi'$, $H'$, $Z'$, $\Lambda'$, $M'$, $N'$ als veränderlich, so sagt unsere Gleichung aus: Es giebt vierfach unendlich viele unendlich kleine Bewegungen, bei deren Eintritt ein gegebenes Kraftsystem keine Arbeit leistet. Ihre Coordinaten genügen einer homogenen linearen Gleichung. Anders ausgedrückt:

*Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer unendlich kleinen Bewegung wird ein Kräftesystem dargestellt,* ganz dem entsprechend, wie, wenn wir bei dem eben angezogenen Beispiele aus der analytischen Geometrie bleiben, durch eine lineare Gleichung zwischen Ebenencoordinaten ein Punkt dargestellt wird.

Das geometrische Substrat für die hiermit auseinandergesetzte *Dualität zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen* bildet die doppelte Art und Weise, wie sich in der Liniengeometrie alle Begriffe fassen lassen, wenn man vom linearen Complexe als Raumelement ausgeht.*) Ein linearer Complex ist dann gleichzeitig Raumelement, andererseits das durch eine lineare Gleichung dargestellte Gebilde. Die Gleichung:

$$\Lambda'\Xi + M'H + N'Z + \Xi'\Lambda + H'M + Z'N = 0,$$

in der nunmehr $\Xi$, $H$, $Z$, $\Lambda$, $M$, $N$ und $\Xi'$, $H'$, $Z'$, $\Lambda'$, $M'$, $N'$ die Coordinaten zweier linearer Complexe bedeuten sollen, sagt eine zwischen denselben geltende Beziehung aus, die ich als *involutorische Lage* derselben bezeichne.**) Was man unter der involutorischen Lage zweier linearer Complexe geometrisch zu verstehen hat, ist vielleicht am einfachsten so auseinander zu setzen. Jedem Punkte des Raumes entspricht im ersten Complexe eine Ebene, dieser Ebene im zweiten Complexe ein Punkt. Auf denselben Punkt kommt man bei involutorischer Lage der beiden Complexe, wenn man die Ebene betrachtet, die dem anfänglich gewählten Punkte im zweiten Complexe entspricht und nun den Punkt sucht, der dieser Ebene im ersten Complexe zugehört. Die mit den beiden Complexen verknüpften dualen Umformungen des Raumes sind also miteinander vertauschbar. — Ist einer der beiden Complexe ein specieller, d. h. eine Gerade, so tritt die involutorische Lage dann ein, wenn die Gerade dem anderen Complexe angehört. Sind beide Complexe Gerade, so ist die involutorische Lage mit dem Schneiden der beiden Geraden gleichbedeutend.

---

*) Ich habe diese geometrischen Betrachtungen in dem bereits citirten Aufsatze: „Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Ann. t. II." des Weiteren ausgeführt.

**) Auf die involutorische Lage zweier linearer Complexe kommt auch Herr Battaglini in den genannten Aufsätzen; er bezeichnet sie als „harmonische Lage" zweier Complexe. Das Wort „Involution" wird von ihm gebraucht, um Mannigfaltigkeiten zu bezeichnen, die von Parametern linear abhängen.

Ein linearer Complex kann nach dem Gesagten entweder als Raumelement oder als die vierfach unendliche Mannigfaltigkeit der mit ihm in Involution liegenden Complexe aufgefasst werden.

Geben wir dem linearen Complexe die mechanische Bedeutung einer unendlich kleinen Bewegung, so repräsentiren die vierfach unendlich vielen mit ihm in Involution liegenden Complexe diejenigen Kraftsysteme, welche bei Eintritt der unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit leisten. Umgekehrt: knüpfen wir an den linearen Complex die mechanische Vorstellung eines Kräftesystems, so stellen die vierfach unendlich vielen mit ihm in Involution liegenden Complexe diejenigen unendlich kleinen Bewegungen dar, bei denen das Kraftsystem keine Arbeit leistet.

Unter den vierfach unendlich vielen mit einem linearen Complexe in Involution liegenden Complexen finden sich auch, wie bereits gesagt, die dreifach unendlich vielen ihm angehörigen geraden Linien. Für sie können wir insbesondere die vorstehenden beiden Sätze aussprechen. Dieselben werden dann gleichbedeutend mit den beiden in § 1. genannten Sätzen, die so lauteten: Wenn ein linearer Complex das Bild eines Kräftesystems oder einer unendlich kleinen Bewegung ist, so sind die ihm angehörigen Geraden diejenigen Linien des Raumes, in Bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden.

Göttingen, im Juni 1871.

# Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie.

Von O. Stolz in Wien.

---

In der analytischen Geometrie werden die räumlichen Gebilde *zunächst* aufgefasst als Gebiete einer gewissen Anzahl von einander unabhängiger Grössen, die alle *reellen* Werthe durchlaufen. Für diese Grössen lassen sich die Rechnungsoperationen aufstellen, was eben zur algebraischen Behandlung der Geometrie führt. Daraus ergiebt sich aber unmittelbar der Gebrauch der *complexen Grössen.* Indem nun das Grössengebiet bereits vollständig definirt ist; — eine Erweiterung desselben auf die *doppelte* Anzahl von Dimensionen aber nicht eigentlich im Sinne der analytischen Geometrie liegen kann*); — so ist klar, dass die complexen Grössen (Zahlen) *als solche* eine Deutung nicht mehr zulassen. Dagegen steht nichts im Wege, *zu den Elementen,* die dem vorliegenden geometrischen Gebilde zu Grunde gelegt sind, *ideale Elemente hinzuzufügen.* Hierzu ist eben nur erforderlich, dass dieselben auf *rein geometrische Weise* definirbar seien oder dass sie vom Coordinatensysteme unabhängig gedacht werden können.

Schon seit langer Zeit sind die complexen Elemente als unabweisbare Forderung von der analytischen Geometrie anerkannt, die ohne dieselben in unzusammenhängendes Stückwerk zerfiele. Die Frage nach der geometrischen Bedeutung derselben fand aber nur unvoll-

---

*) Diese Art, die complexen Grössen zu interpretiren, wurde u. A. bekanntlich auch von Möbius angewandt (Crelle J. B. 52). In neuerer Zeit wurde diese Methode von Laguerre *formal* verallgemeinert. (Nouv. Ann. d. Math. T. XXIX p. 241 ff.) Sowie Möbius den complexen Punkt *einer Geraden* $x = a + bi$ durch den Punkt $x = a$, $y = b$ *in der Ebene* dargestellt hatte, wofür man auch die Strecke zwischen den Punkten $(a, +b)$ und $(a, -b)$ setzen kann, so stellt Laguerre den complexen Punkt *der Ebene* $x = a + bi$, $y = c + di$ dar durch die Strecke, welche die Punkte $(a + d, c - b)$ und $(a - d, c + b)$ verbindet. Diese Strecke steht im Punkte $(a, c)$ auf der reellen Geraden, welche den complexen Punkt enthält, senkrecht; ihre Länge beträgt $2\sqrt{b^2 + d^2}$. — Man vergl. auch v. Staudt B. p. 265.

ständige Beantwortung. Erst v. Staudt legte sich diese Frage klar vor und führte sie zum Abschlusse, indem es ihm gelang, die complex-conjugirten Elemente *durchaus* von einander zu trennen. Die Untersuchungen dieses scharfsinnigen Geometers*), welche nach rein geometrischer Methode ausgeführt sind, haben, soviel mir bekannt ist, bisher in der analytischen Geometrie keine Berücksichtigung gefunden. Es soll die Aufgabe des folgenden Aufsatzes sein, die Ergebnisse derselben dahin zu übertragen. Dies wird einerseits zu tieferer Einsicht in dieselben führen; andererseits gewinnen dieselben dadurch im hohen Grade an Uebersichtlichkeit, indem *das leitende Princip von vornherein gegeben ist.* — Dabei wird der Punkt als Element der geometrischen Gebilde zu Grunde gelegt und die Ausdehnung auf die analytische Geometrie anderer Grundelemente als selbstverständlich angesehen. Ueber *Liniengeometrie* folgt am Schlusse des Aufsatzes eine kurze Bemerkung.

v. Staudt's Forschungen, welche der neueren synthetischen Geometrie die lange vermisste Grundlage geschaffen, sind trotzdem von derselben noch nicht gebührend gewürdigt worden. Möge der vorliegende Aufsatz, der dieselben von einer anderen Seite beleuchtet, dazu dienen, ihre fundamentale Wichtigkeit neuerdings zu betonen und namentlich ihre Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der analytischen Methode hervorzuheben.

---

**1.** Es sei eine Gerade gegeben und auf derselben ein fester Punkt $O$; für einen beliebigen Punkt $M$ derselben sei $OM = x$. Die involutorische Beziehung zweier projectivischen Punktreihen $x$, $x'$, die auf dieser Geraden vereinigt liegen, lässt sich im Falle, dass die Doppelpunkte derselben nicht reell sind, allgemein durch die Gleichung darstellen:

$$(1) \qquad (x-a)(x'-a)+b^2=0.$$

Daraus erhält man für die Doppelpunkte:

$$x = a \pm bi.$$

Da im Gebiete der Grösse $x$, welches nur die reellen Werthe umfasst, die complexe Zahl $a+bi$ geometrisch nicht mehr gedeutet werden kann, so *werden die complexen Punkte $x = a \pm bi$ als ideale Punkte zu den reellen Punkten hinzugefügt.* Als geometrische Bedeutung derselben ergiebt sich eben die durch die Gleichung (1) dargestellte In-

*) Diese Untersuchungen sind niedergelegt in den *„Beiträgen zur Geometrie der Lage"* 1856—1860. Den Artikeln dieses Werkes, auf das ich mich immer beziehe, ist ein B. vorgesetzt.

volution. In der That wird umgekehrt durch ein Paar complex-conjugirter Punkte stets *eine und nur eine* Involution auf der gegebenen Geraden bestimmt.

*Nun sind aber die complex-conjugirten Punkte* $x = a + bi$ *und* $x = a - bi$ *zu trennen*, was sich auf folgende Weise erreichen lässt.

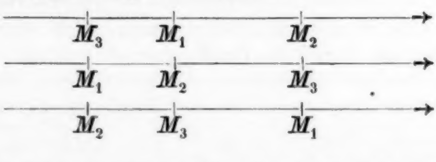
Da in der Euklidischen Geometrie die Gerade als im Unendlichen geschlossen betrachtet wird, so kann man auf zwei Wegen von einem Punkte $M_1$ derselben zu einem andern $M_3$ übergehen. Um dieselben zu unterscheiden, muss noch ein dritter Punkt $M_2$ gegeben sein. *Die unmittelbare Aufeinanderfolge von* 3 *Punkten* $M_1$, $M_2$, $M_3$ *bestimmt also eine und nur eine Richtung oder einen Sinn auf der Geraden**). So wird der Sinn $0, +1, \infty$ als positive Richtung der Geraden bezeichnet. Der Sinn $M_1 M_2 M_3$ stimmt mit dem Sinne $M_2 M_3 M_1$, $M_3 M_1 M_2$ überein; ist aber dem Sinne $M_1 M_3 M_2$, $M_2 M_1 M_3$, $M_3 M_2 M_1$ entgegengesetzt. Bei denselben Permutationen der Indices, welche den Sinn der Gruppe $M_1$, $M_2$, $M_3$ ungeändert lassen, bleibt auch der Ausdruck:

$$(2) \qquad M_3 M_2 \,.\, M_2 M_1 \,.\, M_1 M_3 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)$$

ungeändert. Hierbei sind die Strecken $M_3 M_2$ etc., wie dies stets vorausgesetzt wird, mit ihrem Zeichen zu nehmen. — Man sieht ferner leicht, dass *wenn das vorstehende Produkt positiv ist, der Sinn* $M_1 M_2 M_3$ *mit der positiven Richtung der gegebenen Geraden übereinstimme.* In diesem Falle sind nämlich nur folgende Combinationen der Zeichen der Segmente möglich:

| $M_3 M_2$ | $M_2 M_1$ | $M_1 M_3$ |
|---|---|---|
| $+$ | $-$ | $-$ |
| $-$ | $+$ | $-$ |
| $-$ | $-$ | $+$ |
| $+$ | $+$ | $+$. |

Denselben entsprechend können die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ auf der gegebenen Geraden, deren positive Richtung wir hier von links nach rechts legen, folgende Lagen einnehmen:




*) *Drei* von einander verschiedene Elemente eines Elementargebildes bestimmen mit Rücksicht auf ihre Anordnung *einen Sinn*, der bei projectivischer Umformung ungeändert bleibt, wie das Doppelverhältniss von *vier* Elementen.

Die letzte Combination ist unmöglich. — Hieraus folgt der Satz: *Die Sinne* $M_1\,M_2\,M_3$ *und* $M_1'\,M_2'\,M_3'$ *sind übereinstimmend oder entgegengesetzt, je nachdem die denselben entsprechenden Produkte:*

$$(2^*)\quad (x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1)\,(x_1 - x_2) \qquad (x_2' - x_3')\,(x_3' - x_1')\,(x_1' - x_2')$$

*gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.*

Es ist bekannt, dass, wenn von 2 involutorischen Punktreihen $M_1\,M_2\,M_3 \ldots M_1$ und $M_1'\,M_2'\,M_3' \ldots M_1'$ die erstere in einem und demselben Sinne beschrieben wird, die Punkte der letzteren ebenfalls in einem und demselben Sinne aufeinanderfolgen, *der mit dem Sinne der ersteren übereinstimmt oder nicht, je nachdem die Doppelpunkte der beiden Punktreihen complex oder reell sind.* In der That folgt aus der Gleichung der Involution:

$$\alpha x x' + \beta(x + x') + \gamma = 0$$

$$x_1' - x_2' = \frac{(\alpha\gamma - \beta^2)\,(x_1 - x_2)}{(\alpha x_1 + \beta)\,(\alpha x_2 + \beta)},$$

woraus erhellt, dass die Ausdrücke (2*) gleich — oder entgegengesetzt — bezeichnet sind, je nachdem:

$$\alpha\gamma - \beta^2 \gtrless 0.$$

Im Falle complexer Doppelpunkte ($\alpha\gamma - \beta^2 > 0$), wo mithin die involutorischen Punktreihen $x$, $x'$ sich *in einem und demselben Sinne* beschreiben lassen, kann man *von einem Sinne der Involution* sprechen, wenn unter Involution wie gewöhnlich der Inbegriff beider Punktreihen verstanden wird. Dieser Sinn kann ein zweifacher sein; er wird definirt, wie eben gezeigt worden ist, durch die unmittelbare Aufeinanderfolge von 3 Punkten der Geraden.

Hier finden wir wieder jene *elementare Polarität,* durch welche positive und negative Grössen allgemein interpretirt werden. Und es ist genau dasselbe Verfahren, das Gauss bei seiner Darstellung der complexen Zahlen in der Ebene zu Grunde legte, wenn wir mit v. Staudt die complex-conjugirten Punkte $x = a + bi$ und $x = a - bi$ durch den Sinn der dieselben darstellenden Involution (1) unterscheiden. *Um also den complexen Punkt* $x = a + bi$ *geometrisch darzustellen, verbinde man mit der Involution* (1) *den in der Aufeinanderfolge der Punkte* $-b$, $0$, $+b$ *enthaltenen Sinn.* Dann erhält man für den conjugirten Punkt $x = a - bi$ den entgegengesetzten Sinn $+b$, $0$, $-b$. Für $b > 0$ stimmt der Sinn des complexen Punktes $x = a + bi$ mit der positiven Richtung der gegebenen Geraden überein. — Ist $b = 0$, so wird jeder dieser Sinne unbestimmt; die complexen Punkte gehen in den „neutralen“ oder reellen Punkt $x = a$ über.

Die vorstehende Interpretation des complexen Punktes entspricht völlig dem allgemeinen Verfahren der formalen Grössenlehre; sie ist

daher unter den über das Gebiet der Grösse $x$ gemachten Voraussetzungen die *einzig mögliche*. Namentlich trägt dieselbe nicht mehr hypothetischen Charakter an sich, als die ganze Algebra*).

In der Involution (1) ist der Punkt $x = a$ das Centrum $C$ d. h. dem unendlich fernen Punkte $U$ der Geraden zugeordnet. Für jedes Paar zugeordneter Punkte $M, M'$ hat man:

$$CM \,.\, CM' = -b^2.$$

Ausgezeichnet unter diesen Paaren ist das Paar:

$$CD = +b \qquad CD' = -b,$$

welches zu $U$ und $C$ harmonisch liegt und ausserdem bekanntlich die Eigenschaft besitzt, dass der Abstand $DD'$ unter den Abständen $MM'$ ein Minimum ist. — Da die Involution (1) durch die beiden Punkte $C, D$ völlig bestimmt ist und der mit dem Sinne $-b, 0, +b$ identische Sinn $D'CD$ — man überzeugt sich hiervon durch Bildung der Ausdrücke (2*) — den *endlichen* Uebergang von $C$ zu $D$ bezeichnet, so ergiebt sich *als einfachste Darstellung des complexen Punktes* $x = a + bi$ *das Punktepaar* $C, D$, *wobei aber die Aufeinanderfolge der beiden Punkte wesentlich ist.* Der conjugirte Punkt $x = a - bi$ wird dann durch das Paar $C, D'$ dargestellt (B. 141).

2. Gehen wir durch die Substitution:

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \tag{3}$$

zu homogenen Coordinaten $x_1, x_2$ in der gegebenen Geraden über, so nimmt die Gleichung (1) die Form an:

$$(x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1)(x_1' \xi_2 - x_2' \xi_1) + (x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1)(x_1' \eta_2 - x_2' \eta_1) = 0. \tag{4}$$

*Durch diese Involution*, in der die Punkte:

$$\xi_1 + \varrho\eta_1\,,\ \xi_2 + \varrho\eta_2 \quad \text{und} \quad \varrho\xi_1 - \eta_1\,,\ \varrho\xi_2 - \eta_2$$

einander conjugirt sind, *wird demnach der complexe Punkt:*

$$\omega x_1 = \xi_1 + \eta_1 i \quad , \quad \omega x_2 = \xi_2 + \eta_2 i \tag{5}$$

*dargestellt*, wenn ausserdem ein bestimmter Sinn hinzugenommen wird. Um mit der vorgehenden Nr. in Uebereinstimmung zu bleiben, *haben wir für diesen Sinn zu nehmen den in der Aufeinanderfolge der Punkte* $\xi_1, \xi_2$; $\xi_1 + \varrho'\eta_1, \xi_2 + \varrho'\eta_2$; $\eta_1, \eta_2$ *enthaltenen* — unter Voraussetzung, *dass* $\varrho'$ *ein positiver von* 0 *verschiedener Parameter sei.* In der That sind die ursprünglichen Coordinaten $x$ dieser 3 Punkte beziehentlich $a$, $a + \varrho' b$, $\infty$; so dass durch Bildung des Ausdrucks (2) die Identität des vorstehenden Sinnes mit dem Sinne $-b, 0, +b$ unmittelbar erkannt wird. Man findet überhaupt (entweder direct oder durch Zurückführung auf (2)), dass der Sinn:

*) Smith. Annali da Brioschi. Ser. II. T. III. p. 116.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\,,\quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0\,,\quad c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

mit dem Sinne:

$$x_1 = 0\,,\quad x_1 + \varrho' x_2 = 0\,,\quad x_2 = 0$$

übereinstimme, wenn:

(6) $$(b_1 c_2 - b_2 c_1)(c_1 a_2 - c_2 a_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) < 0.$$

Setzt man:

$$x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1 \equiv p\,,\quad x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1 \equiv q\,;$$

so werden die zugeordneten Punkte der Involution (4) dargestellt durch die Gleichungen:

(7) $$\varkappa p - \lambda q = 0 \qquad \lambda p + \varkappa q = 0\,,\text{*)}$$

wo $\varkappa$, $\lambda$ alle reellen Werthe durchlaufen. Man erkennt daraus, dass sich die eben abgeleitete geometrische Bedeutung des complexen Punktes (5) oder $p + qi = 0$ auch unmittelbar aus dieser Gleichung ergiebt, wenn man bedenkt, dass dieselbe mit:

$$(\varkappa + \lambda i)(p + qi) \equiv (\varkappa p - \lambda q) + i(\lambda p + \varkappa q) = 0$$

identisch sein muss. Der complexe Punkt $p + qi = 0$ wird also durch die Gesammtheit der Punktepaare (7) dargestellt, die eine Involution bilden**), welcher zur Trennung der conjugirten Punkte $p + qi = 0$ und $p - qi = 0$ der Sinn:

(8) $$p = 0 \qquad p + \varrho' q = 0 \qquad q = 0$$

beigelegt wird.

Dieses Princip ist sowohl auf jede Gleichung mit complexen Coefficienten als auf Systeme von solchen Gleichungen unmittelbar anwendbar. Es wird sich zeigen, dass die auf diese Weise erschlossene geometrische Bedeutung complexer Gebilde übereinstimmt mit derjenigen, die wir unter Zugrundelegung des (reellen und idealen) Punktes als Raumelement ableiten werden.

An die Gleichungen (7) schliesst sich der folgende Satz (B. 118): *Die Involution* (7) *enthält ein und nur ein Punktepaar $B$, $B'$ von der Art, dass es zu einem gegebenen Paare $A$, $A'$ ein bestimmtes* (*negatives*) *Doppelverhältniss* — $\varkappa^2$ *besitze und ausserdem der Sinn $ABA'$ mit dem Sinne* (8) *übereinstimme.*

Sind die Gleichungen der Punkte $A$, $A'$; $B$, $B'$ beziehentlich:

$$p + \varrho q = 0\,,\quad \varrho p - q = 0 \quad ; \quad p + \sigma q = 0 \quad \sigma p - q = 0\,,$$

---

*) Im Folgenden werden *ausschliesslich reelle* Grössen stets mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\delta \ldots \varkappa$, $\lambda \ldots$; Grössen, die auch complexe Werthe annehmen können, mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \ldots$ bezeichnet.

**) Die erste Andeutung dieser Auffassung findet sich wohl bei Plücker. System der anal. Geometrie p. 19 ff.

so folgt für $\sigma$ die Gleichung:

$$\frac{\varrho - \sigma}{1 - \varrho\sigma} = \pm \varkappa. \tag{9}$$

Damit aber der Sinn $ABA'$ mit (8) übereinstimme, muss nach (6) $(1 + \varrho\sigma)(\varrho - \sigma) < 0$ sein. Denkt man sich $\varkappa$ als *positive* Zahl, so hat man also in vorstehender Gleichung das *untere* Zeichen zu nehmen. Eine geometrische Construction dieses Paares giebt v. Staudt B. 83. Für $\varkappa = +1$ beziehen sich die aus (9) folgenden Werthe von $\sigma$ auf zugeordnete Punkte der Involution (7): bekanntlich giebt es nur ein einziges Punktepaar derselben, welches zu $A$, $A'$ harmonisch liegt.

**3.** Wenn in *zwei vereinigt liegenden projectivischen Punktreihen* jedem reellen Punkte wieder ein reeller zugeordnet ist, so entspricht auch jedem complexen Punkte ein complexer Punkt. *In den Darstellungen dieser complexen Punkte sind dann immer zwei einander entsprechende Punkte conjugirt.* In der That sind diese Punktreihen durch die Gleichungen:

$$a_x + \sigma b_x = 0 \quad , \quad c_y + \sigma d_y = 0$$

dargestellt, wo $a_x$ etc. Ausdrücke $a_1 x_1 + a_2 x_2$ etc. bezeichnen, und man setzt:

$$x_1 = \xi_1 + \eta_1 i \quad , \quad x_2 = \xi_2 + \eta_2 i;$$

so folgt für den entsprechenden Punkt:

$$y_1 = \zeta_1 + \tau_1 i \quad , \quad y_2 = \zeta_2 + \tau_2 i:$$

$$\begin{vmatrix} a_\xi + a_\eta i & , & b_\xi + b_\eta i \\ c_\zeta + c_\tau i & , & d_\zeta + d_\tau i \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$a_\xi d_\zeta - b_\xi c_\zeta - a_\eta d_\tau + b_\eta c_\tau = 0$$
$$a_\xi d_\tau - b_\eta c_\zeta + a_\eta d_\zeta - b_\xi c_\tau = 0.$$

Nimmt man nun an, dass die Punkte $\xi$, $\zeta$ einander entsprechen, so gilt nach der ersteren dieser Gleichungen dasselbe von den Punkten $\eta$, $\tau$. Dann zeigt aber die letztere Gleichung, dass überhaupt:

$$\begin{vmatrix} a_\xi + \varrho a_\eta & , & b_\xi + \varrho b_\eta \\ c_\zeta + \varrho c_\tau & , & d_\zeta + \varrho d_\tau \end{vmatrix} = 0,$$

worin der vorstehende Satz ausgesprochen ist. *Der Sinn des Punktes* $\zeta_1 + \tau_1 i$ *etc.*, der in der Aufeinanderfolge der Punkte $\zeta$, $\zeta + \varrho'\tau$, $\tau$ $(\varrho' > 0)$ enthalten ist, *entspricht demnach ebenfalls dem Sinne des Punktes* $\xi_1 + \eta_1 i$ *etc.*

**4.** Wie für die Geraden ein ideales Element aufzustellen ist, *so auch für die Ebene.* Es ist leicht zu sehen, *dass der ideale Punkt der Ebene von dem idealen Punkte der Geraden geometrisch nicht verschieden ist.* Sind die Coordinaten des complexen Punktes:

$$\varrho x_k = \xi_k + \eta_k i \quad (k = 1, 2, 3), \tag{a}$$

so liegt derselbe auf der reellen Geraden:

$$\text{(b)} \qquad \begin{vmatrix} x_1 , & \xi_1 , & \eta_1 \\ x_2 , & \xi_2 , & \eta_2 \\ x_3 , & \xi_3 , & \eta_3 \end{vmatrix} = (x\,\xi\,\eta) = 0$$

und nur auf dieser reellen Geraden. Im Vereine mit dieser Gleichung wird der complexe Punkt ($a$) durch die Gleichung $\frac{x_1}{\xi_1 + \eta_1 i} = \frac{x_2}{\xi_2 + \eta_2 i}$ dargestellt. D. h. betrachten wir $x_1$, $x_2$ als Coordinaten auf dieser Geraden — es kann dies geschehen, indem ein homogenes Coordinatensystem auf einer Geraden, d. i. die gebrochene lineare Substitution (3) dadurch vollkommen bestimmt ist, dass die Fundamentalpunkte desselben, hier die Durchschnittspunkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mit (b), und die Gleichung des unendlich fernen Punktes, hier aus (b) und der Gleichung der unendlich fernen Geraden der Ebene $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0$ durch Elimination von $x_3$ zu erhalten, gegeben sind — so ist der Punkt (a) mit dem Punkte auf (b):

$$[x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1] + i[x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1] = 0$$

identisch. Daraus folgen nach Nr. 2. *für die zugeordneten Punkte der den complexen Punkt* (a) *darstellenden Involution beziehentlich die Coordinaten:*

$$\varkappa \xi_1 - \lambda \eta_1 \quad , \quad \varkappa \xi_2 - \lambda \eta_2 \quad , \quad \varkappa \xi_3 - \lambda \eta_3 ;$$
$$\lambda \xi_1 + \varkappa \eta_1 \quad , \quad \lambda \xi_2 + \varkappa \eta_2 \quad , \quad \lambda \xi_3 + \varkappa \eta_3 .$$

Insbesondere sind die Punkte $\xi$, $\eta$ einander zugeordnet. *Der Sinn des complexen Punktes* (a) *ist enthalten in der Aufeinanderfolge der Punkte* $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$; $\xi_1 + \varrho' \eta_1$, $\xi_2 + \varrho' \eta_2$, $\xi_3 + \varrho' \eta_3$; $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$; *wenn* $\varrho'$ *eine positive, von Null verschiedene Zahl bezeichnet.*

Im Falle von *Parallelcoordinaten* $x$, $y$ hat man:

$$\text{(c)} \qquad x_1 = x = a + bi \quad , \quad x_2 = y = c + di \quad , \quad x_3 = 1.$$

Multiplicirt man hier durchaus mit $1 + i$, so ergeben sich als zugeordnet in der Darstellung des complexen Punktes die Punkte:

$$x = a + \sigma b \quad , \quad y = c + \sigma d \quad ; \quad x' = a - \frac{b}{\sigma} \quad , \quad y' = c - \frac{d}{\sigma} .$$

Der Punkt $a$, $c$ ist das Centrum $C$ dieser Involution, welche sich auf der durch $C$ parallel zur Geraden 0, ($b$, $d$) gelegten Geraden:

$$d(x - a) = b(y - c)$$

befindet. Der Sinn des complexen Punktes (c) entspricht dem endlichen Uebergange vom Punkte $C$ zu einem Punkte $a + \sigma' b$, $c + \sigma' d$ ($\sigma' > 0$), der auf derselben Seite von $OC$ liegt, wie ($b$, $d$).

Sind $x$, $y$ *rechtwinklige Coordinaten*, so hat man noch für jedes Paar conjugirter Punkte $M$, $M'$:

$$CM \,.\, CM' = -(b^2 + d^2),$$

woraus eine einfache Construction des Punktes $M'$ folgt.

**5.** *Die complexe Gerade:*

$$p + qi = 0, \tag{1}$$

wo $p$, $q$ homogene lineare Functionen der Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ bezeichnen, wird geometrisch dargestellt durch die zweifach unendliche Schaar von Punkten $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc., deren Coordinaten ihre Gleichung erfüllen. Bedeutet $p_\xi$ den in den Coordinaten $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ geschriebenen Ausdruck $p$ etc., so folgt aus (1) durch Einsetzung der Coordinaten $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc.:

$$p_\xi - kp_\eta = 0 \qquad kp_\eta + q_\xi = 0; \tag{2}$$

der Punkt $\eta$ liegt also auf der Geraden:

$$pp_\xi + qq_\xi = 0.$$

Aus (2) ergiebt sich ferner, dass nicht allein die Punkte $\xi$, $\eta$, sondern überhaupt jedes Paar conjugirter Punkte $\xi_1 + \varrho k\eta_1$ etc., $\varrho\xi_1 - k\eta_1$ etc., der Darstellung des complexen Punktes $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc. auf zugeordneten Strahlen der involutorischen Büschel:

$$\varkappa p - \lambda q = 0 \qquad \lambda p + \varkappa q = 0 \tag{3}$$

liegt. Endlich zeigt sich, dass alle complexen Punkte der Geraden (1) in Beziehung auf den Punkt $p = 0$, $q = 0$ auch im gleichen Sinne beschrieben sind, d. h. von demselben durch gleichlaufende Strahlenbüschel projicirt werden. Der Sinn dieses Strahlenbüschels ist für den Punkt $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc. in der Aufeinanderfolge der nach den Punkten $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$; $\xi_1 + \varrho' k\eta_1$, $\xi_2 + \varrho' k\eta_2$, $\xi_3 + \varrho' k\eta_3$; $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ ($\varrho' > 0$) gezogenen Strahlen enthalten. Ihre Gleichungen sind beziehentlich:

$$pq_\xi - qp_\xi = 0 \;,\; p(q_\xi + \varrho' p_\xi) - q(p_\xi - \varrho' q_\xi) = 0 \;,\; pp_\xi + qq_\xi = 0.$$

Durch Bildung des Ausdrucks (6) in Nr. 2. findet man sofort, dass der durch diese 3 Strahlen definirte Sinn mit dem Sinne:

$$p = 0 \qquad p + \varrho' q = 0 \qquad q = 0 \tag{4}$$

übereinstimmt.

*Die complexe Gerade* (1) *ist demnach geometrisch dargestellt durch den involutorischen Strahlbüschel* (3), *verbunden mit dem in der Aufeinanderfolge der Strahlen* (4) *enthaltenen Sinne.* Auf jeder nicht durch den reellen Punkt derselben gehenden Geraden liegt ein ihr angehöriger complexer Punkt, dessen geometrische Darstellung zum involutorischen Strahlbüschel (3) perspectivisch gelegen ist.

Die in einer reellen Ebene enthaltene complexe Gerade wird nach v. Staudt als *complexe Gerade I. Art* bezeichnet.

**6.** Der Durchschnittspunkt zweier complexen Geraden:

$$p + qi = 0 \qquad r + si = 0 \tag{5}$$

wird, falls er nicht reell ist, auf folgende Weise gefunden. Man hat in diesem Falle immer die Identität:

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s \equiv 0;$$

multiplicirt man also die erste der Gleichungen (5) mit $\beta + \alpha i$, die zweite mit $\delta + \gamma i$ und addirt, so ergiebt sich als reeller Träger des Punktes (5) die Gerade:

(6) $$\beta p - \alpha q + \delta r - \gamma s = 0.$$

Zum Behufe der geometrischen Untersuchung können die Gleichungen (5) durch:

$$p + ri = 0 \qquad q + ri = 0$$

ersetzt werden, wo *jetzt* $r = 0$ die Verbindungslinie der reellen Punkte der Geraden (5), $p = 0$ $q = 0$ beziehentlich die derselben conjugirten Strahlen bezeichnen. Der reelle Träger des Punktes (5) erhält dann die einfachere Gleichung:

$$t \equiv p - q = 0;$$

er geht also durch den Durchschnitt von irgend 2 Strahlen:

(7) $$\varkappa p + \lambda r = 0 \qquad \varkappa q + \lambda r = 0.$$

Hieraus erkennt man unmittelbar, dass *die complexen Punkte:*

$$p + ri = 0 \quad t = 0 \quad ; \quad q + ri = 0 \quad t = 0$$

*in der That zusammenfallen.* Dieselben sind auch *in dem nämlichen Sinne beschrieben*, da die Strahlen:

$$\begin{matrix} p = 0, & p + \varrho' r = 0 & r = 0 \\ & \text{und} & & (\varrho' > 0) \\ q = 0, & q + \varrho' r = 0 & r = 0 \end{matrix}$$

die Gerade $t = 0$ beziehentlich in denselben Punkten schneiden.

Aus den Gleichungen (7) lässt sich folgender Satz (B. 126) entnehmen: *Sucht man in den involutorischen Strahlenbüscheln, welche die Geraden* (5) *darstellen, beziehentlich diejenigen conjugirten Strahlenpaare auf, welche zur Verbindungslinie der reellen Punkte dieser Geraden und dem derselben zugeordneten Strahle das nämliche Doppelverhältniss* $-\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}$ *besitzen* (cf. Nr. 2.), *so geht der reelle Träger des Punktes* (5) *durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen.*

Für die geometrische Construction der Geraden (7) empfehlen sich besonders diejenigen conjugirten Strahlenpaare, die bez. zu $r = 0$ $p = 0$ und $r = 0$ $q = 0$ *harmonisch* liegen.

Die *allgemeinere* Darstellung der eben behandelten Aufgabe, die unmittelbar an die Gleichungen (5) anknüpft, führt auf die Frage: unter welcher Bedingung die complexen Geraden $p + qi = 0$ $r + si = 0$ eine beliebige Gerade $t = 0$, die nicht durch den reellen Punkt einer derselben gezogen ist, in complexen Punkten *von gleichem* Sinne schneiden. Die Beantwortung derselben erfordert die Aufstellung der Gleichung der Geraden, welche die Punkte $p = 0$ $q = 0$ und $r + si = 0$ $t = 0$ verbindet. Diese Gleichung ist von der Form:

(8) $$\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q \equiv \mathfrak{c}t + (r + si) = 0\,.$$

Denkt man sich:

$$p \equiv \sum_k a_k x_k \quad , \quad q \equiv \sum_k a_k' x_k \quad , \quad r \equiv \sum_k b_k x_k \quad , \quad s \equiv \sum_k b_k' x_k \quad , \quad t \equiv \sum_k c_k x_k$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3)$$

gesetzt, so folgt:

$$(a a' c)\,\mathfrak{a} = (b a' c) - (a' b' c) i$$
$$(a a' c)\,\mathfrak{b} = (a b c) + (a b' c)\, i\,.$$

Nach (6) in Nr. 2. findet man nun, dass den complexen Geraden:

$$(\varkappa + \lambda i)\, p + (\mu + \nu i)\, q = 0 \qquad p + qi = 0$$

derselbe Sinn beizulegen ist, *wenn* $\varkappa\nu - \lambda\mu > 0$, d. i. wenn der imaginäre Theil von $\frac{\mu + \nu i}{\varkappa + \lambda i}$ positiv ist. Wendet man diesen Satz auf die Gerade (9) an, so ergiebt sich, dass *die Geraden* (5) *in Beziehung auf die Gerade* $t = 0$ *im gleichen Sinne beschrieben sind*, wenn (vergl. Baltzer Det. p. 36):

$$(a b c)\,(a' b' c) + (a b' c)\,(b a' c) = (a a' c)\,(b b' c) > 0$$

d. i. *wenn die Determinanten*

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_1', & c_1 \\ a_2, & a_2', & c_2 \\ a_3, & a_3', & c_3 \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} b_1, & b_1', & c_1 \\ b_2, & b_2', & c_2 \\ b_3, & b_3', & c_3 \end{vmatrix}$$

*gleiches Zeichen besitzen.*

Geht z. B. die Gerade $t = 0$ in die besondere Form (6) über, so erhalten diese Determinanten — unter Zugrundelegung des Dreiecks $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ — bez. die Werthe $\gamma^2 + \delta^2$, $\alpha^2 + \beta^2$, sind also, wie es sein muss, gleichbezeichnet.

7. Durch die complexen Punkte $\alpha_1 + \beta_1 i$ etc. und $\gamma_1 + \delta_1 i$ etc. geht die Gerade:

(a) $$|\; x_r,\ \alpha_r + \beta_r i,\ \gamma_r + \delta_r i \;| = 0 \qquad (r = 1,\ 2,\ 3),$$

welche complex ist, so lange nicht die Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zusammenfallen. Die Construction des reellen Punktes dieser Geranden, dessen Coordinaten die Werthe:

$$\varrho x_r = \alpha_r(\alpha\gamma\delta) + \beta_r(\beta\gamma\delta) + \gamma_r(\alpha\beta\gamma) + \delta_r(\alpha\beta\delta) \qquad (r = 1,\ 2,\ 3)$$

erhalten, ergiebt sich als das dualistische Gegenstück der in der vorigen Nr. behandelten Aufgabe.

Ein *jeder* Punkt der vorstehenden Geraden lässt sich unter der Form darstellen:

$$\varrho x_r = \mathfrak{k}(\alpha_r + \beta_r i) + \mathfrak{l}(\gamma_r + \delta_r i) \qquad (r = 1,\ 2,\ 3),$$

wo $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ alle reellen und complexen Werthe durchlaufen. Beschränkt man dieselben auf *reelle Werthe* $k$, $l$ so erhält man eine *einfach unendliche Schaar* von complexen Punkten, welche v. Staudt als *Kette*

bezeichnet (B. 206). Diese Schaar besitzt bemerkenswerthe Eigenschaften, die wir kurz erwähnen wollen. Wir setzen dabei voraus, dass weder die Punkte $\alpha$, $\gamma$ noch $\beta$, $\delta$ zusammenfallen, ferner, dass die projectivischen Punktreihen $\alpha_1 + \varrho\beta_1$ etc. $\gamma_1 + \varrho\delta_1$ etc. sich nicht in perspectivischer Lage befinden. Dann und nur dann enthält die Schaar *keinen reellen Punkt.*

1) Die reellen Träger sämmtlicher complexen Punkte der Schaar:

(b) $$\varrho x_r = k(\alpha_r + \beta_r i) + l(\gamma_r + \delta_r i) \qquad (r = 1, 2, 3)$$

umhüllen eine Curve 2ter Ordnung $C_2$, die dem Vierseit $\alpha\beta\delta\gamma$ eingeschrieben ist. Dieselben bilden einen involutorischen Strahlbüschel 2ter Ordnung $S_2$ in der Art, dass die in den Darstellungen der Punkte (b) einander zugeordneten Punkte auf den conjugirten Strahlen desselben liegen. Insbesondere ist jeder Punkt von $C_2$ dem Schnittpunkte seiner Tangente mit der ihr conjugirten zugeordnet.

2) Die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten des Vierseits $\alpha\beta\delta\gamma$ gehen durch den Punkt $\eta$, in welchem sich die Geraden $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ begegnen und bilden mit diesen Geraden einen harmonischen Büschel.

3) Der reelle Punkt $R$ der complexen Geraden (a) liegt auf der Polare des Schnittpunktes $\xi$ der Seiten $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$; er ist ein *Innenpunkt von $C_2$. Auf der Polare von $R$ in Beziehung auf $C_2$*, welche durch $\xi$ hindurchgeht, *schneiden sich je 2 zugeordnete Strahlen des Büschels $S_2$.*

4) Bezeichnen $\varepsilon$ den Schnittpunkt der Seiten $\alpha\beta$, $\gamma\delta$; ferner $K$, $L$, $M$, $N$ bez. die Berührungspunkte der Seiten $\alpha\beta$, $\beta\delta$, $\delta\gamma$, $\gamma\alpha$; endlich $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ bez. die dem Punkte $\varepsilon$ in den Darstellungen der complexen Punkte $\alpha_1 + \beta_1 i$ etc. und $\gamma_1 + \delta_1 i$ etc. zugeordneten Punkte, so hat man:

$$(\alpha\beta K\varepsilon') = (\gamma\delta M\varepsilon'') = (NL\eta R).$$

**8.** *Complexe Punkte der Curve 2ter Ordnung:*

(1) $$\sum_{r,s} a_{r,s} x_r x_s \equiv F(x) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Die Coefficienten $a$, zwischen denen die Relation $a_{sr} = a_{rs}$ besteht, werden als *reell* vorausgesetzt. Durch Einsetzung der Coordinaten $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc. in (1) erhält man die Gleichungen:

$$F(\xi) = k^2 F(\eta)$$

$$\eta_1 F_1(\xi) + \eta_2 F_2(\xi) + \eta_3 F_3(\xi) = 0,$$

wobei $\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_r} = F_r(\xi)$ gesetzt ist. Diese Gleichungen besagen, dass die Punkte $\xi$, $\eta$ einander in Beziehung auf die Curve (1) conjugirt und *beide Aussenpunkte* derselben sind.

Die in der Darstellung des Punktes $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc. einander zu-

geordneten Punkte $\xi_1 + \varrho k \eta_1$ etc. und $\varrho \xi_1 - k\eta_1$ etc. sind auch in Beziehung auf die Curve (1) conjugirt. In der That hat man:

$$(2)\quad \begin{aligned} &(\varrho\xi_1 - k\eta_1)\, F_1(\xi_1 + \varrho k \eta_1, \ldots) + \cdots \equiv 2\varrho[F(\xi) - k^2 F(\eta)] \\ &\qquad + k(\varrho^2 - 1)\,[\eta_1 F_1(\xi) + \eta_2 F_2(\xi) + \eta_3 F_3(\xi)] = 0. \end{aligned}$$

*Dass die complex-conjugirten Punkte* $\xi_1 + k\eta_1 i$ *etc. und* $\xi_1 - k\eta_1 i$ *etc. der Curve* (1) *angehören*, besagt also, dass *die auf der* (1) *nicht schneidenden Geraden* $\xi\eta$ *liegenden Punktepaare, welche in Beziehung auf diese Curve conjugirt sind, durch die Coordinaten* $\xi_1 + \varrho k \eta_1$ *etc. und* $\varrho\xi_1 - k\eta_1$ *etc. bestimmt seien, wo* $\varrho$ *alle reellen Werthe durchläuft.*

Die Curve (1) ist der Inbegriff aller Punkte, welche in dem ebenen Polarsysteme:

$$(3)\qquad \omega u_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 \qquad (r = 1, 2, 3)$$

auf den ihnen zugeordneten Geraden $u_1, u_2, u_3$ liegen (wodurch sie auch für den Fall erklärt ist, dass die Form $F(x)$ eine *definite* ist). In diesem Polarsysteme entspricht dem Punkte $\xi_1 + \eta_1 i$ etc. die complexe Gerade:

$$(4)\ [x_1 F_1(\xi) + x_2 F_2(\xi) + x_3 F_3(\xi)] + i[x_1 F_1(\eta) + x_2 F_2(\eta) + x_3 F_3(\eta)] = 0.$$

*Der reelle Punkt derselben ist der Pol der Geraden* $\xi\eta$. Die Gleichungen der in der Darstellung dieser Geraden einander zugeordneten Strahlen sind bez.:

$$x_1 F_1(\xi_1 + \varrho\eta_1, \ldots) + \cdots = 0$$
$$x_1 F_1(\varrho\xi_1 - \eta_1, \ldots) + \cdots = 0;$$

*es enthält somit die Polare des Punktes* $\xi_1 + \eta_1 i$ *etc. als zugeordnete Strahlen die Polaren von je 2 Punkten, die in der Darstellung dieses complexen Punktes einander conjugirt sind. Der Sinn der Geraden* (4) *stimmt überein oder nicht mit dem Sinne der Projection des complexen Punktes* $\xi_1 + \eta_1 i$ *etc. vom Pole seines reellen Trägers aus, je nachdem die Gerade* $\xi\eta$ *die Curve* (1) *in 2 complexen oder reellen Punkten schneidet.* Geht diese Gerade durch ihren Pol, so lassen sich diese beiden Sinne nicht mehr aufeinander beziehen. — Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (4) mit $X + Yi$, ferner den bilinearen Ausdruck:

$$\xi_1 F_1(\eta) + \xi_2 F_2(\eta) + \xi_3 F_3(\eta)$$

mit $\Phi$; so erhält man für obige den Punkt $\xi_1 + \eta_1 i$ etc. projicirende Gerade die Gleichung:

$$\{\Phi + 2iF(\eta)\}\, X - \{2F(\xi) + i\Phi\}\, Y = 0.$$

Nach Nr. 5. stimmt der Sinn derselben mit dem Sinne von (4) überein, wenn $4F(\xi)\, F(\eta) - \Phi^2 > 0$, worin unmittelbar der vorstehende Satz ausgesprochen ist.

Aus der eben gegebenen *allgemeinen* Definition der Polare folgt wieder, was oben über die der Curve (1) angehörigen complexen Punkte bemerkt ist.

Vermittelst der Gleichungen (3) erhält man auch *den einer complexen Geraden zugeordneten Pol,* dessen geometrische Definition der der Polare dualistisch gegenüber steht.

**9.** *Beziehung zwischen einer Curve* 2<sup>ter</sup> *Ordnung und einer complexen Geraden.*

*Eine complexe Gerade ist nach dem Vorstehenden Tangente von* (1), *wenn die in der Darstellung derselben zugeordneten Strahlen in Beziehung auf diese Curve conjugirt sind.* Analytisch wird dies ausgedrückt durch die bekannte Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_1 + b_1 i \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_2 + b_2 i \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_3 + b_3 i \\ a_1 + b_1 i, & a_2 + b_2 i, & a_3 + b_3 i, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei:

$$p \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad , \quad q \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

zu denken sind.

*Liegt der reelle Punkt der Geraden:*

$$(5) \qquad p + qi = 0$$

*auf einer Curve* 2<sup>ter</sup> *Ordnung, so haben dieselben noch einen complexen Punkt gemein.* Um einfach zu der von v. Staudt (B. 164) angegebenen Construction desselben zu gelangen, lege man für diese Curve die Gleichung:

$$(6) \qquad \alpha q r + \beta r p + \gamma p q = 0$$

zu Grunde, die hier völlig ausreichend ist, da nur *reelle* Curven 2<sup>ter</sup> Ordnung in Betracht kommen. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind sämmtlich von Null verschieden. Der in Rede stehende Punkt liegt dann auch auf der Geraden:

$$\alpha r - (\beta r + \gamma q) i = 0,$$

so dass sein reeller Träger die Gerade:

$$\gamma(\alpha p + \beta q) + (\alpha^2 + \beta^2) r = 0$$

ist. Diese Gerade ist die Polare in Beziehung auf (6) des Punktes $\beta$, $\alpha$, 0, d. i. des Centrums derjenigen Involution, welche auf (6) durch den die Gerade (5) darstellenden involutorischen Strahlenbüschel bestimmt sind. Dieser Punkt ist der Durchschnittspunkt der Geraden:

$$r = 0 \qquad \beta p - \alpha q = 0,$$

von denen die letztere der Tangente von (6) im Punkte $p = 0$ $q = 0$:

$$\alpha p + \beta q = 0$$

zugeordnet ist.

*Wenn die complexe Gerade* $p + qi = 0$ *keinen reellen Punkt mit der gegebenen Curve* 2<sup>ter</sup> *Ordnung gemein hat,* so beziehe man die letztere auf das Dreieck der Geraden $p = 0$, $q = 0$ und der Polaren $r = 0$

des Punktes $p = 0$, $q = 0$. Damit erhält man für diese Curve die Gleichung:

$$(7) \qquad \Sigma \equiv Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2C'pq = 0,$$

worin die Grössen $C$ und $AB - C'^2$ von Null verschieden sind. Setzt man nun:

$$\Sigma \equiv \omega(p^2 + q^2) + st,$$

— $s$, $t$ homogene lineare Functionen von $p$, $q$, $r$ — so ergiebt sich für $\omega$ die Gleichung:

$$(A - \omega)(B - \omega) - C'^2 = 0,$$

welche stets reelle und unter unseren Voraussetzungen ungleiche Wurzeln besitzt. Die zweiwerthigen Ausdrücke:

$$A - \omega = \alpha, \qquad \omega - B = \beta$$

genügen *beide* der Gleichung:

$$w^2 - w(A - B) - C'^2 = 0,$$

deren Wurzeln entgegengesetzt bezeichnet sind. Werden dieselben mit $w_1$ und $w_2$ bezeichnet, so ergeben sich — entsprechend den beiden Werthen von $\omega : \omega_1, \omega_2$ — als zusammengehörige Systeme:

$$\alpha_1 = w_1 \qquad -\beta_1 = -w_2$$
$$\alpha_2 = w_2 \qquad -\beta_2 = -w_1,$$

von deren erstem angenommen werden kann, dass es Grössen enthalte, die im Zeichen mit $C$ *nicht* übereinstimmen. Es besteht demnach die Identität:

$$C\{\Sigma - \omega_1(p^2 + q^2)\} \equiv C^2r^2 - (p\sqrt{-w_1C} - q\sqrt{w_2C})^2,$$

worin die Wurzelgrössen *reell* sind. Ihre Zeichen sind so zu bestimmen, dass ihr Produkt $= CC'$ wird. *Die reellen Träger der Durchschnittspunkte der Geraden* $p \pm qi = 0$ *und der Curve* (7) *sind folglich die Geraden:*

$$Cr \pm \{p\sqrt{-w_1C} - q\sqrt{w_2C}) = 0.$$

Man sieht, dieselben werden durch den Punkt $p = 0$ $q = 0$ und die Gerade $r = 0$ harmonisch getrennt (B. 165).

*Für das zweite complexe Sehnenpaar*, welches durch die gemeinsamen Punkte der Curve (7) und der complex-conjugirten Geraden $p \pm qi = 0$ geht, erhält man die Gleichung:

$$C\{\Sigma - \omega_2(p^2 + q^2)\} \equiv C^2r^2 + \{p\sqrt{w_2C} + q\sqrt{-w_1C}\}^2 = 0,$$

in welcher die Wurzelgrössen wie oben zu bestimmen sind.

**10.** Setzt man allgemein in die *Gleichung einer Curve* $n^{\text{ter}}$ *Ordnung* $F(x) = 0$ die complexen Coordinaten $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc. ein, so erhält man 2 Gleichungen, aus denen die Grösse $k$ zu eliminiren ist. Auf diese Weise ergiebt sich als Ort der Punkte $\eta$ eine Curve von der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)$, welche für einen Augenblick als *die dem*

*Punkte* $\xi$ *conjugirte Polare* bezeichnet werden mag*). Wenn der Punkt $\xi$ selbst der Curve $F(x) = 0$ angehört, so erniedrigt sich diese Ordnung um 1. Da die Punkte $\xi$, $\eta$ ein beliebiges Paar in der Darstellung des Punktes $\xi_1 + k\eta_1 i$ etc. zugeordneten Punkte bezeichnen, so folgt, dass der zu irgend einem Punkte $\xi_1 + \varrho k \eta_1$ etc. conjugirte Punkt $\varrho\xi_1 - k\eta_1$ etc. auf der *conjugirten Polare des ersteren liege* (vgl. Nr. 8.). Die Gleichung der conjugirten Polaren ist offenbar *in Beziehung auf* $\xi$ *und* $\eta$ *symmetrisch*, so dass, wenn mehrere Punkte auf *einer* solchen Polaren liegen, die denselben conjugirten Polaren durch *einen* Punkt, den Pol der ersteren Polaren, hindurchgehen.

*Im Falle* $n = 3$ ist die conjugirte Polare ebenfalls von 3ter Ordnung; als ihre Gleichung ergiebt sich:

$$(8)\quad \begin{aligned}[\xi_1 F_1(\eta) + \xi_2 F_2(\eta) + \xi_3 F_3(\eta)]\,[\eta_1 F_1(\xi) + \eta_2 F_2(\xi) + \eta_3 F_3(\xi)]\\ - F(\xi)\,F(\eta) = 0,\end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass sie durch die Berührungspunkte der 6 vom Punkte $\xi$ an $F(x) = 0$ gelegten Tangenten und durch die Durchschnittspunkte von $F(x) = 0$ und der zweiten Polaren des Punktes $\xi$ hindurchgeht. Die Curve (8) ist vom gleichen Geschlechte wie die Originalcurve $F(x) = 0$, denn jede Gerade $\xi\eta$ schneidet die letztere noch in *einem* reellen Punkte, dessen Coordinaten leicht als homogene *lineare* Functionen der $\eta$ dargestellt werden können.

Ist der Punkt $\xi$ selbst ein Punkt von $F(x) = 0$, so fällt die Curve $\eta$ mit der ersten Polaren desselben:

$$\xi_1 F_1(\eta) + \xi_2 F_2(\eta) + \xi_3 F_3(\eta) = 0$$

zusammen. Ist diese *reell*, so gehen durch den Punkt $\xi$ mit Ausnahme von Tangenten nur Gerade, die $F(x) = 0$ nicht mehr in reellen Punkten schneiden.

**11.** *Complexe Gebilde im Raume.* Es wird auf ähnliche Weise, wie in Nr. 4. gezeigt, dass der ideale Punkt des Raumes mit dem der Geraden identisch sei. Demnach wird *der complexe Punkt*:

$$\xi_1 + \eta_1 i, \;\ldots\; \xi_4 + \eta_4 i,$$

dessen reeller Träger die Coordinaten besitzt:

$$\omega p_{rs} = \xi_r \eta_s - \xi_s \eta_r \quad , \quad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

durch die involutorische Punktreihe $\xi_1 + \varrho\eta_1$ etc., $\varrho\xi_1 - \eta_1$ etc. dargestellt, wenn ausserdem derselben der in der Aufeinanderfolge der Punkte $\xi$, $\xi_1 + \varrho'\eta_1$ etc., $\eta$ ($\varrho' > 0$) enthaltene Sinn beigelegt wird.

*Die complexe Ebene* $p + qi = 0$ wird dargestellt durch den involutorischen Ebenenbüschel:

$$p + \varrho q = 0 \qquad \varrho p - q = 0,$$

---

*) Diese Curven finden sich auch bei Güssfeldt, Math. Annalen II. B. p. 80.

beschrieben im Sinne:

$$p = 0 \quad , \quad p + \varrho' p = 0 \quad , \quad q = 0.$$

Bei der Untersuchung der *complexen Geraden*:

$$\text{(a)} \qquad p + qi = 0 \quad r + si = 0$$

sind zwei Fälle zu unterscheiden. Enthält dieselbe einen *reellen* Punkt, so liegt sie auch immer *in einer reellen Ebene*. In diesem Falle gehen die 4 Ebenen $p = 0$ $q = 0$ $r = 0$ $s = 0$ durch denselben reellen Punkt, sodass die Identität

$$\text{(b)} \qquad \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s \equiv 0$$

besteht. Die Gerade (a) liegt dann in der Ebene

$$\text{(c)} \qquad t \equiv \beta p - \alpha q + \delta r - \gamma s = 0;$$

sie ist also eine complexe Gerade $1^{\text{ter}}$ Art (Nr. 4.), welche einfacher durch die Gleichungen

$$p + qi = 0 \qquad t = 0$$

dargestellt wird. Der Sinn derselben wird durch die in den Ebenen

$$p = 0 \quad p + \varrho' q = 0 \quad q = 0 \quad (\varrho' > 0)$$

enthaltenen Strahlen angegeben. Dass der gleichberechtigte Sinn

$$r = 0 \quad r + \sigma' s = 0 \quad s = 0 \quad (\sigma' > 0)$$

mit dem vorstehenden Sinne übereinstimme, ist leicht zu sehen. Betrachtet man überhaupt eine Ebene

$$\text{(d)} \qquad u \equiv \varkappa p + \lambda q + \mu r + \nu s = 0,$$

so stellt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & i \\ \alpha p + \beta q, & \gamma, & \delta \\ \varkappa p + \lambda q, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

die durch Elimination von $r$, $s$ aus den Gleichungen $r + si = 0$, (b), (d) erhalten wird, die complexe Ebene dar, welche durch die Geraden $p = 0$, $q = 0$ und $r + si = 0$, $u = 0$ hindurchgeht. Nach Nr. 6. ist diese Ebene im gleichen Sinne beschrieben, wie $p + qi = 0$, wenn

$$\text{(e)} \qquad (\alpha\lambda - \beta\varkappa)(\gamma\nu - \delta\mu) > 0.$$

Dann sind aber auch die Ebenen (a) in Beziehung auf die Gerade (d) in gleichem Sinne beschrieben.

Die Ungleichheit (e) ist für die Gerade (c) offenbar erfüllt.

**12.** *Eine complexe Gerade*

$$\text{(1)} \qquad p + qi = 0, \quad r + si = 0$$

*die weder durch einen reellen Punkt geht, noch in einer reellen Ebene liegt*, wird von v. Staudt als *complexe Gerade* $2^{\text{ter}}$ *Art* bezeichnet (B. 117). Betrachten wir das von den Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ gebildete Tetraeder als Fundamentaltetraeder und setzen demgemäss in (1):

(2) $p = p_1 + \omega p_2 i \quad q = q_1 + \omega q_2 i \quad r = r_1 + \omega r_2 i \quad s = s_1 + \omega s_2 i,$
so folgt:

$$(3) \qquad \frac{p_1}{q_2} = \frac{q_1}{-p_2} = \frac{r_1}{s_2} = \frac{s_1}{-r_2} = \omega .$$

Diese Gleichungen definiren ein *involutorisches räumliches System, in welchem es weder sich selbst entsprechende reelle Punkte, noch Ebenen giebt.* Jeder sich selbst zugeordnete Strahl dieses Systems enthält *einen* der Geraden (1) angehörigen complexen Punkt, dessen geometrische Darstellung wieder durch zugeordnete Punkte des Systems (3) vermittelt wirdt. *Diese Strahlen,* welche nach v. Staudt (B. 101) als *Leitstrahlen des Systems* bezeichnet werden, *bilden ein Strahlensystem* 1ter *Ordnung und* 1ter *Classe,* das in Punkt- (und Ebenen-) Coordinaten durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} R &\equiv \phantom{-}\varkappa p + \lambda q + \mu r + \nu s = 0 \\ S &\equiv -\lambda p + \varkappa q - \nu r + \mu s = 0; \end{aligned}$$

in Liniencoordinaten durch die Gleichungen

$$p_{13} + p_{42} = 0 \qquad p_{14} + p_{23} = 0$$

dargestellt wird. — Man erkennt hieraus, dass die reelle Axe einer jeden complexen Ebene, welche die Gerade (1) enthält:

$$(\varkappa - \lambda i)(p + qi) + (\mu - \nu i)(r + si) = 0$$

ein Strahl des Systems (4) ist, während die in ihrer Darstellung conjugirten Ebenen zugeordnete Ebenen des involutorischen Systems (3) sind.

*Das involutorische System* (3) *ist als geometrische Darstellung der complexen Geraden* 2ter *Art* (1) *anzusehen.* — Nach dem Princip, welches in Nr. 2. über die geometrische Deutung von Gleichungen mit complexen Coefficienten aufgestellt worden ist, würde sich als geometrische Darstellung der complexen Geraden (1) zunächst das involutorische Strahlensystem

$$(5) \quad \begin{cases} \varkappa p - \lambda q = 0 \\ \mu r - \nu s = 0 \end{cases} \qquad (6) \quad \begin{cases} \lambda p + \varkappa q = 0 \\ \nu r + \mu s = 0 \end{cases}$$

ergeben haben. Es lässt sich aber zeigen, dass es nur *zwei involutorische räumliche Systeme* giebt, in denen sämmtliche Gerade (5) und (6) einander zugeordnet sind. — Sind nämlich überhaupt 2 räumliche Systeme so aufeinander bezogen, dass die Strahlen (5) und (6) einander entsprechen, so bestehen zwischen den zugeordneten Punkten derselben die Relationen

$$\frac{p_1}{q_2} = \frac{q_1}{-p_2}, \qquad \frac{r_1}{s_2} = -\frac{s_1}{r_2}.$$

Die gemeinsamen Werthe $f$, $g$ des ersten und zweiten Paares dieser Quotienten können an sich noch ein beliebiges, auch von den Coor-

ninaten $p_1$, $p_2$ etc. abhängiges Verhältniss besitzen. Setzt man $f:g = \pm 1$, so wird die Beziehung dieser räumlichen Systeme involutorisch. Diese Annahme ist aber nicht blos *hinreichend*, sondern, unter Voraussetzung, dass $f:g$ überhaupt rational in den $p_1$ etc. und $p_2$ etc. sei, auch *nothwendig*. — Die bezüglich $f:g$ noch vorhandene Zweideutigkeit verschwindet erst, wenn der Sinn des involutorischen Systems

$$\frac{p_1}{q_2} = \frac{q_1}{-p_2} = \frac{r_1}{\varepsilon s_2} = \frac{s_1}{-\varepsilon r_2} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

der sogleich definirt werden soll, *sowohl* mit dem Sinne, welcher nach Nr. 11. der complexen Ebene $p + qi = 0$, *als auch* mit dem, welcher der complexen Ebene $r + si = 0$ beizulegen ist, in Uebereinstimmung gebracht ist. Dann folgt $\varepsilon = +1$.

In der That ist die complexe Gerade (1) nicht schlechtweg durch das involutorische System (3) dargestellt, sondern es sind die auf den Leitstrahlen desselben befindlichen involutorischen Punktreihen, sowie die durch sie gelegten involutorischen Ebenenbüschel als in bestimmtem Sinne beschrieben anzusehen. Es entsteht nun die Frage, ob diese Bestimmungen, welche hier für jeden Leitstrahl des Systems (3) besonders aufgestellt werden, *auf dieses System selbst* übertragen werden können.

**13.** Zwei complexe Punkte $\xi_1 + \eta_1 i, \ldots \xi_4 + \eta_4 i$; $\xi_1' + \eta_1' i \ldots \xi_4' + \eta_4' i$ heissen in gleichem Sinne beschrieben in Beziehung auf eine Gerade:

$$(7) \qquad t \equiv \sum_r c_r x_r = 0, \quad u \equiv \sum_r d_r x_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3, 4),$$

die ihre reellen Träger nicht schneidet, wenn die durch jeden derselben und diese Gerade gelegten complexen Ebenen denselben Sinn darbieten (B. 52.). Die Gleichungen dieser Ebenen sind beziehentlich:

$$\begin{vmatrix} t, & u \\ t_1 + t_2 i, & u_1 + u_2 i \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} t, & u \\ t_1' + t_2' i, & u_1' + u_2' i \end{vmatrix} = 0,$$

wo $t_1$, $t_2$, $t_1'$, $t_2'$; $u_1 \ldots$ bez. die in den Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$ geschriebenen Ausdrücke $t$, $u$ bezeichnen. Nach Nr. 5. wird diesen Ebenen derselbe Sinn beigelegt, wenn die Ausdrücke

$$t_1 u_2 - u_1 t_2, \qquad t_1' u_2' - u_1' t_2'$$

gleiches Vorzeichen besitzen. Diese Grössen sind identisch mit

$$(8) \qquad \Sigma p_{rs} q_{rs}, \quad \Sigma p'_{rs} q_{rs}, \quad (r, s = 1, 2, 3, 4),$$

wo $p_{rs}$, $p'_{rs}$, $q_{rs}$ nacheinander die Coordinaten der reellen Träger der in Rede stehenden complexen Punkte und der Geraden (7) bezeichnen — und zwar in den Formen:

$$p_{rs} = \xi_r \eta_s - \eta_r \xi_s, \quad p'_{rs} = \xi'_r \eta'_s - \eta'_r \xi'_s, \quad q_{rs} = c_r d_s - d_r c_s.$$

Daraus ergiebt sich, *dass sämmtliche complexe Punkte* $p_1 + \omega p_2 i$ *etc.*

*der Geraden* (1) *in Beziehung auf sämmtliche Leitstrahlen des Systems* (3), d. i. die Geraden (4), *im gleichen Sinne beschrieben sind.* Denn man hat mit Rücksicht auf (3):

$$\Sigma p_{rs} q_{rs} = -R_1^2 - S_1^2,$$

wenn $R_1$, $S_1$ die Ausdrücke $R$, $S$, geschrieben in den Coordinaten $p_1$, $q_1$, $r_1$, $s_1$, bezeichnen.

Demnach ist der Sinn aller der Geraden (1) angehörigen complexen Punkte völlig bestimmt durch den *eines einzigen*; etwa des Punktes:

$$p + qi = 0, \quad r = 0, \quad s = 0.$$

*Es kann also für das involutorische System* (3) *in der That ein bestimmter Sinn aufgestellt werden,* welcher durch den Sinn einer der complexen Ebenen (1) angegeben wird.

Dem vorstehenden Satze steht dualistisch der folgende gegenüber: *Alle complexen Ebenen, welche die Gerade* (1) *enthalten, sind in Beziehung auf die Leitstrahlen des involutorischen Systems* (3) *in gleichem Sinne beschrieben.* Dies folgt aus dem Satze, dass die complexen Ebenen

$$\sum_r (a_r + a'_r i)\, x_r = 0, \quad \sum_r (b_r + b'_r i)\, x_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

auf der reellen Geraden

$$\sum_r c_r x_r = 0, \quad \sum_r d_r x_r = 0,$$

welche die reellen Axen derselben nicht schneidet, complexe Punkte von *gleichem* Sinne bestimmen, wenn die Determinanten

$$(9) \qquad | a_r, a'_r, c_r, d_r |, \quad | b_r, b'_r, c_r, d_r |, \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

*gleich bezeichnet* sind. — Der Beweis dieses Satzes wird auf dieselbe Weise geführt, wie der des analogen Satzes in der ebenen Geometrie (vergl. Nr. 6.).

Für die complexe Ebene

$$(10) \qquad (\alpha + \beta i)(p + qi) + (\gamma + \delta i)(r + si) = 0$$

und die Gerade (4) hat man demgemäss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \varkappa, & \lambda \\ -\beta, & \alpha, & \lambda, & -\varkappa \\ \gamma, & \delta, & \mu, & \nu \\ -\delta, & \gamma, & \nu, & -\mu \end{vmatrix}$$

zu entwickeln. Man findet sie gleich der negativen Summe zweier Quadrate, also stets gleich bezeichnet.

Es erhellt jetzt unmittelbar, dass die Gleichungen (1) durch zwei beliebige lineare Verbindungen derselben, wie (10), ersetzt werden können, *ohne dass ihre geometrische Bedeutung eine Aenderung erfährt.*

Das darstellende involutorische System bleibt das System (3). Sein Sinn stimmt jetzt mit dem der Ebene (10) überein, welcher in Beziehung auf alle Geraden (4) dem Sinne der Ebene $p + qi = 0$ gleichkommt; denn für die letztere Combination erhält die bezügliche Determinante (9) den Werth: $-\mu^2 - \nu^2$.

**14.** Der Sinn, welcher im Vorstehenden dem involutorischen Systeme (3) beigelegt worden ist, kann noch in einer anderen Weise definirt werden (B. 117.).

Eine involutorische Regelschaar ohne reelle Doppelstrahlen wird von jedem ihrer Leitstrahlen aus durch einen involutorischen Ebenenbüschel ohne reelle Doppelebenen projicirt. Es gilt also von dieser Regelschaar dasselbe, was von dem zu ihr perspectivischen Ebenenbüschel gilt: wenn die Geraden derselben in einem bestimmten Sinne aneinander gereiht werden, so folgen die conjugirten Geraden im gleichen Sinne aufeinander. *Es ergiebt sich also auch für eine involutorische Regelschaar ohne reelle Doppelstrahlen ein bestimmter Sinn, der durch die Aufeinanderfolge von 3 Geraden der Schaar definirt wird.* Umgekehrt, wird für diese Regelschaar ein bestimmter Sinn festgesetzt, so ist auch jeder der dazu perspectivischen Ebenenbüschel in *einem* Sinne beschrieben.

Untersuchen wir nun, ob es reelle Gerade giebt, welche von *allen* diesen Ebenenbüscheln in gleichlaufenden Punktreihen geschnitten werden. Es seien die Gleichungen der in Rede stehenden Regelschaar:

$$(11) \qquad P + kP' = 0, \qquad Q + kQ' = 0$$

und dem Strahle „$k$" immer der Strahl „$-\frac{1}{k}$" zugeordnet. Ferner möge der Sinn durch die Aufeinanderfolge der Strahlen $1$, $k'$, $\infty$ $(k' > 0)$ definirt sein. Die Leitstrahlen der Regelschaar (11) sind durch die Gleichungen

$$(11^*) \qquad P + lQ = 0, \qquad P' + lQ' = 0$$

dargestellt, wo $l$ alle reellen Werthe durchläuft; die zur Schaar (11) perspectivischen Ebenenbüschel sind somit:

$$(P + lQ) + k(P' + lQ') = 0.$$

Da in diesen Büscheln wieder die Ebenen „$k$" und „$-\frac{1}{k}$" einander conjugirt sind, so läuft die aufgeworfene Frage darauf hinaus, diejenigen Geraden $T = 0$, $U = 0$ zu bestimmen, welche von *allen* complexen Ebenen

$$(P + lQ) + (P' + lQ')i = 0$$

in Punkten von gleichem Sinne geschnitten werden. Sind $P$, $P'$, $Q$, $Q'$, $T$, $U$ in den Coordinaten $x$ bez. mit den Coefficienten $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $d$ geschrieben, so muss für die Geraden $T = 0$, $U = 0$ nach (9) die in $l$ quadratische Form

(12) $\quad | a_r + l b_r,\ a'_r + l b'_r,\ c_r,\ d_r | \quad (r = 1, 2, 3, 4)$

eine *definite* sein. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass

(13) $\quad 4\,(a a' c d)\,(b b' c d) - [(a b' c d) - (a' b c d)]^2 \geq 0.$

Das Zeichen der Form wird durch die gleichbezeichneten Determinanten $(a a' c d)$ und $(b b' c d)$ angegeben.

Es werden aber diejenigen Strahlen der Regelschaar (11), welche von der Geraden $T = 0$, $U = 0$ geschnitten werden, durch die Gleichung bestimmt:

(14) $\quad | a_r + k a'_r,\ b_r + k b'_r,\ c_r,\ d_r | = 0, \quad (r = 1, 2, 3, 4).$

Diese Strahlen sind also reell, wenn

$$4\,(a b c d)\,(a' b' c d) - [(a b' c d) + (a' b c d)]^4 \leq 0.$$

Dieser Ausdruck ist zufolge der bekannten Determinantenrelation (Baltzer, Det. p. 36):

(15) $\quad (a b c d)\,(a' b' c d) = (a a' c d)\,(b b' c d) + (a b' c d)\,(a' b c d)$

mit (13) identisch. — Man erhält also den Satz (B. 62.):

*Eine involutorische Regelschaar ohne reelle Doppelstrahlen besitzt einen bestimmten Sinn in Beziehung auf alle Gerade, welche entweder Leitstrahlen der Schaar sind oder die Regelfläche berühren oder endlich mit derselben keinen reellen Punkt gemein haben.*

Dieser Satz fällt mit dem ihm dualistisch gegenüberstehenden Satze zusammen. Man kann nämlich auch diejenigen Geraden $T = 0$, $U = 0$ aufsuchen, in Beziehung auf welche sämmtliche zur Regelschaar (11) perspectivische involutorische Punktreihen, deren Träger die Leitstrahlen (11*) der Schaar sind, denselben Sinn darbieten (Nr. 12.). Diese Punktreihen sind nach dem Vorstehenden nichts anderes, als die geometrischen Darstellungen der complexen Punkte:

$$Q + Q' i = 0, \quad P + l Q = 0, \quad P' + l Q' = 0.$$

Bezeichnet man die Coordinaten eines solchen Punktes mit $\xi_1 + \eta_1 i$ etc., ferner die (Axen-) Coordinaten der Geraden $Q = 0$, $Q' = 0$ und der Geraden (11*) beziehentlich mit $q_{rs}$, $Q_{rs}$, so hat man:

$$(16) \quad \begin{aligned} &\frac{\xi_1\eta_2 - \eta_2\xi_1}{Q_{34}} = \frac{\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3}{Q_{42}} = \frac{\xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4}{Q_{23}} \\ &= \frac{\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4}{Q_{12}} = \frac{\xi_4\eta_2 - \eta_4\xi_2}{Q_{13}} = \frac{\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3}{Q_{14}} = \frac{1}{\omega}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck (8) ein, so geht derselbe in

(17) $\quad \frac{1}{\omega}\,| a_r + l b_r,\ a'_r + l b'_r,\ c_r,\ d_r | \quad (r = 1, 2, 3, 4)$

über. Für die Punkte $\xi$, $\eta$ ist aber:

$$b_\xi - b'_\eta = 0, \qquad b_\eta + b'_\xi = 0,$$

wo $b_\xi$ den Ausdruck $Q$ geschrieben in den Coordinaten $\xi$ bedeutet etc.; also folgt:

$$\begin{vmatrix} b_\xi & b'_\xi \\ b_\eta & b'_\eta \end{vmatrix} = (b_\xi^2 + b'^2_\xi).$$

Nun findet man aus (16) unmittelbar:

$$\omega = \frac{q_{12}Q_{34} + \cdots\cdots + q_{23}Q_{14}}{b_\xi^2 + b'^2_\xi} = \frac{(aa'bb')}{b_\xi^2 + b'^2_\xi}.$$

Der Nenner $b_\xi^2 + b'^2_\xi$ kann als absolut positiv weggelassen werden.

Der Ausdruck (17) ist im Wesentlichen mit (12) identisch, wie sich von vornherein übersehen liess. Es ist aber von Vortheil, diesen Ausdruck genau zu kennen. Es folgt daraus z. B. unmittelbar der Satz (B. 64.): „Sind 2 Regelschaaren, von welchen jede die Leitschaar der anderen ist, in Hinsicht auf eine Gerade $T = 0$, $U = 0$ als *Strahl* (d. i. als Träger einer Punktreihe) in *einem und demselben Sinne* beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf die nämliche Gerade als *Axe* (d. i. als Träger eines Ebenenbüschels) in *entgegengesetztem Sinne* beschrieben.“

**15.** Wir kehren nun *zum involutorischen Systeme* (3) zurück. Durch irgend 2 einander entsprechende Gerade $a$, $a'$ dieses Systems sind zweifach unendlich viele involutorische Regelschaaren bestimmt, deren Strahlen einander paarweise in demselben zugeordnet sind. Sind die Gleichungen der Strahlen $a$, $a'$ bez. $R = 0$, $R' = 0$; $S = 0$, $S' = 0$ — wobei die $R$, $S$ dieselbe Bedeutung haben, wie in (4) — so ergeben sich für eine solche Regelschaar die Gleichungen:

(18) $$R + kR' = 0, \qquad \beta S - \alpha S' + k(\gamma S - \beta S') = 0$$

($\alpha$, $\beta$, $\gamma$ unbestimmte reelle Constante). Zugeordnet sind die Strahlen:

$$\alpha + \beta(k + k') + \gamma k k' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar der Satz (B. 108.): *Es enthält entweder die involutorische Regelschaar* (18) *oder die ebenfalls involutorische Schaar ihrer Leitstrahlen* 2 *reelle Doppelstrahlen.*

Ausser den Regelschaaren (18) ist durch die Strahlen $a$, $a'$ noch *eine* Regelschaar bestimmt, *die nur aus Leitstrahlen des Systems* (3) *besteht.* Da in diesem Falle die durch jede Gerade der Regelschaar und beziehentlich die Geraden $a$, $a'$ gelegten Ebenen einander im Systeme (3) entsprechen, so sind die Gleichungen der Regelschaar

(19) $$R + kR' = 0, \qquad S + kS' = 0.$$

Die dazu gehörige Leitschaar

(20) $$R + lS = 0, \qquad R' + lS' = 0$$

ist wieder involutorisch im Systeme (3) und zwar entspricht dem Strahle „$l$“ der Strahl „$-\frac{1}{l}$“.

Aus dem Satze in der vorhergehenden Nr. folgt nun unmittelbar, da sämmtliche Gerade (4) untereinander windschief sind, dass *jede*

involutorische Regelschaar (20) in Beziehung auf *alle* diese Gerade in einem bestimmten Sinne beschrieben sei. Aber noch mehr: Wenn für *alle* Regelschaaren (20) der Sinn bestimmt wird durch die Aufeinanderfolge von 3 Strahlen, *welche den nämlichen Werthen des Parameters* $l$ (z. B. $0$, $l' > 0$, $\infty$) *entsprechen*, so sind dieselben in Beziehung auf *alle* Geraden (4) in *gleichem* Sinne beschrieben (B. 115.). — Denn es ist leicht zu sehen, dass für alle Geraden (4) die definite Form (12) dasselbe Vorzeichen besitzt.

In dieser Art ist also der Sinn sämmtlicher Regelschaaren (20) in Beziehung auf sämmtliche Leitstrahlen des Systems (3) bestimmt durch den Sinn, welcher einer einzigen von ihnen, z. B.

(21) $$p + lq = 0, \qquad r + ls = 0$$

beigelegt wird. Da dieser Sinn in der Aufeinanderfolge der Strahlen $l = 0$, $l'$, $\infty$ enthalten sein soll, so wird er durch die complexe Ebene $p + qi = 0$ angegeben, welche geometrisch durch einen zur involutorischen Regelschaar (21) perspectivischen Ebenenbüschel dargestellt wird.

Wenn nun in Nr. 13. der Sinn des involutorischen Systems (3) durch den Sinn der complexen Ebene $p + qi = 0$ definirt worden ist, so kann dies jetzt auch geschehen vermittelst *des Sinnes irgend einer der Regelschaaren* (20), *der in der Aufeinanderfolge der Strahlen* $l = 0$, $l'$, $\infty$ *enthalten ist.*

Es mag noch bemerkt werden, dass *durch eine involutorische Regelschaar ohne reelle Doppelstrahlen, deren Leitstrahlen sich selbst zugeordnet sind, das involutorische System* (3) *völlig bestimmt ist.* (B. 104.). In der That ergeben sich sofort die Gleichungen (3) für diejenige collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme, durch welche die Strahlen „$l$" und „$-\frac{1}{l}$" der Regelschaar (21) einander und ausserdem die Leitstrahlen dieser Regelschaar:

$$p + kr = 0, \qquad q + ks = 0$$

sich selbst zugeordnet werden.

**16.** An die Gleichungen (20) schliesst sich der folgende Satz, der dem Schlusssatze von Nr. 2. entspricht (B. 118.).

Durch jedes Paar $a$, $a'$ einander entsprechender Geraden des involutorischen Systems (3), welche nicht zusammenfallen, ist eine und nur eine involutorische Regelschaar bestimmt, die dieses Paar als conjugirte Gerade enthält und deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems (3) sind. In dieser Regelschaar giebt es *nur ein einziges Paar conjugirter Strahlen* $b$, $b'$, *sodass das Doppelverhältniss* $(a\,a'\,b\,b')$ *gleich einem gegebenen Werthe* $(-\varrho^2)$ *sei und ausserdem der Sinn* $a\,b\,a'$ *mit dem Sinne des Systems* (3) *übereinstimme.* — Der Beweis dieses Satzes fällt mit dem des ebenerwähnten zusammen.

**17.** Die Ergebnisse der vorhergehenden Entwickelung (Nr. 14.—16.) lassen sich unmittelbar auf die *Liniengeometrie* übertragen. Die (Axen-) Coordinaten einer complexen Geraden

$$(22) \qquad \mathfrak{Q}_{r,s} = \alpha_{r,s} + \beta_{r,s} i \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

genügen, wie die einer reellen Geraden, der Identität 2[ten] Grades:

$$\mathfrak{Q}_{12}\mathfrak{Q}_{34} + \mathfrak{Q}_{13}\mathfrak{Q}_{42} + \mathfrak{Q}_{14}\mathfrak{Q}_{23} = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$(23) \qquad A = B \qquad C = 0;$$

wenn $A$, $B$ beziehentlich die Invarianten der linearen Complexe

$$(24) \qquad \Omega(q) \equiv \sum_{r,s} \alpha_{rs} q_{rs} = 0, \qquad \Omega'(q) \equiv \sum_{r,s} \beta_{rs} q_{rs} = 0$$

und $C$ ihre Simultan-Invariante bezeichnen.

Diese complexe Gerade wird *zu einer solchen von* 1[ter] *Art*, wenn $A = 0$, $B = 0$; denn unter dieser Voraussetzung schneidet dieselbe die complexe conjugirte Gerade $\alpha_{rs} - \beta_{rs} i$, was immer in einem reellen Punkte geschieht.

Die Gleichungen (23) besagen, dass die Gerade (22) dargestellt werde *durch die Congruenz der Complexe* (24), *welche gleich gewunden sind und in Involution stehen.* Diese Complexe bestimmen zusammen, d. h. dadurch, dass jedem Punkte des ersten eine Ebene des ersten, also auch ein Punkt des zweiten zugeordnet ist, ein involutorisches räumliches System genau von derselben Beschaffenheit, wie (3), d. i. ohne reelle, sich selbst entsprechende Punkte und Ebenen. Will man dies, was geometrisch an sich klar ist, auch in Formeln ausgedrückt sehen, so bezeichne man mit $P_{r,s}(Q_{r,s})$; $P^*_{r,s}$; $P'_{r,s}$ Strahlen (Axen-) Coordinaten von Geraden, von denen die erste und zweite in Beziehung auf den Complex $\Omega(q) = 0$, die zweite und dritte in Beziehung auf den Complex $\Omega'(q) = 0$ conjugirte Polaren sind. Man hat dann bekanntlich:

$$\varrho P^*_{r,s} = \alpha_{r,s} \Omega(Q) - A P_{r,s}$$

und durch nochmalige Anwendung dieser Formel wegen $C = 0$:

$$\sigma P'_{r,s} = B\alpha_{r,s} \Omega(Q) + A\beta_{r,s} \Omega'(Q) - AB P_{r,s},$$

welche Formel die einander involutorisch zugeordneten Geraden $P_{r,s}$, $P'_{r,s}$ darstellt.

Der *Sinn der complexen Geraden* (22) wird in derselben Art festgestellt, wie in Nr. 15., d. i. durch eine aus den Geraden der linearen Congruenz (24) gebildete Regelschaar, deren Leitschaar involutorisch ist. Will man mit den Annahmen von Nr. 13. und 14. in Uebereinstimmung bleiben, so hat man den Sinn der involutorischen Regelschaar, welche die Leitstrahlen der Regelschaar

$$\Omega(q) = 0 \quad \Omega'(q) = 0 \quad q_{34} = 0$$

umfasst, durch die Aufeinanderfolge der Geraden (in Axencoordinaten):

$$\alpha_{12} - \frac{A}{\alpha_{34}},\quad \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{34},\ \alpha_{42},\ \alpha_{23}$$

$$(\varrho' > 0)\quad \alpha_{12} + \varrho'\beta_{12} - \frac{A + \varrho'^2 B}{\alpha_{34} + \varrho'\beta_{34}},\quad \alpha_{13} + \varrho'\beta_{13},\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha_{23} + \varrho'\beta_{23}$$

$$\beta_{12} - \frac{B}{\beta_{34}},\quad \beta_{13},\ \beta_{14},\ \beta_{34},\ \beta_{42},\ \beta_{23}$$

zu definiren.

Als geometrische Darstellung einer *complexen Geraden* $\mathfrak{Q}_{r,s}$ *von* 1ter *Art* ergiebt sich hier, dadurch dass man an Stelle dieser Coordinaten bez. $(\varrho + \sigma i)\,\mathfrak{Q}_{r,s}$ setzt, unmittelbar der Inbegriff aller Strahlenpaare

$$q_{r,s} = \varrho\alpha_{r,s} - \sigma\beta_{r,s} \qquad q'_{r,s} = \sigma\alpha_{rs} + \varrho\beta_{rs},$$

welche offenbar in der Ebene der Geraden $\alpha_{r,s}$, $\beta_{r,s}$ liegen und durch den Durchschnittspunkt derselben gehen. Der Sinn ist definirt durch die Aufeinanderfolge der Geraden $\alpha_{r,s}$, $\alpha_{r,s} + \varrho'\beta_{r,s}$; $\beta_{r,s}$. $(\varrho' > 0)$.

Göttingen, 29. Juni 1871.

# Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche $3^{ter}$ Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält.

Von J. Diekmann in Göttingen.

Im Folgenden soll untersucht werden, in welcher Weise sich die bekannte Abbildung der Fläche $3^{ter}$ Ordnung auf der Ebene modificirt, wenn dieselbe einen Knotenpunkt erhält; mag derselbe ein gewöhnlicher conischer, ein biplanarer oder ein uniplanarer sein. Und zwar werden sämmtliche Arten von Knotenpunkten, deren Existenz Hr. Schläfli in seiner Abhandlung: On the Distribution of Surfaces of the third order into Species, in reference to the absence or presence of Singular Points. Philos. transact. of the Royal society. London 1863 pag. 207 ff. nachgewiesen hat, betrachtet werden. Es ergiebt sich dabei, dass bei dem Auftreten solcher Singularitäten von den 6 Fundamentalpunkten des ebenen Bildes mehrere eine specielle Lage gegeneinander erhalten, welche auch umgekehrt hinreicht, die Natur der betrachteten Fläche zu definiren.

Als Hülfsmittel der Untersuchung bediene ich mich einer geometrischen Interpretation der an die Grassmann'sche Erzeugungsweise angeknüpften Abbildung. Sie beruht darauf, dass die Fläche zunächst eindeutig auf das Sekantensystem einer ihrer Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung abgebildet wird, und von diesem sodann auf die Ebene. Diese Abbildungsweise bleibt auch bei den Flächen mit Singularitäten statthaft, und die Frage nach den verschiedenartigen Abbildungen, welche solche Flächen gestatten, ist dadurch zurückgeführt auf die Untersuchung der verschiedenen Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung, welche sie enthalten.

Ich werde zunächst die hiermit angedeutete geometrische Methode der Abbildung auseinandersetzen und mich dann der Untersuchung der oben aufgezählten Fälle zuwenden.

## § 1.

### Abbildung der allgemeinen Fläche $3^{ter}$ Ordnung auf die Ebene mittelst des Sekantensystems einer ihrer Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung.

Nach der Grassmann'schen Erzeugungsweise entsteht die Fläche $3^{ter}$ Ordnung als Ort der Durchschnittspunkte dreier projectivischer Ebenenbündel

$$S = \varkappa A + \lambda B + \mu C = 0$$
$$S' = \varkappa A' + \lambda B' + \mu C' = 0$$
$$S'' = \varkappa A'' + \lambda B'' + \mu C'' = 0\,.$$

Jedem Punkte der Fläche entspricht dabei eindeutig eine Ebene jedes der Bündel. Die Fläche ist also ohne Weiteres eindeutig durch jedes solches Bündel abgebildet. Macht man dann noch eine reciproke Umformung, welche von dem Bündel eindeutig zu den Punkten einer Ebene führt, so erhält man die gewöhnliche Abbildung der Fläche auf die Ebene; dieselbe, auf welche man geführt wird, indem man $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ als Dreieckscoordinaten in der Ebene interpretirt.

Zu derselben Abbildung gelangt man auch auf folgende Weise. Zwei der Bündel, etwa $S = 0$ und $S' = 0$, bestimmen bekanntlich die Sekanten einer Raumcurve 3ter Ordnung, welche auf der Fläche liegt. Jeder Sekante entspricht eindeutig einmal ein auf ihr liegender Punkt der Fläche, welcher von der zugehörigen Ebene des 3ten Bündels auf ihr bestimmt wird, andermal die durch sie gehende Ebene, welche einem der beiden Bündel, etwa $S = 0$, angehört. Statt nun die Fläche sofort auf dem Bündel $S = 0$ abzubilden, kann man ihre Punkte zunächst eindeutig auf jenes Sekantensystem beziehen und dann letzteres auf die Ebenen des Bündels. Es ist dann noch, um die Abbildung auf einer Ebene zu erhalten, wie oben eine reciproke Uebertragung erforderlich.

Diese Abbildung kann man nun folgendermassen geometrisch aussprechen. Man verzeichne auf der Fläche eine Raumcurve 3ter Ordnung und ordne jedem Punkte der Fläche die durch ihn gehende Sekante der Curve als Bild zu. Dass dieses ein eindeutiges Verfahren ist, ergiebt sich aus bekannten Eigenschaften der Raumcurven 3ter Ordnung. Das Sekantensystem bilde man sodann auf ein Ebenenbündel ab, dessen Scheitel auf der Curve liegt, indem man jeder Sekante die durch sie gehende Ebene des Bündels zuordnet. Auch dies ist eine eindeutige Operation, wie schon aus der Erzeugung des Sekantensystems als Ort der Durchschnittslinien zweier Bündel ersichtlich ist. Endlich übertrage man die Ebenen des Bündels reciprok auf die Punkte einer Ebene.

Dies ist die Abbildung, welche im Folgenden angewandt werden wird. Es kommt bei ihr nur darauf an, eine Raumcurve 3ter Ordnung auf der Fläche zu kennen, und werde ich im folgenden §. die bekannten Lagenverhältnisse der auf einer Fläche 3ter Ordnung existirenden Raumcurven 3ter Ordnung mit Bezug auf die oben entwickelte Vorstellungsweise kurz zusammenstellen.

Beiläufig sei schon hier bemerkt, was gelegentlich benutzt werden wird, dass man auf dieselbe Abbildung der Fläche auch folgender-

massen kommt. Man bilde die Fläche wie vorhin auf das Sekantensystem einer Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung ab, schneide dieses mit einer Ebene und wende auf die Punkte dieser Ebene eine quadratische Transformation an, welche als Fundamentalpunkte die Schnittpunkte der Ebene mit der Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt. Wollte man diese quadratische Transformation nicht anwenden, so würde man zwar auch eine eindeutige Abbildung erhalten, aber sie wäre nicht von der niedrigsten Ordnung; denn sie enthielte noch die 3 erwähnten Punkte als weitere Fundamentalpunkte. Die zu Grunde gelegte Raumcurve $3^{\text{ter}}$ Ordnung soll die *Projectionscurve* genannt werden.

## § 2.

## Die verschiedenen Classen von Raumcurven $3^{\text{ter}}$ Ordnung auf der Fläche und die gegenseitigen Beziehungen zwischen den an sie geknüpften Abbildungen.

In der ebenen Abbildung der Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung erscheinen die Bilder ebener Schnitte als Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit 6 einfachen Fundamentalpunkten. Die Fundamentalpunkte entstehen bei unserer Auffassung der Abbildung dadurch, dass 6 Sekanten der Projectionscurve ganz auf der Fläche liegen und also unendlich vielen Punkten der Fläche entsprechen.*) Bei der Abbildung des Sekantensystems auf das Ebenenbündel und weiterhin auf die Ebene treten keine weiteren Fundamentalelemente auf, sodass man schliesslich in letzterer 6 Fundamentalpunkte hat. Da diese einfache Fundamentalpunkte sein müssen, weil jede Ebene jede der Fundamentalsekanten nur einmal schneidet, so kann man hieraus bereits darauf schliessen, dass die Abbildung eines ebenen Schnittes durch eine Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung geschehen wird.

Die Geraden der Fläche $3^{\text{ter}}$ Ordnung bilden sich bekanntlich folgendermassen ab.

1) 6 Gerade durch die 6 Fundamentalpunkte (1, 2, 3, 4, 5, 6).

2) 6 Gerade durch die Kegelschnitte, welche je 5 jener Fundamentalpunkte enthalten (I, II, III, IV, V, VI).

3) 15 Gerade durch die Verbindungslinien der Fundamentalpunkte unter sich ($\overline{12}$, $\overline{13}$, .... $\overline{56}$).

Die 6 Geraden 1) und die 6 Geraden 2) bilden dabei eine derjenigen Combinationen von 12 Geraden, welche Hr. Schläfli als *Doppelsechs* bezeichnet hat. Solcher *Doppelsechsen* giebt es 36, und sie werden in der Abbildung durch folgende Typen repräsentirt:

*) Vergl. Schröter, Borchardt's Journal, Bd. 62.

$$1)\quad \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{VI} \end{array} \quad (\textit{eine}\ \text{Doppelsechs})$$

$$2)\quad \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \overline{56}, & \overline{64}, & \overline{45} \\ \overline{23}, & \overline{13}, & \overline{12}, & \mathrm{IV}, & \mathrm{V} & \mathrm{VI} \end{array} \quad (20\ \text{Doppelsechsen})$$

$$3)\quad \begin{array}{cccccc} 1, & \mathrm{I}, & \overline{23}, & \overline{24}, & \overline{25}, & \overline{26} \\ 2, & \mathrm{II}, & \overline{13}, & \overline{14}, & \overline{15}, & \overline{16} \end{array} \quad (15\ \text{Doppelsechsen}).$$

Zu jeder solcher Doppelsechs gehören 2 conjugirte Schaaren von Raumcurven 3ter Ordnung, deren jede die Linien einer Sechs zu Sekanten hat; 2 Curven aus conjugirten Schaaren bilden immer den vollständigen Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche 2ten Grades.

Den 36 Doppelsechsen entsprechend giebt es also 2 . 36 Schaaren von Raumcurven 3ter Ordnung und diese treten in der gewählten Abbildung folgendermassen auf:

1) Die zum ersten Typus gehörenden conjugirten Schaaren bilden sich ab als Curven 5ter Ordnung mit 6 Doppelpunkten (den Fundamentalpunkten) und als die Geraden der Ebene, die durch keinen Fundamentalpunkt gehen. Unter ersteren befindet sich insbesondere das Bild der Projectionscurve, welche die 6 Fundamentalsekanten je 2 mal schneidet.*)

2) Die zum 2ten Typus gehörigen conjugirten Schaaren bilden sich ab als Curven 4ter Ordnung, die 3 Fundamentalpunkte zu einfachen, die übrigen zu Doppelpunkten haben, und als Kegelschnitte durch die 3 ersten Fundamentalpunkte.

---

*) Wir wollen hierbei darauf hinweisen, dass wir hier ein geometrisches Bild davon haben, wie sich Curven vom Geschlechte $p = 0$ durch eindeutige Transformation auf eine Gerade abbilden lassen. Da sich Gerade und Curve 5ter Ordnung schneiden, so schliessen wir, dass auch ihre Bilder, die Raumcurven, sich schneiden. Legen wir nun durch irgend eine der gemeinschaftlichen Sekanten einen ebenen Schnitt, so trifft dieser die eine wie die andere Raumcurve nur noch in einem Punkte; wir können also die beiden Raumcurven durch ein Ebenenbüschel, welches durch eine ihrer gemeinschaftlichen Sekanten gelegt ist, aufeinander beziehen. Dem ebenen Büschel entsprechen aber in der Ebene Curven 3ter Ordnung, welche ausser den 6 Fundamentalpunkten noch durch die beiden Punkte gehen, welche Bilder derjenigen sind, durch die der Ebenenbüschel gelegt wurde. Die Curven 3ter Ordnung schneiden also die Curven 5ter Ordnung und die Gerade nur noch in einem beweglichen Punkte, sodass sich Punkte der Gerade und Punkte der Curve 5ter Ordnung eindeutig entsprechen. Wir haben hier eine Bestätigung des Satzes der Ebene: Curven vom Geschlechte $p = 0$ lassen sich durch ein Curvenbüschel $n - 2$ter Ordnung, welches durch $\frac{n-1 \,.\, n-2}{2}$ Doppelpunkte und $n - 3$ einfache gehen, eindeutig auf eine Gerade transformiren. Wir werden dieses auch bei allen folgenden Fällen bestätigt finden. Vergl. Clebsch, Borchardt's Journal Bd. 64, pag. 43.

3) Die zum $3^{ten}$ Typus gehörigen Schaaren bilden sich ab als 2 Schaaren Curven $3^{ter}$ Ordnung, welche 4 Fundamentalpunkte einmal enthalten und bezüglich den $5^{ten}$ oder $6^{ten}$ zum Doppelpunkte haben.

Die 2 . 36 Schaaren von Curven auf der Fläche sind völlig gleichberechtigt; die Projectionscurve kann beliebig aus einer derselben genommen werden.*) Dem entsprechend erhält man also 2 . 36 Classen von Abbildungen der Fläche. Dieselben hängen in der Weise zusammen, dass eine Vertauschung der Raumcurvenschaar, welcher die Projectionscurve angehört, mit einer anderen von einer Classe der Abbildung zu einer zweiten führt. Denkt man sich also die Flächen auf 2 Ebenen in 2 verschiedenen Arten abgebildet, so ist durch die Fläche eine eindeutige Beziehung zwischen diesen Ebenen, also eine Cremona'sche Transformation, gegeben; statt nun 2 Raumcurven auf der Fläche zu vertauschen, kann man nach der eindeutigen Beziehung dieser Ebenen zueinander fragen.

Diese Beziehung ist eine sehr einfache. Wie jede Cremona'sche Transformation sich aus quadratischen Transformationen zusammensetzen lässt, so ist auch obige Beziehung durch eine quadratische Transformation gegeben. Wir wählen in unserem Falle als Fundamentaldreiecke der quadratischen Transformation, Dreiecke, welche aus dreien der 6 Fundamentalpunkte gebildet werden. In der That sieht man, *dass jede solche quadratische Transformation der Bildebene eine neue Abbildung derselben Art liefert, bei der nur eine andere Raumcurvenschaar zu Grunde gelegt wurde; sowie auch weiter, dass man durch Wiederholung solcher Transformation aus einer Abbildungsart alle übrigen erhält.* Indem man z. B. eine Abbildung, welche zur ersten Sechs des Typus 1) gehört (also diejenige, an welche unsere Betrachtungen sich knüpfen), einer quadratischen Transformation unterwirft, dessen Fundamentalpunkte 4, 5, 6 sind, erhält man die der ersten des Typus 2) $(1, 2, 3, \overline{56}, \overline{64}, \overline{45})$ entsprechende Raumcurvenschaar; wendet man denselben Prozess mit Bezug auf die Punkte 1, 2, 4 nochmal an, so erhält man die der ersten Sechs des Typus 3) entsprechende Raumcurvenschaar. Auf dieselbe Weise gelangt man auch zu den resp. anderen Hälften der 3 Doppeltypen.

Diese Betrachtungen finden bei den speciellen Flächen, welche den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden, ebenso wie bei der allgemeinen Fläche ihre Anwendung. Aber die 72 Schaaren von Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung haben dann nicht mehr die nämliche Beziehung zur Fläche; man erhält also nicht 72 gleichartige Abbildungen,

*) In jeder Schaar sind Raumcurven, welche in 3 Gerade zerfallen. Indem man eine solche zu Grunde legt, erhält man die speciellere Art der Abbildung, welche Herr Clebsch in Borchardt's Journal Bd. 65, pag. 365 gegeben hat.

sondern dieselben bilden Gruppen von verschiedenartigem Charakter. Alle diese Abbildungsarten erhält man aus einer derselben durch Anwendung der Methode der quadratischen Transformation. Nun ist aber bei jenen Flächen *eine* Abbildung immer direct gegeben, nämlich die aus der Projection vom Knotenpunkt entstandene, und zwar ist diese, wie sich zeigen lässt, einer jener 72 Arten angehörig. Aus ihr werden wir also alle übrigen durch quadratische Transformation entwickeln können. Wie viele verschiedenartige Abbildungen man zu untersuchen hat, ergiebt sich aus der ersten Abbildung, indem man diejenigen Raumcurvenschaaren aufsucht, welche der Fläche gegenüber verschiedenartiges Verhalten zeigen. Dieses ist der Weg, der im Folgenden eingeschlagen werden soll.

## § 3.

## Modification der allgemeinen Abbildung durch Auftreten eines Knotenpunktes.

Es soll in diesem §. im Allgemeinen die Modification erörtert werden, welche die Abbildung der allgemeinen Fläche durch Auftreten eines Knotenpunktes erhält, wobei noch unentschieden bleiben mag, ob derselbe ein gewöhnlicher oder ein irgendwie particularisirter ist.

Wie bereits bemerkt, hat man in einem solchen Falle immer *eine* Abbildung der Fläche, indem man die Centralprojection vom Knotenpunkte anwendet. Wir zeigen zunächst, dass diese Abbildung denselben Typus besitzt, welcher oben entwickelt wurde. Zunächst bilden sich ebene Schnitte, wie leicht ersichtlich, als Curven $3^{ter}$ Ordnung ab; sie haben 6 Fundamentalpunkte gemein, entsprechend den 6 vierpunktig berührenden Tangenten, welche man im Knotenpunkte an die Fläche ziehen kann und welche hier, bei einer Fläche $3^{ter}$ Ordnung, ganz in derselben liegen müssen. Aber man kann auch zeigen, wie diese Abbildung aus der allgemeinen durch Degeneration eines Sekantensystems entsteht. Es finden sich unter den Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung in unserem Falle die durch den Knotenpunkt gehenden ebenen Schnitte, deren Fundamentalsekanten die durch den Knotenpunkt gehenden 6 Geraden sind. Das Sekantensystem einer in eine ebene Curve ausgearteten Raumcurve $3^{ter}$ Ordnung artet aber aus in die Geraden, welche durch den Knotenpunkt gehen und in das dreifach zählende System der in der Ebene der Curve enthaltenen Geraden, welche letztere hier nicht weiter in Betracht kommen. Die Abbildung der Fläche auf die Projectionsstrahlen des Sekantensystems geht hier also über in die auf die Strahlen, welche durch den Knotenpunkt gehen.

Nach dem Früheren müsste man nun dieses Strahlenbündel durch eine Ebene schneiden und deren Punktsystem quadratisch transformiren

in Bezug auf das Dreieck, in welchem die Projectionscurve 3ter Ordnung von der Ebene geschnitten wird. Hier aber liegen die Ecken des Dreiecks auf einer Geraden, und man kann zeigen, *dass die quadratische Transformation unter solchen Umständen in die lineare übergeht.* Sind nämlich in

$$P x_1' + Q x_2' + R x_3' = 0$$
$$P' x_1' + Q' x_2' + R' x_3' = 0$$

$P\,Q\,R$ und $P'\,Q'\,R'$ lineare Functionen von $x_1\,x_2\,x_3$, so ist unsere quadratische Transformation dadurch gegeben, dass sich die $x_i'$ verhalten, wie die Unterdeterminanten*) von $(P\,Q\,R)$, welches Kegelschnitte sind, die 3 gemeinschaftliche Schnittpunkte haben. Liegen diese auf einer Geraden $A$, so zerfallen die Kegelschnitte in diese Gerade und eine andere, so dass man erhält:

$$\varrho x_1' = (QR) = r_1 A$$
$$\varrho x_2' = (PR) = r_2 A$$
$$\varrho x_3' = (PQ) = r_3 A,$$

d. h.:

$$x_1' : x_2' : x_3' = r_1 : r_2 : r_3 .$$

Also ist hier die quadratische Transformation überflüssig, und die directe Projection ersetzt vollständig die gedachte Abbildung.

In dieser durch Centralprojection erhaltenen Abbildung werden wir nun in jedem besonderen Falle die Raumcurven 3ter Ordnung zu studiren haben, die auf der Fläche liegen. Dieselben können sich immer noch als *Gerade* (wenn sie 2mal durch den Knotenpunkt gehen, also ebene Curven sind), als *Kegelschnitte* (wenn sie einmal durch ihn gehen), als *Curven* 3ter Ordnung (wenn sie nicht durch den Knotenpunkt gehen) abbilden und sollen, dem entsprechend, als Curven I, Curven II, Curven III bezeichnet werden.

Die Anzahl der verschiedenen Schaaren ist hier nicht mehr 72, man gelangt vielmehr erst zu dieser Zahl wieder, wenn man denselben eine gewisse Multiplicität beilegt.

Man hat nun in Bezug auf jede dieser 3 Classen von Raumcurven 3ter Ordnung die Abbildung der Fläche zu suchen. Für die erste ist sie durch die Centralprojection gegeben; 2 andere Classen von Abbildungsarten werden wir also durch Anwendung einer quadratischen Transformation aufzusuchen haben. In besonderen Fällen können die in einer Classe enthaltenen Abbildungsarten Verschiedenheiten

---

*) Vergl. Cayley: A memoir on the rational Transformation between two Spaces. Extracted from the Proceedings of the London mathem. Society. London 1870, pag. 155.

zeigen und müssen dann einzeln aufgeführt werden (§ 6.). In anderen Fällen kommen ganze Abbildungsclassen in Wegfall.*)

## § 4.

## Die Fläche 3ter Ordnung mit einem conischen Knotenpunkte.
(Schläfli 2.)

Die Abbildung durch Centralprojection ergiebt in diesem Falle 6 auf einem Kegelschnitt gelegene Fundamentalpunkte, wobei der Kegelschnitt das Bild des Knotenpunktes ist. Analytisch stellt sich die Abbildung folgendermassen. Die Gleichung der Fläche, deren Knotenpunkt in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ liegt, hat die Gestalt**):

$$x_4 f_2(x_1, x_2, x_3) - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo $f$ und $\varphi$ Functionen vom 2ten und 3ten Grade sind. Setzen wir $\varrho x_1 = \sigma \xi_1$, $\varrho x_2 = \sigma \xi_2$, $\varrho x_3 = \sigma \xi_3$, $\sigma = f(\xi_1, \xi_2, \xi_4)$, so bekommen wir die mit der Gleichung der Fläche äquivalenten Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \xi_1 f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_2 &= \xi_2 f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_3 &= \xi_3 f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_4 &= \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

Für den Kegelschnitt $f = 0$ verschwinden nur $x_1, x_2, x_3$ mit Ausnahme der 6 Punkte $f = 0$, $\varphi = 0$, wofür die Verhältnisse der sämmtlichen $x_i$ unbestimmt werden, und also Gerade darstellen. Wir bekommen mithin umgekehrt den Satz:

*Wenn die 6 Fundamentalpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, so ist der Kegelschnitt das Bild eines Punktes der Oberfläche und zwar eines conischen Knotenpunktes.*

Die Geraden, welche sich als Kegelschnitte durch 5 Fundamentalpunkte abbildeten, fallen mit dem Fundamentalkegelschnitt zusammen, oder, wie wir uns ausdrücken wollen, die Geraden des Knotenpunktes zählen zweifach. Die übrigen 15 Geraden bilden sich als Verbindungslinien der 6 Fundamentalpunkte ab.

In dieser Abbildung treten die Raumcurven 3ter Ordnung, welche auf der Fläche liegen, folgendermassen auf:

---

*) In der beigegebenen Tafel sind die Lagen der in den verschiedenen Abbildungen der zu betrachtenden Fälle auftretenden Fundamentalpunkte dargestellt; die Zahlen der ersten Columne sind die Zahlen, durch welche bei Schläfli die abgebildeten Flächen bezeichnet sind.

**) Vergl. Clebsch, Borchardt's Journal Bd. 65, p. 378.

| | | |
|---|---|---|
| *Curven I.* | Die geraden Linien der Ebene. Dieselben zählen zweifach, insofern die Curven $5^{ter}$ Ordnung mit 6 Doppelpunkten, welche in der Abbildung der allgemeinen $F_3$ früher auftraten, indem sich von ihnen 2 mal der Fundamentalkegelschnitt abgesondert hat, ebenfalls in Gerade übergegangen sind . | 2 . 1 Schaaren |
| *Curven II.* | Die Kegelschnitte, welche durch 3 Fundamentalpunkte gehen. Auch diese zählen zweifach, da mit ihnen die Curven $4^{ter}$ Ordnung mit 3 Doppelpunkten, welche früher auftraten, indem sich der Fundamentalkegelschnitt einmal absondert, zusammenfallen . . . . . . . . . . . | 2 . 20 Schaaren |
| *Curven III.* | Curven $3^{ter}$ Ordnung durch 5 Fundamentalpunkte, wovon einer ein Doppelpunkt ist | 30 Schaaren |
| | | $\Sigma = 72$ Schaaren. |

Es giebt also dreierlei Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung auf der Fläche, daher auch 3 Abbildungsarten. Eine der I. als Projectionscurve zu Grunde gelegt, ergeben, wie im vorigen §. gezeigt, eben die Centralprojection.

Wendet man auf diese Abbildung eine quadratische Transformation an, wobei die Ecken des Fundamentaldreiecks in 3 Fundamentalpunkte fallen, so gehen die Curven I. in Curven II. über und umgekehrt, und wir erhalten also dann die auf die Curven II. bezügliche Abbildung. Aus dem die 6 Fundamentalpunkte enthaltenden Kegelschnitte wird dabei eine gerade Linie, welche 3 Fundamentalpunkte enthält.

*Unter Zugrundelegung der Curven II. bildet sich die $F_3$ ab mit 6 Fundamentalpunkten, von denen 3 auf einer Geraden liegen. Die Gerade ist das Bild des Knotenpunktes.*

Durch gehörige Wahl des Coordinatendreiecks lässt sich den betr. Abbildungsfunctionen die Gestalt geben:

$$\varrho x_1 = A \,.\, \xi_1 \xi_2$$
$$\varrho x_2 = A \,.\, \xi_1 \xi_3$$
$$\varrho x_3 = A \,.\, \xi_2 \xi_3$$
$$\varrho x_4 = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

wo $A$ die Gerade mit den 3 Fundamentalpunkten bedeutet, sodass die ebenen Schnitte in der Gestalt

$$F = A(a\,\xi_1 \xi_2 + b\,\xi_1 \xi_3 + c\,\xi_2 \xi_3) + \lambda \varphi = 0$$

enthalten sind. Für jeden Punkt $A$ verschwindet $x_1 x_2 x_3$ mit Aus-

nahme der drei $A = 0$, $\varphi = 0$, welche Gerade darstellen. Die ebenen Schnitte, welche durch den Knotenpunkt gehen, sind dargestellt durch Kegelschnitte, welche durch die Ecken des Coordinatendreiecks gehen. Sie schneiden die $A$ zweimal, mithin ist der durch $A$ dargestellte Punkt in der That ein Knotenpunkt. Wir bekommen den Satz:

*Wenn 3 Fundamentalpunkte auf einer Geraden liegen, so ist die Gerade das Bild eines Knotenpunktes.*

Die Raumcurven 3ter Ordnung treten dabei folgendermassen auf:

| | | |
|---|---|---|
| *Curven I.* | Kegelschnitte, welche durch die 3 nicht in einer Geraden liegende Fundamentalpunkte gehen . . . . . . . . . . | 2 . 1 Schaaren |
| *Curven II.* | | |
| a) | Gerade Linien . . . . . . . . . . . | 2 . 1 Schaaren |
| b) | Curven 3ter Ordnung durch 5 Fundamentalpunkte, von denen einer ein Doppelpunkt ist | 2 . 9 Schaaren |
| c) | Curven 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten | 2 . 1 Schaaren |
| d) | Kegelschnitte durch 3 Fundamentalpunkte | 2 . 9 Schaaren |
| *Curven III.* | | |
| a) | Kegelschnitte durch 3 Fundamentalpunkte | 9 Schaaren |
| b) | Curven 3ter Ordnung mit 5 Fundamentalpunkten, wovon einer ein Doppelpunkt . | 12 Schaaren |
| c) | Curven 4ter Ordnung mit 3 Doppelpunkten | 9 Schaaren |
| | | $\Sigma = 72$ Schaaren. |

Was die Geraden der Oberfläche anbetrifft, so sind:

A. Gerade, welche durch den Knotenpunkt gehen:

| | | |
|---|---|---|
| a) | Die 3 Fundamentalpunkte auf der Geraden 1, 2, 3 | 2 . 3 |
| b) | Gerade $(\overline{56}, \overline{64}, \overline{45})$ . . . . . . . . . . . . | 2 . 3 |

B. Gerade, welche nicht durch den Knotenpunkt gehen:

| | | |
|---|---|---|
| a) | Die 3 übrigen Fundamentalpunkte (4, 5, 6) . . | 3 |
| b) | Kegelschnitte (I, II, III) . . . . . . . . | 3 |
| c) | Gerade $(\overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{24}, \ldots \overline{36})$ . . . . . . | 9 |
| | | $\Sigma = 27.$ |

Um zu der 3ten Abbildung zu gelangen, wählen wir als Ecken des Fundamentaldreiecks 3 Punkte, von denen 2 auf der Geraden $A$ liegen. Dann vertauschen sich bei der quadratischen Transformation die Curven II a) mit III a) und wir erhalten dann die gewünschte Abbildung mit Bezug auf letztere. Man findet:

*Unter Zugrundelegung einer der Curven III. erhält die Abbildung der Fläche 6 Fundamentalpunkte, von denen 2 unendlich nahe liegen.*

Legen wir eine Ecke des Coordinatendreiecks in die beiden unendlich nahen Punkte $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, so lautet die Gleichung einer

ebenen Curve, welche durch die 4 Fundamentalpunkte geht und $\xi_1$ im Punkte $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ zur Tangente hat:

$$\xi_1 \varphi_2 (\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \xi_2 (a \xi_2^2 + b \xi_2) = 0.$$

Unsere Abbildungsfunctionen werden:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \xi_1 \varphi_1 + a \xi_2^3 \\ \varrho x_2 &= \xi_1 \varphi_2 + b \xi_2^2 \\ \varrho x_3 &= \xi_1 \varphi_3 \\ \varrho x_4 &= \xi_1 \varphi_4 \end{aligned}$$

Setzen wir $\xi_1 = 0 + \varepsilon \xi_1'$; $\xi_2 = 0 + \varepsilon \xi_2'$; $\xi_3 = \text{const.}$, so wird, wenn wir nach $\varepsilon$ entwickeln und zur Grenze übergehen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \xi_1' \varphi_1 (0, 0, \xi_3) \\ \varrho x_2 &= \xi_1' \varphi_2 (0, 0, \xi_3) \\ \varrho x_3 &= \xi_1' \varphi_3 (0, 0, \xi_3) \\ \varrho x_4 &= \xi_1' \varphi_4 (0, 0, \xi_3). \end{aligned}$$

Von welcher Seite wir uns also auch dem Punkte $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ nähern, stets verhalten sich die $x_i$ wie ganz bestimmte Grössen, so lange $\xi_1'$ nicht verschwindet. Mit $\xi_1'$ verschwinden alle $x_i$ und wir sehen also, dass die Tangente $\xi_1 = 0$, als Verbindungslinie der beiden unendlich nahen Punkte eine Gerade der Oberfläche darstellt, wir können sagen:

*Der Ort der beiden unendlich nahen Punkte stellt insofern den Knotenpunkt dar, als jede Richtung, welche nicht mit der Verbindungslinie der beiden consecutiven Punkte zusammenfällt, einen Durchgang durch den Knotenpunkt darstellt.**)

Die Raumcurven 3ter Ordnung der Oberfläche treten folgendermassen auf, wenn (11) die beiden unendlich nahen Punkte sind.

*Curven I.*

a) Curven 3ter Ordnung mit 6 Fundamentalpunkten, von denen (11) ein Doppelpunkt ist, dessen einer Zweig die Tangentenrichtung $\overline{11}$ hat . . . . . . . . . . . 2.1 Schaaren

*) Dass der dargestellte Punkt ein Knotenpunkt ist, erhält man dadurch, dass man untersucht, wie viel Schnittpunkte von 2 ebenen Schnitten, die durch jenen Punkt der Oberfläche gehen, den $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ darstellt, in das Bild dieses Punktes, die beiden unendlich nahen, hineinfallen. Man findet 2. Es sei für derartige Punkte noch weiter bemerkt: wenn 2 Curven in ihnen eine dreipunktige Berührung haben, so heisst das, die entsprechenden Curven schneiden sich auf der Fläche auf der durch den Punkt dargestellten Geraden; haben sie 4 Punkte miteinander gemein, so berühren sich die entsprechenden Curven auf der Geraden etc.

*Curven II.*

a) Kegelschnitte durch 3 Fundamentalpunkte . 2 . 6 Schaaren

b) Curven 3ter Ordnung durch 5 Fundamentalpunkte etc. . . . . . . . . . . . 2 . 8 Schaaren

c) Curven 4ter Ordnung mit 6 Fundamentalpunkten, von denen 3 Doppelpunkte sind . 2 . 6 Schaaren

*Curven III.*

a) alle Gerade der Ebene . . . . . . . 1 Schaar

b) Kegelschnitte, welche durch 3 Fundamentalpunkte gehen . . . . . . . . . . 8 Schaaren

c) Curven 3ter Ordnung, welche die Richtung (11) enthalten und durch 3 andere Fundamentalpunkte gehen, von denen sie einen zum Doppelpunkte haben . . . . . . . 12 Schaaren

d) Curven 4ter Ordnung mit 6 Fundamentalpunkten, von denen 3 Doppelpunkte sind . 8 Schaaren.

Unter letzteren sind 4, welche in den beiden unendlich nahen Fundamentalpunkten 2 sich berührende Zweige haben. Diese Singularität zählt für 2 Doppelpunkte, da sie aus 2 consecutiven Doppelpunkten entstanden ist.

e) Curven 5ter Ordnung mit 4 Doppelpunkten in den Fundamentalpunkten, mit 2 in den beiden unendlich nahen Punkten sich berührenden Zweigen . . . . . . . . . . 1 Schaar

$\Sigma = 72.$

Was die Geraden der Oberfläche anbetrifft, so sind:

*Gerade* A.

a) Der Punkt (11).

b) $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$.

c) Der Kegelschnitt, welcher durch 4 Fundamentalpunkte geht und durch den Ort der beiden unendlich nahen.

*Gerade* B.

a) $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{35}$, $\overline{45}$, $\overline{11}$,

b) Kegelschnitte II, III, IV, V,

c) Punkte 2, 3, 4, 5.

Fassen wir zusammen, so haben wir 3 Abbildungsarten unserer Fläche gefunden, welche durch folgende Lage der Fundamentalpunkte charakterisirt sind:

1) *Die* 6 *Punkte liegen auf einem Kegelschnitt*;

2) 3 *auf einer Geraden*;

3) 2 *unendlich nahe.*

## § 5.

## Fläche $3^{ter}$ Ordnung und $9^{ter}$ Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 3.)

Ein specieller Fall des vorigen ist der, wo der gewöhnliche conische Knotenpunkt in einen sogenannten biplanaren Knotenpunkt ausartet. Der Kegel des Knotenpunktes $f_2(x_1, x_2, x_3)$ aus der Gleichung der Fläche

$$x_4 f_2(x_1, x_2, x_3) - \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

zerfällt dann in 2 Ebenen.

Die Abbildung dieser Oberfläche können wir leicht aus vorigem Falle herleiten. Nehmen wir wieder eine ebene Curve mit wirklichem Doppelpunkt zur Projectionscurve, so wird der Knotenpunkt wieder wie vorhin abgebildet durch alle Sekanten des Doppelpunktes, welche dort die Oberfläche berühren. Der Unterschied ist nur der, dass diese Tangenten des Knotenpunktes nicht, wie beim gewöhnlichen, einen Kegel $2^{ten}$ Grades bilden, sondern 2 Ebenen, die Tangentialebenen des biplanaren Knotenpunktes. Im Uebrigen wird auch hier unsere Abbildung zur Centralprojection.

Sie ergiebt 6 *Fundamentalpunkte, welche zu je drei auf 2 Geraden liegen.* Jede Gerade ist das Bild des Knotenpunktes, je nachdem man sich demselben auf der einen oder anderen Schale der Fläche nähert. Der Schnittpunkt beider Geraden kennzeichnet die Richtung, welche im biplanaren Punkte von der Durchschnittslinie der beiden Tangentialebenen eingenommen ist. Nennen wir die beiden Geraden $A$ und $B$, so erhalten wir als Abbildungsfunctionen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= A \,.\, B \,.\, \xi_1 \\ \varrho x_2 &= A \,.\, B \,.\, \xi_2 \\ \varrho x_3 &= A \,.\, B \,.\, \xi_3 \\ \varrho x_4 &= \varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \,. \end{aligned}$$

Sowohl für $A = 0$ als auch für $B = 0$ verschwindet $x_1 x_2 x_3$, sodass jene beiden Linien einen Punkt der Oberfläche darstellen. Die durch jenen Punkt gelegten ebenen Schnitte bilden sich als Gerade ab; sie werden von dem Bilde jenes Punktes 2 mal geschnitten, woraus folgt, dass sie auf der Oberfläche dort einen Doppelpunkt haben, mithin jener Punkt ein Knotenpunkt ist.

Die Geraden der Fläche gruppiren sich folgendermassen:

*Geraden* A. Die 6 Fundamentalpunkte (1, 2, 3, 4, 5, 6) dreifach zählend.

*Geraden* B. Die 9 Verbindungslinien ($\overline{14}$, $\overline{15}$, . . . . . . $\overline{36}$).

Curven $3^{ter}$ Ordnung giebt es wie im vorigen Falle 3 Arten.

| | | |
|---|---|---|
| *Curven I.* | Die Geraden der Ebene, sechsfach zählend | 6 . 1 Schaaren |
| *Curven II.* | Kegelschnitte durch 3 Fundamentalpunkte, dreifach zählend . . . . . . . . . . | 3 . 18 Schaaren |
| *Curven III.* | Curven 3ter Ordnung durch 5 Fundamentalpunkte, wovon einer ein Doppelpunkt . | 1 . 12 Schaaren |
| | | $\Sigma = 72.$ |

Was die Multiplicität der Curven anbetrifft, so lässt sie sich leicht aus voriger Abbildung herleiten. Beispielsweise zählten die Geraden der Ebene in voriger Abbildung zweifach. Jetzt zerfallen auch noch 2 Schaaren von Kegelschnitten, die dort zweifach zählten, in Gerade, sodass hier die Geraden der Ebene in der That sechsfach zählen.

Um die Abbildung zu erhalten mit Bezug auf eine Curve II., legen wir einer quadratischen Transformation ein Dreieck zu Grunde, dessen Ecken 3 nicht auf einer Geraden gelegene Fundamentalpunkte sind. Die eine Gerade, auf welcher nur eine Ecke liegt, bleibt eine solche, die andere wird zum Punkte, in dessen Nähe, nur eine Richtung bestimmend, der dritte auf dieser Geraden befindliche Fundamentalpunkt rückt. Da letztere Gerade ($B$) von der ersteren ($A$) geschnitten wird, so muss jetzt die neue Gerade $A$ durch die Richtung der beiden, $B$ entsprechenden, unendlich nahen Fundamentalpunkte gehen*). Wir bekommen folgende Abbildung:

*Eine Gerade A, auf der* 2 *getrennte* (2, 3) *und* 2 *zusammenfallende Fundamentalpunkte* (1) *liegen; letztere so, dass ihr Ort von der Geraden geschnitten wird. Die Gerade A, sowie jede Richtung durch den Ort der beiden consecutiven Punkte stellen den Knotenpunkt dar* (vergl. die Tafel 3, II).

*Ebene Schnitte, die durch den Knotenpunkt gehen, bilden sich ab als Kegelschnitte, welche den Ort der beiden unendlich nahen Punkte schneiden und durch die beiden Fundamentalpunkte gehen, welche nicht auf A liegen.* Sie schneiden das Bild des Knotenpunktes 2 mal, stellen also Curven mit Doppelpunkten dar.

*Ebene Schnitte, die sich dort berühren, stellen Curven mit Rückkehrpunkten dar.*

Was die Geraden der Oberfläche anbetrifft, so sind:

*Geraden* A. (1), 2, 3, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{45}$.

*Geraden* B. 4, 5; $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{34}$, $\overline{35}$, ($\overline{11}$)

und die Kegelschnitte II. und III.

*) Dies Alles ergiebt sich auch auf analytischem Wege, wenn man von der Gleichung der Oberfläche ausgehend, die Abbildungsfunctionen aufstellt und dann die bewusste quadratische Transformation anwendet. Der Einfachheit wegen glaubten wir uns auf dieses geometrische Raisonnement beschränken zu dürfen.

Bezeichnen wir dann mit (11), dass eine Curve die beiden $\infty$ nahen Punkte enthält, und bezeichnen wir dadurch, dass wir einen Punkt zweimal schreiben, dass eine Curve im entsprechenden Punkte einen Doppelpunkt hat, so sind die Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung durch folgende Tabelle gegeben, wobei der angehängte Index den Grad der Curve bezeichnen soll:

| Bild | | Fundamentalpunkte. | Schaaren. |
|---|---|---|---|
| *Curven I.* | $C_2$ | (1), 4, 5 . . . . . . . . | 6 . 1 |
| *Curven II.* | $C_1$ | . . . . . . . . . . . . . | 3 . 1 |
| | $C_2$ | (11), 4 . . . . . . . . . | 3 . 2 |
| | $C_2$ | (1), 2, 4 . . . . . . . . | 3 . 4 |
| | $C_2$ | 2, 4, 5 . . . . . . . . | 3 . 2 |
| | $C_3$ | (11), 44, 2, 5 . . . . . | 3 . 4 |
| | $C_3$ | (11) (1), 2, 4, 5 . . . . | 3 . 2 |
| | $C_3$ | (1), 2, 3, 44, 5 . . . . . | 3 . 2 |
| | $C_4$ | (11) (1), 44, 55, 2, 3 . . | 3 . 1 |
| *Curven III.* | $C_2$ | (11), 2 . . . . . . . . . | 2 |
| | $C_2$ | 2, 3, 4 . . . . . . . . . | 2 |
| | $C_3$ | (11), 22, 4, 5 . . . . . | 2 |
| | $C_3$ | (11), 44, 2, 3 . . . . . | 2 |
| | $C_4$ | (11) (11), 44, 2, 3, 5 . . | 2 |
| | $C_4$ | (11), 22, 44, 55, 3 . . . | 2 |
| | | | $\Sigma = 72.$ |

Wenn wir endlich eine Curve III als Projectionscurve zu Grunde legen wollen, so nehmen wir zu Ecken des Transformationsdreieckes die Punkte 2, 3, 4. Die Gerade $A$ geht dann in einen Punkt über, in dessen Nähe auch die beiden $\infty$ nahen Punkte (11) rücken, welche vor der Transformation noch auf $A$ lagen. Wir bekommen demnach 3 $\infty$ nahe Punkte als das Bild des biplanaren Knotenpunktes. Diese 3 $\infty$ nahen Punkte sind aber consecutiv, d. h. liegen noch auf einem Curvenstück. Die ebenen Curven $3^{ter}$ Ordnung, welche in voriger Abbildung durch alle Fundamentalpunkte gingen und in (11) eine feste Tangente hatten, werden auch hier wieder Curven $3^{ter}$ Ordnung, jedoch so, dass sie 3 consecutive Punkte (111) gemein haben (vergl. die Tafel 3, III). Man überzeugt sich hiervon leicht durch folgende Betrachtung. Die Gleichung einer Curve $3^{ter}$ Ordnung, welche durch

die Ecken des Coordinatendreieckes geht $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und in einem Punkte von $x_1 = 0$ eine feste Tangente hat, lautet:

$$\text{(I)} \qquad x_2 x_3 A + x_1 x_3 (x_1 + \lambda A) + x_1 x_2 (x_1 + \mu A) = 0 .$$

Machen wir die Transformation:

$$\varrho x_i = y_j y_k$$

nachdem wir für $A$ seinen Werth $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ gesetzt haben, so wird:

$$0 = \{\alpha_1 y_2 y_3 + \alpha_2 y_1 y_3 + \alpha_3 y_1 y_2\} (y_1 + y_2 + y_3) + y_2 y_3 (\lambda y_3 + \mu y_2).$$

Ordnen wir nach $y_2 y_3$, so wird:

$$0 = (\alpha_2 y_3 + \alpha_3 y_2) y_1^2 + y_2 y_3 (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 y_1)$$
$$+ y_2^2 y_1 + y_3^2 y_1 + y_2 y_3 (\lambda y_3 + \mu y_2).$$

Wir sehen also, dass die Curven dieser Schaar bis auf Glieder 3ter Dimension von $\lambda$ und $\mu$ unabhängig sind. Wir folgern, dass die Curven, welche durch quadratische Transformation aus (I) entstehen, sich in $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ dreipunktig berühren. Durch Aufstellung der Abbildungsfunctionen gelangen wir leicht zu dem Satze:

*Der biplanare Knotenpunkt ist dargestellt durch drei unendlich nahe Punkte, welche consecutiv sind; so zwar, dass jede Richtung, welche den Ort der 3 consecutiven Punkte nicht ganz enthält, ein Durchgehen durch den Knotenpunkt auf der Oberfläche abbildet.*

Ebene Schnitte, welche durch den Knotenpunkt gehen, bilden sich ab als Curven 3ter Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte gehen, und in dem Orte der 3 consecutiven Punkte einen Doppelpunkt haben, dessen einer Zweig eine constante Tangente hat. Enthält letzterer auch noch den 3ten consecutiven Punkt, so besitzt die Curve auf der Oberfläche einen Rückkehrpunkt im biplanaren Knotenpunkte, wie es uns auch bei voriger Abbildung schon entgegentrat.

Was die Geraden der Oberfläche anbetrifft, so sind:

*Geraden* A. a) der Punkt (111),
b) die Geraden $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, und die Tangente des Ortes $(\overline{11})$,
c) der Kegelschnitt (11) 2 3 4.

*Geraden* B. a) die Punkte 2, 3, 4,
b) die Geraden $\overline{34}$, $\overline{42}$, $\overline{23}$,
c) die Kegelschnitte durch (111) 3 4; (111) 4 2; (111) 2 3.

Die Curven 3ter Ordnung werden:

| Bild. | | Fundamentalpunkte. | Schaaren. |
|---|---|---|---|
| *Curven I.* | $C_3$ | (11) 1, 2, 3, 4 . . . . | 6 . 1 |
| *Curven II.* | $C_2$ | 1, 2, 3 . . . . . . . . | 3 . 3 |
| | $C_2$ | (11), 2 . . . . . . . . | 3 . 3 |
| | $C_3$ | (11), 22, 3, 4 . . . . . | 3 . 3 |
| | $C_3$ | (111) 1, 2, 3 . . . . . | 3 . 3 |
| | $C_4$ | (111) 1, 22, 33, 4. . . . | 3 . 3 |
| | $C_4$ | (111) (11), 22, 3, 4*) . . | 3 . 3 |
| *Curven III.* | $C_1$ | . . . . . . . . . . . | 1 |
| | $C_2$ | (111) . . . . . . . . | 1 |
| | $C_2$ | 2, 3, 4 . . . . . . . | 1 |
| | $C_3$ | (111), 22, 3 . . . . . | 6 |
| | $C_4$ | (111), 22, 33, 44 . . . . | 1 |
| | $C_4$ | (111) (111), 2, 3, 4 . . . | 1 |
| | $C_5$ | (111) (111), 22, 33, 44 . . | 1 |
| | | | $\Sigma = 72$ |

Sonach haben wir hiermit die Abbildung des biplanaren Knotenpunktes erschöpft. Es giebt 3 Abbildungen, bei denen bezüglich die Fundamentalpunkte folgendermassen liegen:

1) *zu je 3 auf 2 Geraden.*

2) *2 consecutiv, deren Ort von einer Geraden geschnitten wird, auf der noch 2 Fundamentalpunkte liegen; die übrigen irgend wie discret.*

3) *3 Fundamentalpunkte consecutiv und 3 discret.*

## § 6.

### Die Fläche 3ter Ordnung und 8ter Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 5.)

Diese Oberfläche unterscheidet sich von der vorigen dadurch, dass die beiden Tangentialebenen des biplanaren Knotenpunkts die Oberfläche nicht mehr in je 3 Linien schneiden, sondern dass hier 2 derselben in die Durchschnittslinie der beiden Tangentialebenen $x=0$, $y=0$ fallen.

*) Vergl. pag. 453. Curven III, d.

Diese Linie wollen wir mit Herrn Schläfli *Axe* der Oberfläche nennen. Sie gehört ganz derselben an und die Gleichung der Oberfläche muss für $x = 0$ derart verschwinden, dass das übrigbleibende durch $y$ theilbar wird, also die Gleichung zweier Geraden übrig bleibt, worin $x = 0$ die Oberfläche ausser der Axe noch schneidet. Wir erhalten also die Abbildung durch Centralprojection ganz aus der vorigen, wenn wir die beiden Geraden $A$ und $B$ sich so schneiden lassen, dass ein Fundamentalpunkt von jeder Geraden $\infty$ nahe in ihren Schnittpunkt rückt; dass sich, mit andern Worten, die beiden Geraden in 2 zusammenfallenden Punkten (11) schneiden, während auf der einen noch die Fundamentalpunkte 2 und 3, auf der andern 4 und 5 liegen.

Machen wir die Geraden zu Seiten des Coordinatendreieckes, so erhalten wir als Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1^2 y_2\\
\varrho x_2 &= y_1 y_2^2\\
\varrho x_3 &= y_1 y_2 y_3\\
\varrho x_4 &= (y_1 + y_2)(y_3^2 - a y_1^2 - b y_2^2).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind mit der Gleichung der Oberfläche aequivalent, und für $y_1 = 0$ sowohl, als auch für $y_2 = 0$, verschwinden $x_1$, $x_2$, $x_3$, was die Coordinaten des Knotenpunktes giebt. Wir können also sagen: *Jede der Linien $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ stellt mit Ausnahme der Fundamentalpunkte den biplanaren Knotenpunkt dar.*

Die ebenen Schnitte, welche nicht durch den Knotenpunkt gehen, bilden sich ab als Curven $3^{ter}$ Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte gehen und in $y_1 = 0$ $y_2 = 0$ eine feste Tangente $y_1 + y_2 = 0$ haben.

Der Punkt $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ als solcher stellt die Axe dar. Setzen wir aber $y_1 = \lambda y_2$, so verschwinden für $\lambda = 0$ nur $x_1$, $x_2$, $x_3$, d. h. *nähern wir uns dem Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ in irgend einer Richtung, welche von der der Tangente verschieden ist, so bedeutet das auf der Oberfläche einen Durchgang durch den biplanaren Knotenpunkt.*

Setzen wir aber $\lambda = -1$, d. h. nähern wir uns dem Punkte auf der Tangente, so wird $x_4 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$; d. h. *die Tangente stellt eine Gerade der Oberfläche dar, welche nicht durch den Knotenpunkt geht, aber die Axe schneidet.*

*Geraden* A sind die Axe (11) sechsfach zählend und die Punkte 2, 3, 4, 5, vierfach zählend.

*Geraden* B $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{34}$, $\overline{35}$.

Die Raumcurven $3^{ter}$ Ordnung treten folgendermassen auf:

| Bild. | | Fundamentalpunkte. | Schaaren. |
|---|---|---|---|
| *Curven I.* | $C_1$ | . . . . . . . . . . . | 24 . 1 |
| *Curven II.* | $C_2$ | 2, 3, 4 . . . . . . . . | 3 . 4 |
| | $C_2$ | (11), 2 . . . . . . . . | 4 . 4 |
| | $C_2$ | (1) 2, 4 . . . . . . . . | 4 . 4 |
| *Curven III.* | $C_3$ | (11) 22, 4, 5 . . . . . | 1 . 4 |
| | | | $\Sigma = 72.$ |

Was die Multiplicität der Curven anbetrifft, so ergiebt sie sich aus voriger Abbildung in bekannter Weise. Eine besondere Bemerkung indessen verdienen die Curven II.

Diese theilen sich nämlich in 3 gegen die Oberfläche sich verschieden verhaltende Schaaren, indem sich auch Curven III. pag. 455 in Curven II. und gerade Linien gespalten haben. Je nachdem wir also eine aus diesen Curven II. zu Grunde legen, werden wir 3 Modificationen der 2ten Abbildung bekommen. Da jedoch die Behandlung der 3 auf dieselbe Methode herauskommt, so werden wir uns auf eine beschränken, und die übrigen historisch anführen.

Wir wählen demnach zu Ecken eines Transformationsdreiecks die Punkte 2, 3, 4. Die Seite $\overline{23}$ geht dann durch quadratische Transformation in einen Punkt über, in dessen Nähe auch noch der auf ihr liegende Punkt (11) rückt. Die Gerade $\overline{45}$ geht wieder in eine Gerade über, worauf ein Fundamentalpunkt liegt. Die Gerade $\overline{45}$ wurde aber von $\overline{23}$ in den beiden zusammenfallenden Punkten (11) geschnitten, wird also in dieser Abbildung zur Tangente an den Ort der 3 zusammenfallenden Punkte. Wir bekommen demnach folgendes Arrangement der Fundamentalpunkte. 3 *Fundamentalpunkte werden consecutiv und* 2 *von ihnen bestimmen eine Tangente, worauf noch* 1 *Fundamentalpunkt liegt; die übrigen liegen irgendwie discret* (vergl. die Tafel). Unsere Behauptung lautet:

*Die feste Tangente sowohl als auch der Ort der* 3 *consecutiven Punkte ist das Bild des biplanaren Knotenpunktes.*

Denn formen wir die Abbildungsfunctionen S. 459 auf das jetzt gewählte Coordinatendreieck um, so wird:

$$\varrho x_1 = y_1^2(y_2 + y_3)$$
$$\varrho x_2 = y_1(y_2 + y_3)^2$$
$$\varrho x_2 = y_1(y_2 + y_3)(y_1 + y_3)$$
$$\varrho x_4 = (y_1 + y_2 + y_3)(\lambda y_1 y_3 + \mu y_2 y_3).$$

Machen wir jetzt die quadratische Umformung:

$$\varrho y_i = \xi_j \xi_k ,$$

so wird:

$$\varrho x_1 = (\xi_3 + \xi_2)\, \xi_2 \xi_3$$
$$\varrho x_2 = (\xi_3 + \xi_2)\, (\xi_1 \xi_3 + \xi_1 \xi_2)$$
$$\varrho x_3 = (\xi_3 + \xi_2)\, (\xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_2)$$
$$\varrho x_4 = (\mu \xi_1 + \lambda \xi_2)\, (\xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3 + \xi_1 \xi_2) .$$

Wir sehen sofort, dass die ebenen Schnitte eine feste Tangente $\xi_2 + \xi_3 = 0$ haben, die ausserdem noch den Punkt $\xi_2 + \xi_3 = 0$, $\xi_1 + \sigma \xi_2 = 0$ enthält; ebenso ist ersichtlich, dass diese Curven in $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ eine dreipunktige Berührung haben.

Die feste Tangente $\xi_2 + \xi_3 = 0$ ist das Bild des biplanaren Knotenpunktes. Setzen wir $\xi_2 = \lambda \xi_3$, so verschwinden für $\xi_2 = 0$ oder $\xi_3 = 0$ nur $x_1$, $x_2$, $x_3$. *Ein Schneiden des Ortes der 3 consecutiven Punkte bildet also ein Durchgehen durch den Knotenpunkt ab.* Wenn eine Curve den Ort ganz enthält, wie z. B. die ebenen Schnitte, so bedeutet das nur ein Schneiden der Linie, welche der Punkt $\xi_2 = 0$ $\xi_3 = 0$ als solcher darstellt. Und zwar ist dieser Punkt das Bild der Axe. Es sind dargestellt:

*Geraden* A. Durch (111) als Bild der Axe; durch $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{34}$ und Punkt 2.

*Geraden* B. Punkte 3 und 4;

Linien $\overline{23}$, $\overline{24}$ und den Kegelschnitt, welcher durch (111) und durch die Punkte 3 und 4 bestimmt ist.

Der Kürze halber wollen wir die Raumcurven übergehen, da sie sich leicht durch Transformation aus den vorigen ergeben.

Wir haben noch anzuführen, welche Abbildung herauskommt, wenn wir die beiden andern Schaaren aus den Curven II. als Projectionscurven zu Grunde legen. Der einen entspricht als Transformationsdreieck das Dreieck (1), 2, 4, der andern das zusammenfallende Dreieck (11), 2.

Im ersten Falle erhalten wir als Abbildung der Fläche:

*Zweimal rücken zwei Punkte einander $\infty$ nahe; auf der Verbindungslinie ihrer Oerter liegt noch ein weiterer Fundamentalpunkt, während ein letzter irgendwo discret davon liegt. Die Gerade, wie auch der Ort der consecutiven Punkte stellen in bekannter Weise den Knotenpunkt dar* (vergl. die Tafel 5, $\text{II}_b$.).

Im andern Falle bekommen wir als Abbildung:

*3 consecutive Punkte, deren Orte von einer Geraden geschnitten werden, auf der noch 2 Fundamentalpunkte liegen, während 1 weiterer irgendwo getrennt davon liegt. Die Gerade, wie auch der Ort der consecutiven Punkte ist das Bild des Knotenpunktes* (vergl. die Tafel 5, $\text{II}_c$.).

Es erübrigt uns jetzt noch eine der Curven III. als Projectionscurve zu Grunde zu legen, die also nicht durch den biplanaren Knotenpunkt geht. Der einzige Kegelschnitt, welcher durch 3 Fundamentalpunkte möglich ist, ohne durch den Knotenpunkt zu gehen, ist der, welcher den Ort der 3 consecutiven Punkte enthält (S. 459). Wir wählen also diese, welche ein zusammenfallendes Dreieck bilden, als Transformationsdreieck. In kanonischer Form heissen die quadratischen Transformationsformeln in Bezug auf solche 3 consecutive Punkte:

$$\varrho x_1 = y_1^2$$
$$\varrho x_2 = y_1 y_2$$
$$\varrho x_3 = y_2^2 - y_1 y_3 \text{*)},$$

wobei also Geraden Kegelschnitte entsprechen, die sich dreipunktig berühren. Durch diese Transformation gehen aber die 3 consecutiven Punkte wieder in 3 consecutive Punkte über**); da aber auf der Geraden $x_1$ noch ein Fundamentalpunkt lag, so rückt dieser nach der Transformation noch zu den ersten 3 consecutiven Punkten, so dass wir hier 4 consecutive Punkte bekommen. Analytisch ergiebt sich dieses, wenn wir die Abbildungsfunctionen (S. 459) auf das vorliegende Coordinatendreieck umformen. Wir kommen leicht zu dem Satze: *Jede Curve, welche von dem Orte der 4 consecutiven Punkte weniger als 4 Punkte enthält, stellt auf der Oberfläche eine Curve dar, welche durch den Knotenpunkt geht.*

Bezeichnen wir den Ort der 4 consecutiven Punkte mit (1111), die beiden übrigen Fundamentalpunkte mit 2, 3, so sind:

*Geraden* A. Der Punkt (1111) und die Verbindungslinien $\overline{12}$, $\overline{13}$; ferner die Tangente an den Ort $(\overline{11})$; und der Kegelschnitt, der durch 3 der consecutiven Punkte und durch die Punkte 2 und 3 geht.

*Geraden* B. Die Fundamentalpunkte 2 und 3; ihre Verbindungslinie $\overline{23}$ und die beiden Kegelschnitte, welche durch alle 4 consecutiven Punkte und einen der beiden Fundamentalpunkte 2 und 3 gehen.

Fassen wir die Abbildungen dieser Oberfläche noch einmal zusammen, so bekommen wir:

*I. 2 Gerade, auf denen je 2 Fundamentalpunkte liegen, schneiden sich in dem Orte zweier $\infty$ nahen Fundamentalpunkte.*

---

*) Vergl. Cayley, Rational Transformation between two Spaces (Extracted from the Proceedings of the London Mathem. Society). London 1870.

**) ibid.

*II. a)* 3 *Fundamentalpunkte sind consecutiv und auf ihrer Tangente liegen noch* 2 *Fundamentalpunkte;* 2 *andere liegen irgendwo getrennt.*

*b) Zweimal* 2 *consecutive Fundamentalpunkte liegen auf einer Geraden, die noch einen dritten Fundamentalpunkt isolirt enthält; ein anderer liegt irgendwo getrennt.*

*c)* 3 *Fundamentalpunkte sind consecutiv und werden von einer Geraden geschnitten, auf der noch* 2 *einzelne Fundamentalpunkte liegen; eine andere liegt isolirt davon.*

*III.* 4 *consecutive Fundamentalpunkte und* 2 *irgendwo getrennt liegend.*

## § 7.

## Die Fläche 3ter Ordnung und 7ter Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 7.)

Ist der biplanare Knotenpunkt so beschaffen, dass die $x$-Ebene die Oberfläche *längs der Axe* berührt, so schneidet diese Tangentialebene des Knotenpunktes die Oberfläche nur noch in einer Geraden. Es rückt von den beiden Geraden des einen Mantels des biplanaren Knotens eine in die Axe, während die beiden Geraden des andern Mantels, welche von der $y$-Ebene ausgeschnitten werden, bleiben. Die Oberfläche hat ausserdem nur noch 2 einfache Linien, die nicht durch den Knotenpunkt gehen. Wir erhalten die Abbildung dieses Knotenpunktes aus voriger, wenn wir noch einen Fundamentalpunkt auf einer der beiden Geraden, welche den biplanaren Knoten darstellen, $\infty$ nahe an ihren Durchschnitt rücken lassen. Die Centralprojection ergiebt eben *im Durchschnitt der beiden Geraden* 3 *consecutive Punkte; und zwar liegen* 2 *von ihnen auf der einen Geraden, die ausserdem noch einen einzelnen Fundamentalpunkt enthält; auf der andern Geraden liegen noch* 2 *getrennte Fundamentalpunkte.* (In der Tafel 7, I.)

Als Abbildungsgleichungen bekommen wir, wenn die beiden Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sind:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1^2 x_2 \\ \varrho y_2 &= x_1 x_2^2 \\ \varrho y_3 &= x_1 x_2 x_3 \\ \varrho y_4 &= x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_1^3, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von $\varrho$ und $x$ die Gleichung der Fläche:

$$y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3^2 + y_2^2 y_3 - y_1^3 = 0$$

resultirt.

Es verschwindet $y_1 y_2 y_3$ sowohl für $x_1 = 0$, als für $x_2 = 0$, so dass wir *in den beiden Geraden das Bild des biplanaren Knotenpunktes bekommen.* Setzen wir ferner $x_2 = \lambda x_1$, so verschwindet für $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ nur $y_1 y_2 y_3$, woraus folgt, *dass eine Richtung durch den*

*Ort der 3 zusammenfallenden Punkte einen Durchgang durch den biplanaren Knoten abbildet.*

Die Gleichung des Bildes eines ebenen Schnittes, der nicht durch den Knotenpunkt geht, ist gegeben in der Form:

(I) $0 = \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1 x_2 x_3 + \delta \left\{x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_1^3\right\}$,

d. i. eine dreifach $\infty$ Schaar von Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $x_1 = 0$ in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zur Tangente haben, und sich dort dreipunktig berühren. Um Letzteres zu beweisen, können wir von folgendem Gedanken ausgehen. Ist $\varphi_n = 0$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche im Punkte $p = 0$, $q = 0$ $p$ zur Tangente hat, ist ferner $\varphi_n' = 0$ eine Curve, welche sich nur in den Coefficienten von $\varphi_n = 0$ unterscheidet, so ist $\varphi_n - \varphi_n' = 0$ eine Curve, welche $\varphi_n = 0$ im Punkte $p = 0$, $q = 0$ dreipunktig berührt, wenn: $\varphi_n - \varphi_n' = p \cdot q \cdot \psi_{n-2}$ ist.

Denn $p = 0$ hat mit $\varphi_n$ 2 Punkte gemein und $q$ einen, mithin ist $\varphi_n - \varphi_n'$ eine Curve, die mit $\varphi_n$ in $p = 0$, $q = 0$ 3 Punkte gemein hat. Hier ist:

$$\varphi = \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1 x_2 x_3 + \delta \left\{x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_1^3\right\},$$

ziehen wir von ihr $\varphi'$ mit den Coefficienten $\alpha'$, $\beta'$, etc. ab, so bleibt:

$$\varphi - \varphi' = x_1 x_2 \left\{a x_1 + b x_2 + c x_3\right\} = \psi = 0$$

eine Curve, welche mit $\varphi = 0$ 3 Punkte in $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gemein hat, woraus folgt, dass $\varphi = \varphi' + \psi$ eine dreifach $\infty$ Schaar von Curven ist, welche im Punkte $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ sich dreipunktig berühren.

Bezeichnen wir die 3 consecutiven Punkte mit (111), die übrigen mit 2, 3, 4, so sind:

*Geraden* A. Der Punkt (111) als Bild der Axe und die Punkte 2, 3, 4.

*Geraden* B. Die Linien $\overline{23}$ und $\overline{34}$.

Was die Raumcurven $3^{\text{ter}}$ Ordnung anbetrifft, so sind sie in folgender Tabelle enthalten, worin der vorgesetzte Factor in der letzten Colonne die Multiplicität anzeigt.

| Bild. | | | Fundamentalpunkte. | Schaaren. |
|---|---|---|---|---|
| *Curven I.* | | $C_1$ | . . . . . . . . . . . | 31 . 1 |
| *Curven II.* | a) | $C_2$ | 2, 3, 4 . . . . . . . . | 4 . 1 |
| | b) | $C_2$ | (1), 2, 4 . . . . . . . | 7 . 1 |
| | | $C_2$ | (1), 2, 3 . . . . . . . | 7 . 1 |
| | c) | $C_2$ | (11), 3, . . . . . . . | 8 . 1 |
| | | $C_2$ | (11), 4 . . . . . . . | 8 . 1 |
| | d) | $C_2$ | (111) . . . . . . . . | 5 . 1 |
| *Curven III.* | | | (111) 33, 2 . . . . . . . | 1 . 2 |

$\Sigma = 72$.

Wie wir sehen, treten bei den *Curven II.* 4 Arten auf, die ein verschiedenes Verhalten gegen die Fläche zeigen. Je nachdem wir eine dieser als Projectionscurve nehmen, werden wir auch 4 verschiedene *Abbildungen* II. bekommen. Wählen wir zunächst die erste Art, zu der das Dreieck 2, 3, 4 als Transformationsdreieck gehört. Auf dieses als Coordinatendreieck bezogen lautet die Gleichung eines ebenen Schnittes:

$$0 = \alpha(x_1 - x_3)^2 x_2 + \beta(x_1 - x_3) x_2^2 + \gamma (x_1^2 - x_3^2) x_2 \\ + \delta \{(x_1 - x_3) [2x_1x_3 + x_2x_3] + x_2^2 x_1\}.$$

Machen wir nun die Substitution:

$$\varrho x_i = y_j y_k,$$

so wird:

$$0 = \alpha(y_1 - y_3)^2 y_2 + \beta (y_1 - y_3) y_1 y_3 + \gamma (y_1^2 - y_3^2) y_2 \\ + \delta \{(y_1 - y_3) y_2 [2y_2 + y_1] - y_3^2 y_1\}$$

d. i. aber die Gleichung einer dreifach $\infty$ Schaar von Curven 3ter Ordnung, welche $y_1 - y_3 = 0$ zur Wendetangente haben und in $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ sich vierpunktig berühren. Denn es ist:

$$\varphi - \varphi' = (y_1 - y_3) [a(y_1 - y_3) y_2 + b y_1 y_3 + c(y_1 + y_3) y_2] = 0$$

eine Curve, welche mit $\varphi$ 4 Punkte in $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ gemein hat.

Wir haben also jetzt den biplanaren Knotenpunkt dargestellt *durch* 4 *consecutive Punkte, von denen* 3 *auf einer Geraden liegen, welche mit dem Orte der* 4 *consecutiven Punkte das Bild des biplanaren Knotenpunktes ist.* (In der Tafel 7, $\text{II}_a$.)

Unsere Abbildungsgleichungen werden nämlich:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= (y_1 - y_3)^2 y_2 \\ \varrho x_2 &= (y_1 - y_3) y_1 y_3 \\ \varrho x_3 &= (y_1^2 - y_3^2) y_2 \\ \varrho x_4 &= (y_1 - y_3)(2y_2 + y_1) y_2 - y_3^2 y_1, \end{aligned}$$

welche sofort ergeben, *dass die Wendetangente* $y_1 - y_3 = 0$ *das Bild des biplanaren Knotenpunktes ist, und dass jede Richtung* $y_1 = \lambda y_3$ *eine Richtung durch denselben darstellt.*

Was die übrigen Arten der Abbildung II. anbetrifft, so wollen wir eine derselben zur Behandlung herausnehmen, und zwar, da wir schon eine Transformation mit Bezug auf ein Dreieck von 3 consecutiven Punkten gemacht haben, diejenige, bei der 1 Dreieck mit 2 zusammenfallenden Ecken auftritt, d. i. die Curve $\text{II}_c$. mit dem Transformationsdreieck (11), 3. Nennen wir die Seite, auf der die beiden $\infty$ nahen Ecken (11) liegen, $x_1$, die Seite $\overline{34}$ $x_2$, und eine Linie, welche $x_1$ und $x_2$ schneidet, $x_3$, so lautet die Gleichung eines ebenen Schnittes, auf das Dreieck $x_1 x_2 x_3$ bezogen:

$$\varphi = \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1 x_2 x_3 + \delta \left\{x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3\right\} = 0 .$$

Lassen wir dann einer Geraden den Kegelschnitt:

$$a y_2^2 + b y_1 y_2 + c y_1 y_3 = 0$$

entsprechen, d. h. machen wir die Substitution:

$$\varrho x_1 = y_2^2$$
$$\varrho x_2 = y_1 y_2$$
$$\varrho x_3 = y_1 y_3 \text{*)},$$

so geht $\varphi$ über in:

$$\Phi = \alpha y_1^3 + \beta y_1 y_2^2 + \gamma y_1 y_2 y_3 + \delta \left\{y_1 y_3^2 + y_1^2 y_3 + y_2^2 y_3\right\} = 0,$$

d. i. aber die Gleichung einer dreifach $\infty$ Schaar von Curven, welche sich (wovon man sich auf dieselbe Weise wie vorhin überzeugt) im Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ dreipunktig berühren und dort eine feste Tangente $y_1 = 0$ haben. Ausserdem ist noch $y_3 = 0$ Tangente im Punkte $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, und auf $y_2 = 0$ liegt noch 1 einfacher Fundamentalpunkt $y_2 = 0$, $y_1 + y_3 = 0$.

*Wir bekommen demnach folgendes Arrangement der Fundamentalpunkte. Zunächst bestimmen 2 von 3 consecutiven Punkten eine Richtung $y_1 = 0$. Ausserdem haben wir noch 2 $\infty$ nahe Punkte, welche eine Tangente $y_3 = 0$ bestimmen. Auf der Verbindungslinie dieser beiden singulären Oerter $y_2$ liegt noch 1 einfacher Fundamentalpunkt.* (In der Tafel 7, $\text{II}_b$.)

Unsere Abbildungsfunctionen werden:

$$\varrho x_1 = y_2^3$$
$$\varrho x_2 = y_1 y_2^2$$
$$\varrho x_3 = y_1 y_2 y_3$$
$$\varrho x_4 = y_1 y_3^2 + y_1^2 y_3 + y_2^2 y_3 .$$

Wie wir daraus sehen, ist die Gerade $y_2 = 0$ das Bild des Knotenpunktes. Ferner ist der Ort der 3 consecutiven Punkte das Bild des biplanaren Knotenpunktes; und zwar in derselben Weise, wie wir derartige Oerter schon mehrfach discutirt haben. Erst für $y_1 = \lambda y_1^2$ verschwinden mit $y_1 = 0$ alle $x$, so dass die 3 consecutiven Punkte als solche eine Gerade der Oberfläche darstellen.

Ganz auf demselben Wege gelangen wir auch zu den andern beiden Arten der Abbildung II. *Legen wir die Curve* (1), 2, 4, *zu Grunde, so erhalten wir* 3 *consecutive Punkte, deren Tangente den Ort zweier andern zusammenfallenden Punkte trifft; ein anderer Fundamentalpunkt liegt einzeln. Bild des Knotenpunktes ist die Gerade und der Ort der* 3 *consecutiven Punkte.* (In der Tafel 7, $\text{II}_c$.)

---

*) Vergl. Cayley a. a. O. pag. 154.

Legen wir schliesslich die Curve (111) zu Grunde, *so erhalten wir 4 consecutive Punkte, deren Ort von der Verbindungslinie zweier anderen Fundamentalpunkte getroffen wird. Der Ort der 4 consecutiven Punkte wie auch die Gerade ist das Bild des biplanaren Knotenpunktes.* (In der Tafel 7, $\mathrm{II}_a$.)

Es erübrigt uns jetzt noch eine der *Curven III* als Projectionscurve zu Grunde zu legen. Wir haben zu dem Ende eine der Abbildungen II aufzuführen, in der sich die *Curven III* als Kegelschnitte abbilden, die durch 3 Fundamentalpunkte gehen. Am einfachsten macht sich das bei der Abbildung, wo wir eine Curve (1), 2, 4, zu Grunde legten. Dann ist eine Curve 3ter Ordnung, die nicht durch den Knotenpunkt geht, abgebildet durch einen Kegelschnitt, der den Ort der 3 consecutiven Punkte ganz enthält. Machen wir dieses zusammenfallende Dreieck zum Fundamentaldreieck einer quadratischen Transformation, so reproduciren sich bekanntermassen die 3 consecutiven Punkte. Da aber auf der einen Seite des Dreiecks (der Tangente des Ortes) noch 2 zusammenfallende Punkte liegen, so rücken dieselben nach der Transformation auch noch an den Ort der 3 consecutiven Punkte. Wir bekommen mithin in Bezug auf eine der *Curven III* als Abbildung der Fläche 5 *consecutive und einen einzelnen Fundamentalpunkt. Der Ort der 5 consecutiven Punkte ist das Bild des biplanaren Knotenpunktes.* (In der Tafel 7, III.)

Bezeichnen wir die 5 consecutiven Punkte mit (11111), so sind die Geraden der Oberfläche:

*Geraden* A. Der Punkt (11111), die Verbindungslinie $\overline{(1)\ 2}$, die Tangente des Ortes $(\overline{11})$, und der Kegelschnitt (1111), 2.

*Geraden* B. Der Punkt 2, und der Kegelschnitt (11111).

Was die Raumcurven anbetrifft, deren Aufstellung wir übergehen, so wollen wir nur darauf hinweisen, dass sich die Bilder der *Curven I* aus erster Abbildung hier mit den Bildern der *Curven III* vertauscht haben, wie es sein muss.

Fassen wir die Abbildung dieser Fläche noch einmal zusammen, so erhalten wir:

I. *Zwei Gerade schneiden sich in dem Orte dreier consecutiven Punkte, die eine ist Tangente des Ortes und enthält noch einen Fundamentalpunkt, die andere noch 2 Fundamentalpunkte.*

II. a) 4 *consecutive Punkte, von denen 3 auf einer Geraden liegen, und 2 einzelne Fundamentalpunkte.*

b) 3 *consecutive Punkte und 2 zusammenfallende Punkte sind durch die Tangente des Ortes der 3 consecutiven Punkte verbunden;* 1 *einzelner Fundamentalpunkt.*

c) 2 *zusammenfallende Punkte sind mit* 3 *consecutiven Punkten durch eine Gerade verbunden, auf der noch* 1 *einzelner Fundamentalpunkt liegt.*

d) 4 *consecutive Punkte werden von der Verbindungslinie zweier einzelner Fundamentalpunkte geschnitten.*

III. 5 *consecutive Punkte und* 1 *einzelner Fundamentalpunkt.*

## § 8.

## Die Fläche 3ter Ordnung und 6ter Classe mit einem biplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 11.)

Diese Oberfläche entsteht aus der vorigen, wenn die eine Tangentialebene des Knotenpunktes die Oberfläche längs der Axe osculirt. Die andere Tangentialebene schneidet die Oberfläche ausser in der Axe noch in 2 Linien. Die Centralprojection ergiebt 2 in 4 consecutiven Punkten (1111) sich schneidende Gerade; 3 der consecutiven Punkte liegen auf der einen Geraden; die andere Gerade enthält noch 2 getrennte Fundamentalpunkte 2 und 3. (In der Tafel 11, I.)

Nennen wir die eine Gerade $x_1$, die andere $x_2$, so werden die Abbildungsfunctionen:

$$\begin{aligned}\varrho y_1 &= x_1^2 x_2\\ \varrho y_2 &= x_1 x_2^2\\ \varrho y_3 &= x_1 x_2 x_3\\ \varrho y_4 &= x_1 x_3^2 - x_1^3 + x_2^3.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass sowohl $x_1 = 0$ als auch $x_2 = 0$ den biplanaren Knotenpunkt darstellen. Das Bild der Axe, die für 15 einfache Gerade der Oberfläche zählt, ist der Punkt (1111).

Ebene Schnitte, welche nicht durch den Knotenpunkt gehen, sind abgebildet durch die dreifach $\infty$ Curvenschaar 3ter Ordnung:

$$\varphi = \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1 x_2 x_3 + \delta \left\{x_1 x_3^2 - x_1^3 + x_2^3\right\} = 0,$$

die alle eine gemeinschaftliche Wendetangente $x_1 = 0$ haben und sich im Punkte $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ vierpunktig berühren. Denn ziehen wir eine Curve $\varphi' = 0$ ab, so bleibt:

$$\Psi = x_1 (a x_1 x_2 + b x_2^2 + c x_2 x_3) = 0,$$

welche mit $\varphi$ im Punkte $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ 4 Punkte gemein hat.

Was die Geraden der Oberfläche anbetrifft, so sind:

*Geraden* A. Der Punkt (1111) als Bild der Axe fünfzehnfach zählend; die Punkte 2 und 3 je für 6 einfache Gerade zählend.

*Geraden* B giebt es auf dieser Oberfläche nicht.

Die Raumcurven 3ter Ordnung gruppiren sich folgendermassen:

| Bild. | | Fundamentalpunkte. | Schaaren. |
|---|---|---|---|
| *Curven I.* | $C_1$ | . . . . . . . . . . . | 40 . 1 |
| *Curven II.* | $C_2$ | (11), 2 . . . . . . . . | 15 . 2 |
| *Curven III.* | $C_3$ | (1111), 22 . . . . . . . | 1 . 2 |
| | | | $\Sigma = 72.$ |

Wollen wir eine der *Curven II* zu Grunde legen, so lassen wir einer Geraden einen Kegelschnitt entsprechen, der den Ort der 4 consecutiven Punkte berührt und durch einen Fundamentalpunkt, etwa 2 geht; d. h. wir transformiren quadratisch in Bezug auf das zusammenfallende Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_2 = 0$. Wir wählen $x_3$ so, dass sie durch einen Fundamentalpunkt auf $x_2$, etwa durch 3 geht. Die Gleichung der ebenen Curvenschaar mit Bezug auf letzteres Dreieck $x_1 x_2 x_3$ lautet:

$$\alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1 x_2^2 + \gamma x_1 x_2 x_3 + \delta \left\{x_1 x_3 (x_1 - x_3) + x_2^3\right\} = 0.$$

Hierauf haben wir die Transformation anzuwenden:

$$\varrho x_1 = y_2^2$$
$$\varrho x_2 = y_1 y_2$$
$$\varrho x_3 = y_1 y_3 ,$$

wodurch die Gleichung übergeht in:

$$\varphi = \alpha y_2^3 + \beta y_1 y_2^2 + \gamma y_1 y_2 y_3 + \delta \left\{y_3 (y_2^2 - y_1 y_3) + y_1^2 y_3\right\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine dreifach $\infty$ Schaar von Curven dar, welche in $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ und in $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ eine dreipunktige Berührung haben. Zunächst nämlich sehen wir, dass $\varphi$ im Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ die Gerade $y_1 = 0$, so wie im Punkte $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Gerade $y_2 = 0$ zur Tangente hat. $\varphi - \varphi'$ ist aber eine Curve von der Form:

$$\Psi = y_2 (a y_2^2 + b y_1 y_2 + c y_1 y_3) = 0,$$

welche sowohl im Punkte $y_1 = 0$ $y_2 = 0$ als auch im Punkte $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ eine dreipunktige Berührung mit $\varphi$ hat.

*Unsere Abbildung ergiebt also zweimal 3 consecutive Punkte, deren eine Tangentenrichtung den Ort der andern schneidet.* (In der Tafel 11, II.)

Die Abbildungsfunctionen:

$$\varrho x_1 = y_1^3$$
$$\varrho x_2 = y_1 y_2^2$$
$$\varrho x_3 = y_1 y_2 y_3$$
$$\varrho x_4 = y_3 y_2^2 - y_1 y_3^2 + y_1^2 y_2$$

ergeben, *dass $y_2 = 0$ das Bild des Knotenpunktes ist, und dass jede Richtung durch die Oerter der consecutiven Punkte einen Durchgang durch den Knotenpunkt darstellt.*

Es sind ferner:

*Geraden* A. Die Punkte (111) und (222); das Bild der Axe ist die Tangente $(\overline{1}\overline{1})$.

Um eine Abbildung in Bezug auf eine der *Curven III* zu erhalten, nehmen wir als Transformationsdreieck das zusammenfallende Dreieck der 3 consecutiven Punkte (222); d. h. wir lassen Geraden Kegelschnitte entsprechen, die sich dort dreipunktig berühren. Daher machen wir die Substitution:

$$\begin{aligned}\varrho y_2 &= z_2^2\\ \varrho y_3 &= z_2 z_3\\ \varrho y_1 &= z_3^2 - z_1 z_2\,.\end{aligned}$$

Die Abbildungsgleichungen werden dann:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= z_2^3\\ \varrho x_2 &= (z_3^2 - z_1 z_2)\, z_2\\ \varrho x_3 &= (z_3^2 - z_1 z_2)\, z_3\\ \varrho x_4 &= z_3 z_2^2 + z_1 z_3^2 - z_1^2 z_2\,.\end{aligned}$$

Die allgemeine Gleichung eines ebenen Schnittes lautet:

$$\text{(I)}\quad \Omega = \alpha z_2^3 + \beta (z_3^2 - z_1 z_2)\, z_2 + \gamma\, (z_3^2 - z_1 z_2) z_3 + \delta \left\{z_3 z_2^2 + z_1 z_3^2 - z_1^2 z_2\right\}.$$

Das ist aber die Gleichung einer dreifach $\infty$ Schaar von Curven, welche sich im Punkte $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ sechspunktig berühren. Denn durch Subtraction von $\Omega'$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Phi &= \alpha z_2^3 + \beta\, (z_3^2 - z_1 z_2)\, z_2 + \gamma\, (z_3^2 - z_1 z_2)\, z_3 = 0\\ &= \Omega'' + \Omega'''(b z_3 + c z_2) = 0\,.\end{aligned}$$

Wenn man bedenkt, dass der Kegelschnitt $\Omega''' = 0$ 5 Punkte mit $\Omega = 0$ im Punkte $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, gemein hat, wie man sieht, wenn man $z_1 = 1$ und $z_3^2 = z_2$ setzt, so ist klar, dass $\Phi$ eine Curve ist, die mit $\Omega = 0$ im Punkte $z_1 = 0$, $z_3 = 0$ 6 Punkte gemein hat.

*Jede Richtung $z_2 = \lambda z_3$ durch den Ort der 6 consecutiven Punkte stellt einen Durchgang durch den biplanaren Knotenpunkt dar.*

*Geraden* A. Bild der Axe ist die Gerade $z_2 = 0$; sie verbindet als Tangente an den Ort der 6 consecutiven Punkte 2 Fundamentalpunkte; solcher fallen hier 15 zusammen, woraus wir sehen, dass die Axe für 15 einfache Linien zählt. Die andern beiden Geraden sind die 6 consecutiven Punkte als solche und der Kegelschnitt, der durch 5 der consecutiven Punkte geht.

Wollen wir die Abbildungen dieser Fläche noch einmal zusammenfassen, so treten die Fundamentalpunkte folgendermassen auf:

I. 3 *von* 4 *consecutiven Punkten liegen auf einer Geraden; auf*

*einer andern, die durch den Ort der consecutiven Punkte geht, liegen noch 2 getrennte Fundamentalpunkte.*

II. *Zweimal 3 consecutive Punkte; ihre Oerter sind durch eine Gerade verbunden, die zugleich Tangente eines Ortes ist.*

III. 6 *consecutive Punkte.*

## § 9.

## Die Fläche 3ter Ordnung und 6ter Classe mit einem uniplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 12.)

Die Centralprojection ergiebt in diesem Falle eine Doppelgerade, auf der dreimal 2 $\infty$ nahe Punkte liegen. (In der Tafel 12, I.) Die Projection ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 (y_1 + y_2 + y_3)^2 \\
\varrho x_2 &= y_2 (y_1 + y_2 + y_3)^2 \\
\varrho x_3 &= y_3 (y_1 + y_2 + y_3)^2 \\
\varrho x_4 &= y_1 y_2 y_3 ,
\end{aligned}$$

wie sie aus der Flächengleichung:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 0$$

resultirt.

Die ebenen Schnitte bilden sich ab als Curven 3ter Ordnung von der Form:

$$0 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) + \alpha_4 y_1 y_2 y_3 = 0;$$

die Bilder sind also Curven, die eine Gerade $A = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ in 3 festen Punkten schneiden und dort bestimmte Tangentenrichtungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ haben.

Wie sich aus den Abbildungsgleichungen ergiebt, ist *die Gerade $A$, welche aus 2 zusammenfallenden besteht, das Bild des uniplanaren Knotenpunktes.*

*Geraden* A. Die dreimal 2 $\infty$ nahen Punkte auf $A$, welche die festen Tangentenrichtungen der ebenen Schnitte bestimmen, sind Bilder der Geraden des Knotenpunktes und zählen für je 8 einfache Gerade.

*Geraden* B. Ebenso ergiebt sich, dass die 3 Tangenten $y_1 = 0$ $y_2 = 0$ $y_3 = 0$ einfache Gerade der Oberfläche darstellen, nämlich die Geraden:

$$x_4 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Setzen wir $y_i = \lambda A$, so ergiebt sich, dass für beliebige Werthe von $\lambda$ die 3 Punktepaare den Knotenpunkt darstellen, während sie für $\lambda = 0$, d. h. wenn wir uns ihnen auf der Tangente nähern, Gerade abbilden.

*Curven I.* Die Geraden der Ebene . . . . . . . . 18 . 1
*Curven II.* $C_2$ (11), (2) . . . . . . . . . . . . . 9 . 6
*Curven III giebt es nicht auf dieser Oberfläche.*

$\Sigma = 72.$

Die einzige neue Abbildung, welche wir bekommen, entsteht also, wenn wir eine der *Curven II* als *Projectionscurve* wählen; d. h. wenn wir ein zusammenfallendes Dreieck (11), (2) einer quadratischen Transformation zu Grunde legen. Wir haben demnach die Substitution zu machen:

$$\varrho y_1 = x_2^2$$
$$\varrho A = x_1 x_2$$
$$\varrho y_3 = x_1 x_3.$$

Die ebenen Curven gehen dann über in:

$$0 = x_1 (a x_2^2 + b x_1 x_2 + c x_1 x_3) + d x_3 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3),$$

d. i. die Gleichung einer dreifach $\infty$ Schaar von Curven, die sich im Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ vierpunktig berühren und dort $x_1 = 0$ zur festen Tangente haben, welche ausserdem in noch einem Fundamentalpunkt geschnitten wird. (In der Tafel 12, II.) Die Abbildungsfunctionen:

$$\varrho y_1 = x_1 x_2^2$$
$$\varrho y_2 = x_1^2 x_2$$
$$\varrho y_3 = x_1^2 x_3$$
$$\varrho y_4 = x_3 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3$$

ergeben sofort, *dass der uniplanare Knotenpunkt dargestellt ist durch die Gerade $x_1$ und die 4 consecutiven Punkte in dem Sinne, wie wir derartige Oerter schon mehrfach besprochen haben.*

*Geraden* A. Der Punkt (1111) und 2 und Verbindungslinie $\overline{(1)\,3}$.

*Geraden* B. Punkt 3. Linie $\overline{23}$ und der Kegelschnitt durch (1111) und 3.

Wir haben hiermit die Abbildungen dieser Fläche erschöpft. Sie sind durch folgende Configurationen charakterisirt:

I. 2 *zusammenfallende Gerade, worauf* 3 *Paare* $\infty$ *naher Punkte liegen.*

II. *Eine Gerade, worauf* 1 *einfacher und* 2 *von* 4 *consecutiven Fundamentalpunkten liegen.*

§ 10.

## Die Fläche 3ter Ordnung und 5ter Classe mit einem uniplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 15.)

Diese Fläche entsteht aus der vorigen, wenn 2 der Geraden des Knotenpunktes zusammenfallen. Wir bekommen auf der Geraden $A$ 4 zusammenfallende Fundamentalpunkte und ausserdem noch 2 zusammenfallende. (In der Tafel 15, I.)

Die Centralprojection:

$$\varrho y_1 = x_1^3$$
$$\varrho y_2 = x_1^2 x_2$$
$$\varrho y_3 = x_1^2 x_3$$
$$\varrho y_4 = x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2$$

zeigt, *dass das Bild des Knotenpunkte die Gerade* $A = x_1 = 0$ *ist.* Ferner zeigt die Gleichung eines allgemeinen ebenen Schnittes:

$$\alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1^2 x_3 + \delta (x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2) = 0,$$

*dass die* 4 *zusammenfallenden Fundamentalpunkte consecutiv sind, dass aber* 2 *von ihnen noch auf A liegen und durch den Ort derselben der Knotenpunkt dargestellt wird.*

*Geraden* A. Punkt (1111) und (22).

*Geraden* B. Linie $\overline{22}$.

| | | |
|---|---|---|
| *Curven I.* | Gerade der Ebene . . . . . . . . . . . | 36 . 1 |
| *Curven II.* | $C_2$ durch (22) und (1) . . . . . . . . . . | 18 . 1 |
| | $C_2$ durch (111) . . . . . . . . . . . . | 18 . 1 |
| *Curven III* | giebt es nicht . . . . . . . . . . . . | |
| | | $\Sigma = 72.$ |

Wie wir sehen, giebt es 2 Arten von Abbildungen II.

Legen wir zunächst das zusammenfallende Dreieck (22), (1) einer quadratischen Transformation zu Grunde und nennen die Linie $(\overline{22})$ $x_1$, die Gerade $A$ $x_2$ und eine dritte durch (1111) $x_3$, so geht die Gleichung der ebenen Schnitte, nachdem sie auf letzteres Coordinatendreieck umgeformt ist, durch die auf der vorigen Seite benutzte Transformation:

$$\varrho x_1 = y_2^2, \quad \varrho x_2 = y_1 y_2, \quad \varrho x_3 = y_1 y_3$$

über in:

$$\alpha y_1^2 y_2 + \beta y_1^2 y_3 + \gamma y_1 y_2^2 + \delta (y_3^2 y_1 + y_2^3) = 0.$$

Wir sehen, dass sich die Curven im Punkte $y_1 = 0$ $y_2 = 0$ fünfpunktig berühren, jedoch so, dass sie dort eine feste Wendetangente $y_1 = 0$ haben, auf der also 3 der 5 consecutiven Punkte liegen. (In der Tafel 15, $\mathrm{II_a}$.)

Die Abbildungsgleichungen:

$$\varrho x_1 = y_1^2 y_2$$
$$\varrho x_2 = y_1^2 y_3$$
$$\varrho x_3 = y_1 y_2^2$$
$$\varrho x_4 = y_3^2 y_1 + y_2^3$$

ergeben, *dass sowohl die Gerade* $y_1 = 0$ *als auch der Ort der* 5 *consecutiven Punkte im bekannten Sinne den Knotenpunkt abbilden.*

*Geraden* A. Punkt (11111) und Linie $\overline{(1)\,2}$.

*Geraden* B. Punkt 2.

Ganz auf dieselbe Weise erhält man, wenn man das Dreieck (111) der quadratischen Transformation zu Grunde legt:

5 *consecutive Punkte, von denen 2 eine Tangente bestimmen, auf der noch ein sechster Fundamentalpunkt getrennt liegt, sodass die Gerade und der Ort der 5 consecutiven Punkte den Knotenpunkt darstellen.* (In der Tafel 15, $\mathrm{II}_b$.)

*Geraden* A. Punkt (11111) und 2.

*Geraden* B. Der Kegelschnitt durch (11111).

Wir bekommen demnach folgende Abbildungen der Fläche:

I. *Eine Gerade, worauf 4 consecutive und 2 zusammenfallende Fundamentalpunkte liegen.*

II. a) 5 *consecutive Punkte, von denen 3 auf einer Geraden liegen, und 1 einzelner Fundamentalpunkt.*

b) 5 *consecutive Punkte, von denen 2 auf einer Geraden liegen, die ausserdem noch einen einzelnen Fundamentalpunkt enthält.*

§ 11.

## Die Fläche 3ter Ordnung und 4ter Classe mit einem uniplanaren Knotenpunkte. (Schläfli 20.)

Diese Fläche entsteht aus der vorigen, wenn die Tangentialebene des uniplanaren Knotenpunktes zur Wendeberührungsebene wird. In der Abbildung rücken alle 3 Punktepaare zusammen und werden zu 6 consecutiven, von denen aber noch 3 auf einer Geraden liegen, so dass sie eine feste Wendetangente für die allgemeinen ebenen Schnitte bestimmen. (In der Tafel 20, I.)

Die Abbildungsfunctionen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1^3 \\ \varrho y_2 &= x_1^2 x_2 \\ \varrho y_3 &= x_1^2 x_3 \\ \varrho y_4 &= x_2^3 + x_1 x_3^2 \end{aligned}$$

zeigen, *dass der Knotenpunkt dargestellt ist durch die Wendetangente der ebenen Schnitte:*

$$\alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1^2 x_3 + \delta (x_2^3 + x_1 x_3^2) = 0,$$

die in der That im Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sich sechspunktig berühren.

Ferner geht aus ihnen hervor, *dass jede Richtung, welche mit dem Orte der 6 consecutiven Punkte weniger als 6 gemein hat, eine Richtung durch den Knotenpunkt darstellt.*

*Geraden* A. Der Punkt (111111) . . . . . . . . . . . 27 . 1.

*Curven I.* Gerade der Ebene . . . . . . . . . . . . 72 . 1.

)

*of*
*le*
*n.*

o-

*n,*

*n,*
*t.*

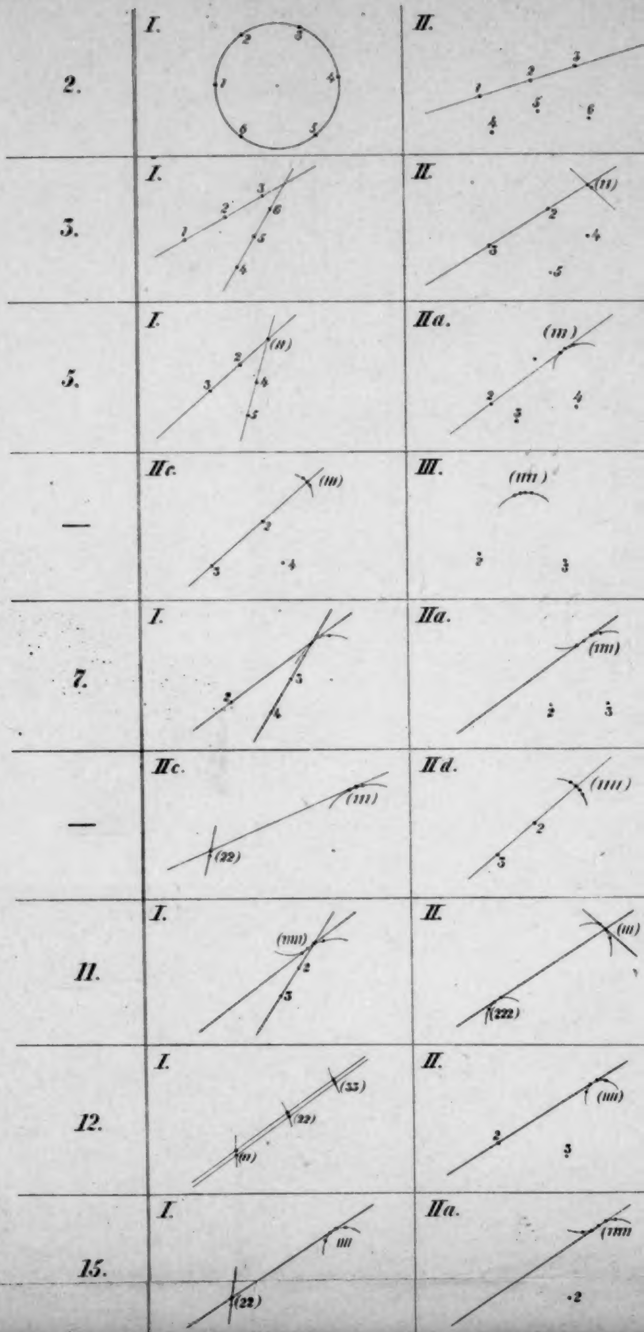
**n**

ne
in
zu
so
te

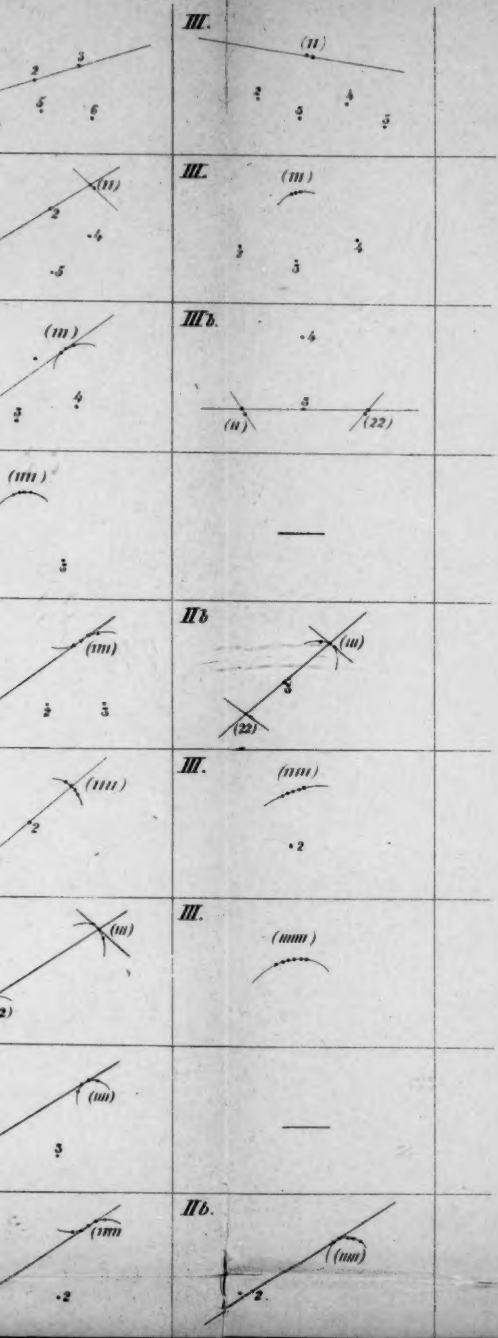
*te*

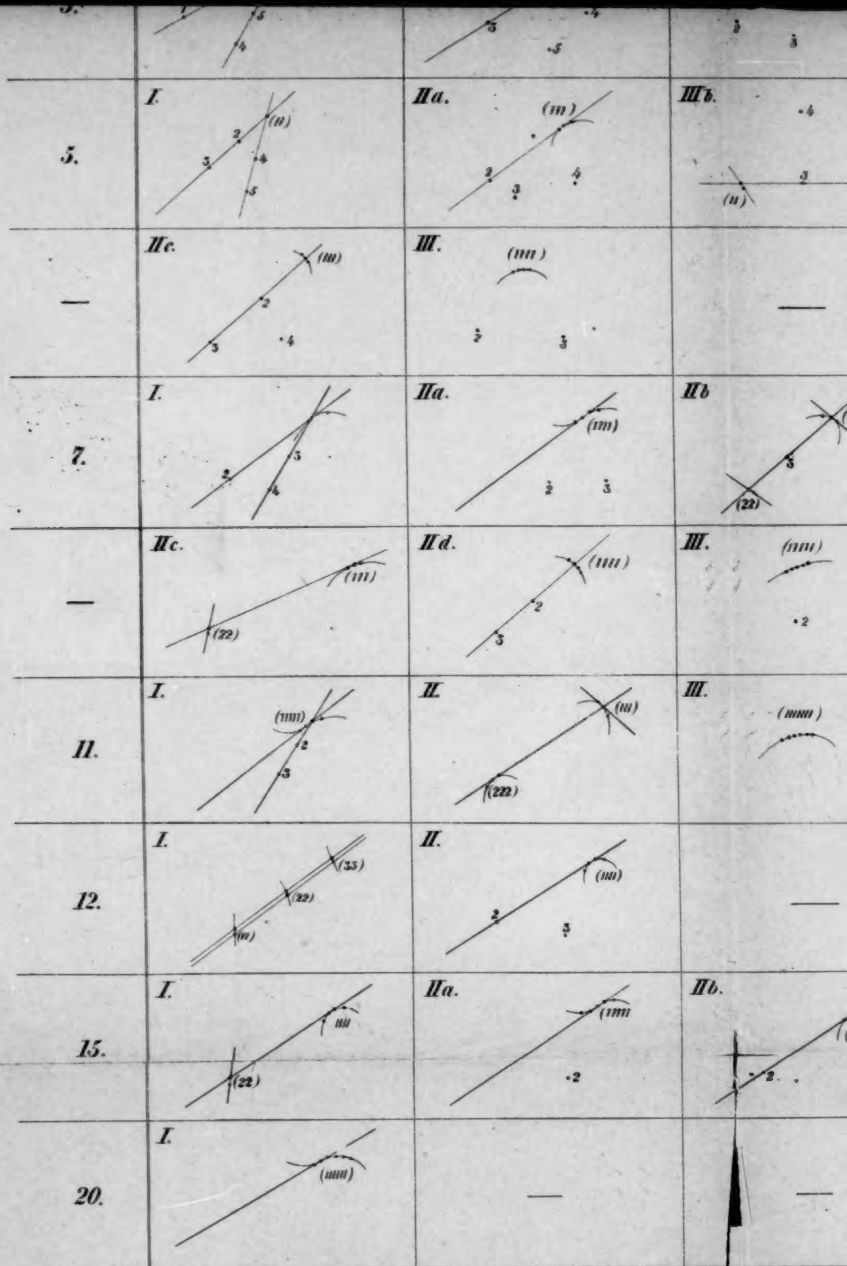
n.
*em*
*ng*

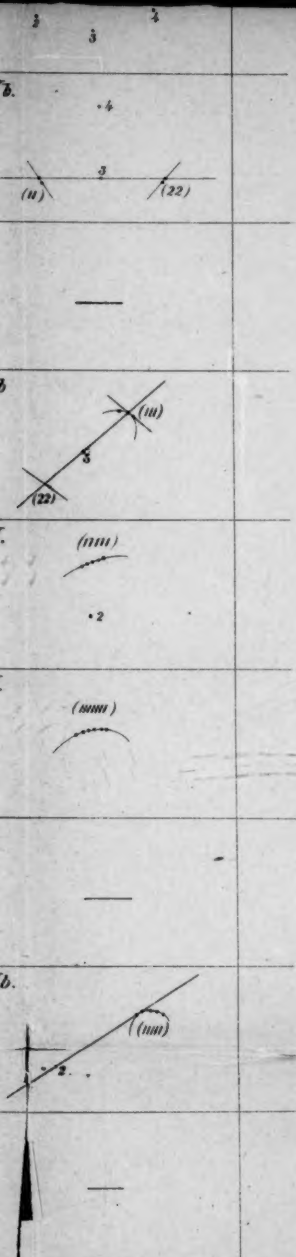
1.
1.



2.
I.
II.
3.
I.
II.
5.
I.
IIa.
—
IIc.
III.
7.
I.
IIa.
—
IIc.
IId.
11.
I.
II.
12.
I.
II.
15.
I.
IIa.




5.
I.
IIa.
IIIb.
IIc.
III.
7.
I.
IIa.
IIb
IIc.
IId.
III.
11.
I.
II.
III.
12.
I.
II.
15.
I.
IIa.
IIb.
20.
I.




…ath. Ann. IV. Diekmann.

*Es giebt auf der Oberfläche keine eigentlichen Raumcurven* $3^{ter}$ *Ordnung.* Die Abbildung der Fläche nach unsern Principien beschränkt sich also auf die eine:

6 *consecutive Punkte, von denen* 3 *auf einer Geraden liegen.*

---

Im Vorstehenden haben wir die wesentlichsten Flächen $3^{ter}$ Ordnung behandelt; die Abbildung der übrigen Fälle, welche Combinationen der vorliegenden sind, bieten keine besonderen Schwierigkeiten.

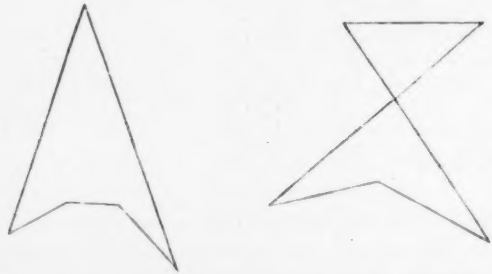
Göttingen, im Juli 1871.

# Ueber das ebene Fünfeck.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Wenn man in einem einfach geschlossenen Fünfeck ohne einspringende Winkel die Diagonalen zieht, so bilden diese wieder ein solches, welches ganz innerhalb des ersten liegt. Geht man von diesem zweiten Fünfeck ebenso zu einem dritten, vierten etc. über, so nähert man sich schliesslich einem Punkte, mit welchem alle Ecken des nach unendlich vielfacher Wiederholung der Construction entstehenden Fünfecks zusammenfallen.

Dasselbe gilt auch noch von einem Fünfeck, welches aus einem der gegebenen Art durch Projection entsteht. Dabei bleibt die Gestalt entweder eine von demselben Charakter; oder, es wird eine oder zwei Ecken durch die unendlich ferne Gerade von den übrigen geschieden. Ersetzt man dann die unendlich grossen Seiten durch ihre endlichen Ergänzungen, so erhält man 2 Formen, welche im Folgenden unter dem Begriff des einfach geschlossenen Fünfecks ohne einspringende Winkel eingeschlossen sein sollen. Die Gestalten derselben sind folgende:



Für diese fährt der erwähnte Process fort, Fünfecke zu liefern, deren Ecken gegen einen bestimmten Punkt gleichzeitig convergiren.

Wenn irgendwie 5 Punkte gegeben sind, von denen nicht 3 in einer Geraden liegen, so ist immer eines dieser Fünfecke zwischen ihnen möglich, und also ein derartiger Punkt gegeben.

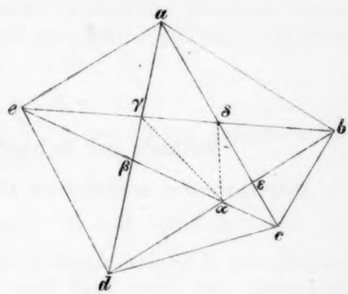
Es entsteht die Frage nach der Bedeutung dieses Punktes. Ich werde zeigen, dass er ein Fundamentalpunkt einer bestimmten bei dem gegebenen Fünfeck auftretenden Collineation ist, und somit der einen Wurzel einer cubischen Gleichung entspricht. Die genannte Construction liefert daher ein geometrisches Näherungsverfahren für die Lösung einer solchen cubischen Gleichung. Der Weg der Untersuchung führt zu einigen Sätzen über das Fünfeck, welche nicht ohne Interesse scheinen.

## § 1.

## Eine beim Fünfeck auftretende Collineation.

Denken wir uns 5 Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ in der Ebene durch Gerade der Reihe nach verbunden. Die entstehende Figur nenne ich das *erste* Fünfeck. Die Diagonalen desselben, der entsprechenden Reihenfolge gemäss geordnet, bilden das *zweite* Fünfeck $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$; wobei die Bezeichnung so gewählt wird, dass $\alpha$ dem $a$, $\beta$ dem $b$ etc. gegenüberliegt.

*Das zweite Fünfeck ist dem ersten projectivisch.*




Um dieses einzusehen, braucht man nur die Strahlbüschel zu betrachten, von denen einer aus $a$ nach $b$, $c$, $d$, $e$, der andere von $\alpha$ nach $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ geht. Diese liegen perspectivisch, und zwar so, dass das Doppelverhältniss der Strahlen:

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad ae$$

in dieser Anordnung dem der Strahlen:

$$\alpha\varepsilon,\quad \alpha\delta,\quad \alpha\gamma,\quad \alpha\beta$$

gleich wird. Aber das Doppelverhältniss der letztern bleibt bekanntlich ungeändert, wenn man statt dieser Anordnung die Reihenfolge:

$$\alpha\beta,\quad \alpha\gamma,\quad \alpha\delta,\quad \alpha\varepsilon$$

festsetzt. Daher sind die Büschel aus $a$ und $\alpha$ auch projectivisch, wenn man die mit entsprechenden Buchstaben bezeichneten Strahlen einander entsprechen lässt.

Ebendies gilt von den Strahlbüscheln aus $b$, $\beta$ u. s. w. Betrachtet man also eine Collineation, bei welcher die Punktepaare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ einander zugeordnet sind, so ist auch $e$ dem Punkte $\varepsilon$ zugeordnet, d. h. die Fünfecke selbst sind collineare Figuren, wie der obige Satz aussagt.

Mit Hülfe derselben Construction, welche von dem ersten Fünfeck zum zweiten führte, gelangt man nun vom zweiten zu einem dritten, vom dritten zu einem vierten u. s. w. Aber wenn man aus 2 collinearen Figuren vermöge einer und derselben Construction neue bildet, so sind diese wieder collinear. In der obigen Collineation ist also das dritte Fünfeck dem zweiten, das vierte dem dritten etc. ebenso collinear, wie das zweite dem ersten. Diese Reihe von Fünfecken bildet also eine solche Reihe von Gebilden, wie sie von Herrn Gordan und mir*), später aus andern Gesichtspunkten von Herrn Klein und Lie**) betrachtet worden sind; Reihen, in denen jedes folgende Gebilde als dem zweiten System angehörig dem vorhergehenden entspricht, wenn man dieses als dem ersten System angehörig betrachtet.

Wenn das Fünfeck die im Eingange betrachtete Gestalt hat, so nähert sich die Operation einer endlichen Grenze, einem Punkte; und wenn man $n$ unendlich gross nimmt, so fallen die Ecken sowohl des $n^{\text{ten}}$ als des $(n+1)^{\text{ten}}$ Fünfecks mit diesem Punkte zusammen. Dieser Punkt entspricht also sich selbst; *er ist eine Ecke für das Fundamentaldreieck der Collineation.*

Ich werde jetzt dies Dreieck und die analytische Form der collinearen Beziehung aufsuchen; zunächst aber werde ich eine Methode entwickeln, mit deren Hilfe das Fünfeck behandelt werden kann.

## § 2.

### Methode zur Behandlung des Fünfseits.

Betrachten wir zunächst ein *Fünfseit.* Die Seiten desselben seien:

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=0.$$

Zwischen den 5 linearen Ausdrücken $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ bestehen 2 lineare Relationen; und indem man diese passend schreibt, auch die $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ mit passend gewählten Multiplicatoren versieht, kann man diesen Relationen die Form geben:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A+B+C+D+E&=0\\ \alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D+\varepsilon E&=0. \end{aligned}$$

Und zwar kann man diese Formen der Identitäten noch auf unendlich viele Arten hervorrufen. Denn setzt man an Stelle der obigen Gleichungen die Combinationen:

$$\begin{aligned} (\mu+\nu\alpha)A+(\mu+\nu\beta)B+\cdots&=0\\ (\varrho+\sigma\alpha)A+(\varrho+\sigma\beta)B+\cdots&=0. \end{aligned}$$

*) Annalen Bd. I, p. 388.
**) Annalen Bd. IV, p. 50.

so erhält man aus diesen wieder die Form:

$$A' + B' + C' + D' + E' = 0$$
$$\alpha' A' + \beta' B' + \gamma' C' + \delta' D' + \varepsilon' E' = 0,$$

wenn man unter $A'$, $B'$ ... die von $A$, $B$ ... nur um constante Factoren unterschiedenen Ausdrücke:

$$A' = (\varrho + \sigma\alpha) A$$
$$B' = (\varrho + \sigma\alpha) B$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

unter $\alpha'$, $\beta'$ ... aber die Ausdrücke:

$$(2) \qquad \alpha' = \frac{\varrho + \sigma\alpha}{\mu + \varrho\alpha}$$
$$\beta' = \frac{\varrho + \sigma\beta}{\mu + \nu\beta}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

versteht.

Wenn man das Fünfseit projectivisch umformt, so erhalten nur die in den linearen Functionen $A$, $B$ ... enthaltenen Veränderlichen andere Bedeutungen; die Identitäten bleiben ungeändert.

Umgekehrt sind aber auch immer 2 Fünfseite, bei denen die Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ dieselben Werthe haben, projectivisch. Denn bezeichnet man die Seiten des zweiten Fünfseits alsdann durch:

$$\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \Delta = 0, \quad \mathsf{E} = 0,$$

und schreibt man die Ausdrücke $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$ ... mit andern Veränderlichen als $A$, $B$, ..., so sind die Gleichungen:

$$\mathsf{A} = A, \quad \mathsf{B} = B, \quad \Gamma = C,$$

Formeln für eine lineare Transformation, aus welchen wegen der gleichen Form der Identitäten sofort auch:

$$\Delta = D, \quad \mathsf{E} = E$$

folgt. Es gehen also durch dieselbe lineare Transformation die Seiten des einen Fünfseits der Reihe nach in die des andern über.

Die projectivischen Eigenschaften eines Fünfseits hängen also nur von den Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ ab. Aber auch diese sind noch durch die Ausdrücke (2) ersetzbar, welche mittelst einer linearen Transformation mit jenen zusammenhängen.

Solange wir also nur das Fünfseit als solches betrachten, bei welchem eine Reihenfolge der 5 Seiten nicht festgesetzt wird, können wir den Satz aussprechen:

*Die projectivischen Eigenschaften eines Fünfseits hängen nur von den absoluten Invarianten der Gleichung* 5ten *Grades ab, deren Wurzeln die Grössen* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ *sind.*

Diese Gleichung ist nicht verschieden von derjenigen, welche nach der

p. 285 folg. dieses Bandes der Annalen von mir entwickelten Anschauung durch dieses Fünfseit interpretirt wird. Denn bezeichnen wir die Wurzeln jener Gleichung durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, durch $\varphi(z)$ den Ausdruck:

$$\varphi(z) = z - \alpha \,.\, z - \beta \,.\, z - \gamma \,.\, z - \delta \,.\, z - \varepsilon,$$

also durch $\varphi = 0$ die fragliche Gleichung selbst, so können wir den Gleichungen der Seiten des Fünfseits die Form geben:

$$A = \frac{x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3}{\varphi'(\alpha)}$$

$$B = \frac{x_1 + \beta x_2 + \beta^2 x_3}{\varphi'(\beta)}\,.$$

. . . . . . . . .

Es wird daher nach bekannten Sätzen der Partialbruchzerlegung:

$$A + B + C + D + E = 0$$

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E = 0,$$

so dass $\alpha$, $\beta$ . . . gerade die oben benutzten Coefficienten sind.

## § 3.

## Das Fünfeck.

Gehen wir nun vom Fünfseit zu einem Fünfeck im gewöhnlichen Sinne über, so haben wir nur eine bestimmte Reihenfolge der Seiten festzustellen, so dass nur die Durchschnitte aufeinander folgender als Ecken betrachtet werden sollen. Sei dieses die Anordnung $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Man kann diese Anordnung auch dadurch bestimmen, dass man den symmetrischen Functionen bez. Invarianten von $\varphi = 0$ irgend eine cyclische Function, etwa das Differenzenprodukt:

$$p = \alpha - \beta \,.\, \beta - \gamma \,.\, \gamma - \delta \,.\, \delta - \varepsilon \,.\, \varepsilon - \alpha$$

adjungirt, in dessen Zusammensetzung die gedachte Reihenfolge ausgedrückt ist. Dieses Differenzenprodukt wird zu dem vollständigen Differenzenprodukt aller Wurzeln ergänzt durch das analog gebildete:

$$q = \alpha - \gamma \,.\, \gamma - \varepsilon \,.\, \varepsilon - \beta \,.\, \beta - \delta \,.\, \delta - \alpha\,.$$

Das Fünfeck $A$, $C$, $E$, $B$, $D$, zu welchem dieses letztere gehört, hat dieselben Seiten wie das erste, aber keine Ecke mit ihm gemein, und ist dadurch bestimmt*).

Man kann nun die nächstliegenden Besonderheiten leicht angeben, welche ein Fünfeck annehmen kann. Zunächst kann es ein *symmetrisches* sein; worunter zugleich ein solches mit inbegriffen sein mag,

---

*) Die Beziehung zwischen diesem Fünfeck und dem gegebenen ist derjenigen in gewissem Sinne entgegengesetzt, in welcher sich das erste und zweite Fünfeck des § 1. befinden.

welches durch Projection ein symmetrisches werden kann. In diesem Falle existirt eine lineare Transformation (Umlegen um die Symmetrieaxe), bei welcher eine Seite in sich selbst übergeht, die anderen sich paarweise vertauschen. Mag also dabei $A$ in $aA$, $B$ in $eE$, $C$ in $dD$, $D$ in $cC$, $E$ in $bB$ übergehen; indem wir diese Ausdrücke $A$, $eE$, $dD$, $cC$, $bB$ als die neuen linearen Functionen einführen, und sie etwa durch $A'$, $E'$, $D'$, $C'$, $B'$ bezeichnen, erhalten die ursprünglichen Identitäten die Form:

$$A' + B' + C' + D' + E' = 0$$
$$\alpha A' + \varepsilon B' + \delta C' + \gamma D' + \beta E' = 0,$$

und dieses Fünfeck muss dem ersten projectivisch sein, wenn wir $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ der Reihe nach den $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ entsprechen lassen. Daher müssen die Grössen

$$\alpha,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ \beta$$

durch lineare Transformation aus

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon$$

entstehen. Repräsentiren wir aber $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ durch Punkte einer Geraden, so heisst dies, $\alpha$ ist Doppelpunkt einer Involution, welche $\beta$, $\varepsilon$ und $\gamma$, $\delta$ zu Paaren hat. Aber dies wieder führt auf das Verschwinden der Invariante 18ten Grades $R$ von $\varphi$, und man hat den Satz:

*Für ein Fünfeck, welches in ein symmetrisches projicirbar ist, verschwindet die Invariante $R$.*

Man kann $\alpha = 0$ setzen und hat dann $\varepsilon = -\beta$, $\delta = -\gamma$. Die Differenzenprodukte $p$, $q$, von deren Werthen später Gebrauch gemacht werden wird, erhalten dann die Ausdrücke:

$$p = 2\beta^2\gamma(\beta - \gamma)^2, \qquad q = -2\beta\gamma^2(\beta + \gamma)^2.$$

Soll das Fünfeck ein regelmässiges sein, oder in ein solches projicirbar, so muss eine lineare Transformation (Drehung) existiren, durch welche jede Seite in die folgende übergeht. Es verwandeln sich also $A$ in $bB$, $B$ in $cC$ etc., $E$ in $aA$. Bezeichnen wir $aA$, $bB$ etc. also wieder durch $A'$, $B'$ . . ., so haben wir aus den früheren Identitäten jetzt:

$$A' + B' + C' + D' + E' = 0$$
$$\varepsilon A' + \alpha B' + \beta C' + \gamma D' + \delta E' = 0.$$

Soll also das Fünfeck $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ dem Fünfeck $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ projectivisch entsprechen, so müssen die Grössen

$$\varepsilon,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

aus den Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon$$

der Reihe nach durch lineare Transformation hervorgehen, d. h. die Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ müssen cyclisch projectivisch sein.

*Die Gleichung $\varphi = 0$ wird also für das symmetrische Fünfeck eine reine Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades, oder ihre Covariante $j$ verschwindet.*

Ist also $\omega$ eine imaginäre $5^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit, so kann man für das regelmässige Fünfeck

$$\alpha = 1, \quad \beta = \omega, \quad \gamma = \omega^2, \quad \delta = \omega^3, \quad \varepsilon = \omega^4$$

setzen. Die Differenzenprodukte $p$, $q$ erhalten dann numerische Werthe, von denen später Gebrauch gemacht werden wird; es wird nämlich:

$$p = (1 - \omega)^5, \qquad q = (1 - \omega^2)^5, \qquad \frac{q}{p} = (1 + \omega)^5,$$

und also, wenn

$$\omega + \omega^4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \omega^2 + \omega^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

ist, wird:

$$\frac{q}{p} = \frac{-11 - 5\sqrt{5}}{2}.$$

Für das einfach geschlossene regelmässige Fünfeck und dessen Projectionen muss man bei $\sqrt{5}$ das hier gewählte Zeichen nehmen; dies lehrt unter anderm folgende Betrachtung.

Stellen wir in rechtwinkligen Coordinaten die Ecken eines Fünfseits durch die Coordinaten $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots$, die Seiten mit einer leicht verständlichen Abkürzung durch

$$\begin{aligned} A &= a\,.\,(x\,1\,2) \\ B &= b\,.\,(x\,2\,3) \\ C &= c\,.\,(x\,3\,4) \end{aligned} \qquad (x\,i\,k) = \begin{vmatrix} x & x_i & x_k \\ y & y_i & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

dar, wo $a, b, c\ldots$ noch zu bestimmende Constanten sind. Diese sind so zu wählen und weitere Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ so zu bestimmen, dass

$$A + B + C + D + E = 0$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E = 0.$$

Setzen wir in diesen Gleichungen für $x, y$ etwa $x_1, y_1$, so ergiebt sich:

$$b\,.\,(123) + c\,.\,(134) + d\,.\,(145) = 0$$
$$\beta b\,.\,(123) + \gamma c\,.\,(134) + \delta d\,.\,(145) = 0,$$

und man hat also, wenn $\varrho_1$ eine unbestimmte Grösse ist:

$$\varrho_1\,(123) = cd\,(\gamma - \delta)$$
$$\varrho_1\,(134) = db\,(\delta - \beta)$$
$$\varrho_1\,(145) = bc\,(\beta - \gamma).$$

Man erhält aus diesen Gleichungen andere, indem man sowohl die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 als die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ cyclisch vertauscht. Alsdann aber ergiebt sich sofort:

$$\frac{q}{p} = -\frac{(145)\,(251)\,(312)\,(423)\,(534)}{(134)\,(245)\,(351)\,(412)\,(523)}.$$

Ist nun das Fünfeck ein einfach geschlossenes und hat es keine einspringenden Winkel, oder ist es eine Projection eines solchen (vergl. Einleitung), so haben alle hier auftretenden Determinanten, als proportional mit den Flächeninhalten gewisser, aus den Ecken gebildeter Dreiecke entweder, indem deren Ecken in demselben Sinne aufeinander folgen, alle gleiches Vorzeichen, oder es ist doch eine gerade Anzahl derselben negativ. Der ganze Ausdruck ist also wesentlich negativ und man hat den Satz:

*Bei Fünfecken, welche einfach geschlossen sind und keine einspringenden Winkel enthalten oder Projectionen solcher Fünfecke, ist* $\frac{q}{p}$ *negativ.*

Wenden wir dies auf das regelmässige Fünfeck an, so ergiebt sich sofort die oben gewählte Bestimmung des Vorzeichens von $\sqrt{5}$.

## § 4.

## Die Collineation und ihr Fundamentaldreieck.

Nachdem ich die zur Behandlung des Fünfecks anzuwendende Methode entwickelt habe, kehre ich nun zu der Aufgabe zurück, die beim Fünfeck stattfindende Collineation (§ 1.) darzustellen. Bezeichnen wir die Seiten des zweiten Fünfecks durch

$$A' = 0, \quad B' = 0 \ldots$$

Die Seiten sind dadurch gegeben, dass $A'$ durch die Schnittpunkte von $B$ mit $C$ und von $D$ mit $E$, $B'$ durch die Schnittpunkte von $C$ mit $D$ und von $E$ mit $A$ geht u. s. w. Wegen der Identitäten kann man also die Ausdrücke $A'$, $B'$ ... durch $A$, $B$ ... in folgender doppelter Weise darstellen:

$$(1)\quad \begin{aligned} A' &= B \,.\, \beta - \alpha + C \,.\, \gamma - \alpha = D \,.\, \alpha - \delta + E \,.\, \alpha - \varepsilon \\ B' &= C \,.\, \gamma - \beta + D \,.\, \delta - \beta = E \,.\, \beta - \varepsilon + A \,.\, \beta - \alpha \\ C' &= D \,.\, \delta - \gamma + E \,.\, \varepsilon - \gamma = A \,.\, \gamma - \alpha + B \,.\, \gamma - \beta \\ D' &= E \,.\, \varepsilon - \delta + A \,.\, \alpha - \delta = B \,.\, \delta - \beta + C \,.\, \delta - \gamma \\ E' &= A \,.\, \alpha - \varepsilon + B \,.\, \beta - \varepsilon = C \,.\, \varepsilon - \gamma + D \,.\, \varepsilon - \delta. \end{aligned}$$

Da nun $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ ein zu $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ projectivisches Fünfeck bilden, so muss man solche Factoren $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ bestimmen können, dass wieder identisch:

$$(2)\quad \begin{aligned} aA' + bB' + cC' + dD' + eE' &= 0 \\ \alpha aA' + \beta bB' + \gamma cC' + \delta dD' + \varepsilon eE' &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man etwa, um $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ zu finden, in den Gleichungen (1) zwei der $A$, $B$ ... gleich Null und führt die daraus entstehenden Werthe der $A'$, $B'$ ... in (2) ein, so erhält man die Verhältnisse der $a$, $b$ .. durch die $\alpha$, $\beta$ .. ausgedrückt, und zwar ist:

$$(3)\qquad a=\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\gamma\,.\,\alpha-\delta},\quad b=\frac{\delta-\varepsilon}{\beta-\delta\,.\,\beta-\varepsilon},\quad c=\frac{\varepsilon-\alpha}{\gamma-\varepsilon\,.\,\gamma-\alpha},$$
$$d=\frac{\alpha-\beta}{\delta-\alpha\,.\,\delta-\beta},\quad e=\frac{\beta-\gamma}{\varepsilon-\beta\,.\,\varepsilon-\gamma}\,.$$

Die Gleichungen der Collineation aber werden dann durch irgend 3 unter den folgenden 5 Gleichungen ausgedrückt (§ 2.):

$$(4)\qquad \begin{aligned}\sigma A &= aA'\\ \sigma B &= bB'\\ \sigma C &= cC'\\ \sigma D &= dD'\\ \sigma E &= eE',\end{aligned}$$

wobei nur links andere Veränderliche als rechts zu schreiben sind und in welchen $\sigma$ einen unbestimmten Factor bedeutet.

Die Fundamentalpunkte der Collineation ergeben sich, wenn man die Veränderlichen rechts und links in der Gleichung (4) als dieselben betrachtet. Eliminirt man dann dieselben aus irgend dreien der Gleichungen (4), so erhält man die cubische Gleichung in $\sigma$, von welcher die Fundamentalpunkte der Collineation abhängen. Je nach der Wahl solcher 3 Gleichungen enthält die resultirende Determinante als überflüssige Factoren einige der Differenzen $\alpha-\beta$ etc. Mit Uebergehung derselben findet man leicht die cubische Gleichung in der Form:

$$(5)\qquad q\sigma^2(\sigma-1)-p(\sigma+1)=0,$$

wo $p$, $q$ die in § 3. so bezeichneten Differenzenprodukte bedeuten.

Eine Wurzel dieser Gleichung ist es also, auf welche die im Eingange erwähnte Construction sich bezieht, sobald das Fünfeck ein einfach geschlossenes ist und seine einspringenden Winkel enthält, oder in ein solches projicirbar ist.

Die Gleichung (5) ist im Allgemeinen irreducibel. *Sie wird aber reducibel, wenn das Fünfeck im Sinne des* § 3. *ein symmetrisches ist.* Dann hat man:

$$\frac{q}{p}=-\frac{\gamma(\beta+\gamma)^2}{\beta(\beta-\gamma)^2};$$

die cubische Gleichung:

$$\frac{\sigma^2(\sigma-1)}{\sigma+1}=-\frac{\beta(\beta-\gamma)^2}{\gamma(\beta+\gamma)^2}$$

hat also die rationale Wurzel:

$$\sigma=\frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}.$$

Es entspricht dies dem Umstande, dass der eine Fundamentalpunkt hier nothwenig auf der Symmetrieaxe liegt.

## § 5.

## Die cubische Gleichung der Collineation.

Schreibt man die cubische Gleichung in der Form:

$$a\sigma^3 + 3b\sigma^2 + 3c\sigma + d = 0,$$

so ist:

$$a = 3q, \quad b = -q, \quad c = -p, \quad d = -3p.$$

Daher ist die Discriminante der Gleichung:

$$\Delta = -24pq\{q^2 + 11pq - p^2\}.$$

Diese verschwindet und 2 Ecken des Fundamentaldreiecks erscheinen unendlich nahe gerückt:

1. Wenn $pq = 0$, also wenn 2 der Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ einander gleich werden. In solchem Falle kann man aus den beiden Identitäten eine Combination bilden, welche nur *drei* der Ausdrücke $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ enthält. Dies tritt also nur (und immer) ein, *wenn 3 Seiten des Fünfecks durch einen Punkt gehen.* Für den Fall des einfach geschlossenen Fünfecks ohne einspringende Winkel und Projectionen von solchen kann dies nicht eintreten.

2. Wenn $q^2 + 11pq - p^2 = 0$, $\frac{q}{p} = \frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}$. Dies tritt nach § 3. z. B. beim regelmässigen Fünfeck ein, und es entspricht insbesondere das untere Zeichen dem einfach geschlossenen regelmässigen Fünfeck. In diesem Falle ist es auch leicht, die Wurzeln der cubischen Gleichung numerisch anzugeben. Es wird nämlich die Doppelwurzel:

$$\sigma = -\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

die einfache:

$$\sigma = 2 - \sqrt{5}.$$

Die allgemeine Untersuchung der Fünfecke, welche der Gleichung $q^2 + 11pq - p^2 = 0$ genügen, werde ich im folgenden §. geben. Ich werde hier zunächst zeigen, wie man in dem Falle, wo die convergente geometrische Construction ausführbar ist, angeben kann, welcher Wurzel der cubischen Gleichung der unendliche Prozess entspricht.

Die cubische Gleichung

$$q\sigma^2(\sigma - 1) - p(\sigma + 1) = 0 \tag{1}$$

hat bekanntlich 3 reelle Wurzeln, wenn die Discriminante positiv ist, nur eine, wenn sie einen negativen Werth hat. Im letzten Falle ist keine weitere Untersuchung nöthig; der convergente Prozess entspricht der einzigen reellen Wurzel. Wenn dagegen $\Delta$ positiv ist, so handelt es sich darum, zu bestimmen, welche Wurzel man durch die Construction erhält.

Nun ist immer $\frac{q}{p}$ negativ, sobald der geometrische Prozess überhaupt ein Resultat liefert (§ 3.). Damit also $\Delta$ positiv sei, muss $q^2 + 11pq - p^2 > 0$ sein, oder

$$\left(\frac{q}{p} + \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{q}{p} + \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$

Von den beiden Factoren links ist der zweite negativ; daher muss der erste ebenfalls negativ sein, oder

$$-\frac{q}{p} > \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}.$$

Bezeichnen wir nun die linke Seite der Gleichung (1), dividirt durch $p$, mit $\varphi(\sigma)$, so haben wir:

$$\begin{aligned} &\varphi(-1) = -2\frac{q}{p}, \text{ also positiv,} \\ (2)\qquad &\varphi(0) = -1, \quad \text{also negativ,} \end{aligned}$$

Die cubische Gleichung hat also eine Wurzel zwischen $\sigma = 0$ und $\sigma = -1$. Beim regelmässigen Fünfeck fällt dies Intervall in die ungleiche Wurzel $2 - \sqrt{5}$. Kann man also zeigen, dass die anderen Wurzeln der Gleichung (1) stets ausserhalb dieses Intervalls liegen, so folgt daraus durch blosse Betrachtung der Stetigkeit, dass die Construction, welche im Falle des regelmässigen Fünfecks auf die Wurzel $2 - \sqrt{5}$ führt, in den anderen Fällen von 3 reellen Wurzeln auf die in dem Intervall 0, $-1$ liegende Wurzel führen muss. Nun hat aber die cubische Gleichung 2 Zeichenwechsel und nur *eine* Zeichenfolge. Daher muss sie 2 positive Wurzeln haben Und zwar ist eine derselben gleich Null nur, wenn $p = 0$.

Denken wir uns also $-\frac{q}{p}$ von dem Werthe $\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$ ausgehend und gegen $+\infty$ sich bewegend, so bleiben die Intervalle der positiven Wurzeln und der einen negativen stets getrennt; und erst bei dem Grenzwerthe $\frac{q}{p} = -\infty$ tritt für $\sigma = 0$ eine Berührung der Intervalle ein. Und so haben wir den Satz:

*Der convergente geometrische Prozess entspricht, wenn die cubische Gleichung* 3 *reelle Wurzeln hat, derjenigen, welche allein zwischen* 0 *und* $-1$ *liegt.*

In demselben Intervalle liegt übrigens auch für den Fall zweier imaginärer Wurzeln die reelle Wurzel der Gleichung, so lange eben nur $\frac{q}{p} < 0$ ist; was denn in allen Fällen eintritt, in welchen wir von der Anwendbarkeit des geometrischen Prozesses gesprochen haben.

## § 6.

## Eine besondere Classe von Fünfecken.

Den aus der Gleichung $q^2 + 11\,qp - p^2 = 0$ folgenden Werthen von $\frac{q}{p}$ entsprechen 2 Classen von Fünfecken, bei welchen 2 Ecken des Fundamentaldreiecks der Collineation einander unendlich nahe liegen. Nur die eine dieser Classen kann einfach geschlossene Fünfecke ohne einspringende Winkel oder deren Projectionen enthalten; in dieser Classe treten die regelmässigen auf.

Denken wir uns, um diese Fünfecke zu charakterisiren, 4 Ecken eines Fünfecks gegeben, sowie die 3 Seiten, welche sie verbinden. Damit das Fünfeck dann der Bedingung $\frac{q}{p} = \frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}$ genüge, muss die Spitze desselben eine von 2 gewissen Curven beschreiben, je nachdem das obere oder untere Zeichen von $\sqrt{5}$ gewählt wird. Man erhält diese Curven, wenn man in der am Ende von § 3. gebrauchten Bezeichnung die Ecken 1, 2, 3, 4 als gegeben betrachtet, 5 dagegen durch das Zeichen $x$ ersetzt. Die Gleichungen dieser Curven sind also:

$$\frac{(x\,14)\,(x\,12)\,(x\,34)}{(x\,24)\,(x\,13)\,(x\,23)} = \frac{(134)\,(412)}{(312)\,(423)} \cdot \frac{11 \mp 5\sqrt{5}}{2}\,.$$

Sie sind von der $3^{\text{ten}}$ Ordnung und gehen durch die Punkte 1, 2, 3, 4 so, dass sie in 1 die Diagonale 13, in 2 die Seite 12, in 3 die Seite 34, in 4 die Diagonale 24 berühren. Sie sind hierdurch bis auf einen linearen Parameter bestimmt. Sind insbesondere die 4 Punkte und ihre Folge so gewählt, dass ein $5^{\text{ter}}$ Punkt hinzugefügt werden kann, welcher mit ihnen ein einfach geschlossenes Fünfeck ohne einspringende Winkel bildet, so ist die dem unteren Vorzeichen von $\sqrt{5}$ entsprechende Curve dadurch völlig gegeben, dass auf ihr noch die $5^{\text{te}}$ Ecke des einzigen leicht construirbaren Fünfecks liegt, welches in ein regelmässiges projicirt werden kann, oder nach der Bezeichnung des § 3. ein regelmässiges ist.

Die beiden in Rede stehenden Curven theilen zugleich zusammen mit den Verbindungslinien der 4 Punkte die Ebene in solche Gebiete, innerhalb deren entweder alle Ecken des Fundamentaldreiecks reell oder 2 imaginär sind.

In Folge der analytischen Bedingung:

$$(1)\qquad \frac{\alpha - \gamma\,.\,\gamma - \varepsilon\,.\,\varepsilon - \beta\,.\,\beta - \delta\,.\,\delta - \alpha}{\alpha - \beta\,.\,\beta - \gamma\,.\,\gamma - \delta\,.\,\delta - \varepsilon\,.\,\varepsilon - \alpha} = \frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}\,,$$

welche für diese Classe von Fünfecken erfüllt sein muss, kann man leicht die allgemeinen Ausdrücke der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ angeben, welche bei ihnen auftreten. Setzt man nämlich:

$$(2)\quad \begin{gathered} \alpha = \frac{\mu + \nu(1+\lambda)}{\varrho + \sigma(1+\lambda)}, \quad \beta = \frac{\mu + \nu(\omega + \lambda\omega^2)}{\varrho + \sigma(\omega + \lambda\omega^4)}, \quad \gamma = \frac{\mu + \nu(\omega^2 + \lambda\omega^3)}{\varrho + \sigma(\omega^2 + \lambda\omega^3)}, \\ \delta = \frac{\mu + \nu(\omega^3 + \lambda\omega^2)}{\varrho + \sigma(\omega^3 + \lambda\omega^2)}, \quad \varepsilon = \frac{\mu + \nu(\omega^4 + \lambda\omega)}{\varrho + \sigma(\omega^4 + \lambda\omega)}, \end{gathered}$$

so enthalten diese Ausdrücke 4 Parameter, nämlich $\lambda$ und die Verhältnisse der $\mu$, $\nu$, $\varrho$, $\sigma$. Daher findet zwischen ihnen nur *eine* Relation statt. Indem man die linke Seite des Ausdrucks (1) bildet, zeigt sich, dass diese in $(1+\omega)^5$ übergeht. Die Ausdrücke (2) erfüllen daher die Gleichung (1), und zwar je nach Wahl von $\omega$ für das untere oder für das obere Vorzeichen von $\sqrt{5}$. Dass aber dieses auch die allgemeinste Weise ist, die Gleichung (1) zu befriedigen, sieht man folgendermassen ein. Da die Ausdrücke (2) vier Parameter enthalten, so kann man $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ beliebig wählen, und zwar erhält man bei bestimmter Wahl von $\omega$ dann für $\lambda$ die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \beta, & \beta(\omega + \lambda\omega^4) & \omega + \lambda\omega^4 \\ \gamma, & \gamma(\omega^2 + \lambda\omega^3) & \omega^2 + \lambda\omega^3 \\ \delta, & \delta(\omega^3 + \lambda\omega^2) & \omega^3 + \lambda\omega^2 \\ \varepsilon, & \varepsilon(\omega^4 + \lambda\omega) & \omega^4 + \lambda\omega \end{vmatrix} = 0$$

Zu einem gegebenen Systeme $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ gehören also 2 Werthsysteme $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$, $\sigma$, also auch zwei $\alpha$. Ebenso viele Werthe von $\alpha$ ergeben sich aber auch aus (1), wenn man das Vorzeichen von $\sqrt{5}$ und $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ als gegeben annimmt. Die Formeln (2) liefern also wirklich alle Systeme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, welche der Gleichung (1) genügen.

Für die fragliche Classe von Fünfecken haben also die Identitäten die Form:

$$(3)\quad \begin{gathered} A + B + C + D + E = 0 \\ (1+\lambda)A + (\omega + \lambda\omega^4)B + (\omega^2 + \lambda\omega^3)C \\ + (\omega^3 + \lambda\omega^2)D + (\omega^4 + \lambda\omega)E = 0. \end{gathered}$$

Bei dem hier behandelten Verschwinden der Discriminante $\Delta$ fallen 2 Ecken des Fundamentaldreiecks zusammen. Der besondere Fall, in welchem sie zugleich unbestimmt werden und also die perspectivische Lage eintritt, kommt nur beim regelmässigen Fünfeck vor, bez. bei den Projectionen desselben. Nimmt man nämlich an, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken des 1ten und 2ten Fünfecks sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, dem Centrum der Collineation, so übersieht man sofort aus der geometrischen Configuration, dass jede dieser Verbindungslinien auch Symmetrieaxe wird; durch die 4 Ecken, welche nicht auf dieser Verbindungslinie liegen, gehen 2 Verbindungslinien, welche jene und die Collineationsaxe harmonisch schneiden. Das Fünfeck ist also ein fünffach symmetrisches, und die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ müssen also die Eigenschaft haben, die Bedingung

der Symmetrie noch zu erfüllen, wenn man sie auf alle Weise cyclisch vertauscht. Nun ist jene Bedingung ausgedrückt durch das Verschwinden eines der 15 Factoren, in welche $R$ nach Hermite zerfällt (vergl. Borchardt's Journal Bd. 69, p. 304). Im gegenwärtigen Falle muss also ausser diesem noch jeder Factor von $R$ verschwinden, welcher aus ihm durch cyclische Vertauschung entsteht. Man folgert daraus leicht, dass die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ durch eine lineare Function bez. von 1, $\omega$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$ dargestellt werden, sodass das Fünfeck ein regelmässiges ist. Noch kürzer sieht man es dadurch ein, dass man die Form der Coefficienten $\alpha$, $\beta$ ... aus (3) entnimmt, welche ja hier, bei verschwindender Discriminante, anwendbar ist. Die Bedingung der Symmetrie, etwa:

$$(4)\qquad (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\varepsilon-\delta)+(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)=0,$$

liefert eine quadratische Gleichung in $\lambda$; aber für $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ geben die Formeln (3) ein regelmässiges Fünfeck und (4) ist also erfüllt; daher kann es keine weitere Lösung geben.

Dass die perspectivische Lage für das Verschwinden des anderen Factors $pq$ der Discriminante, also beim Gleichwerden zweier der Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ im Allgemeinen nicht eintritt, lehrt die Gleichung (4) ohne Weiteres.

Göttingen, den 14. Juli 1871.

# Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Theorie der Cremona'schen Transformationen, welche Herr Cremona in den Jahren 1863 und 1865 in zwei Abhandlungen (Mem. dell' Acc. di Bologna, ser. II. t. 2 und 5) entwickelte, ist neuerdings mehrfach behandelt worden. Zunächst gab Hr. Nöther in den Göttinger Nachr. vom 5. Jan. 1870 den Satz, dass alle Cremona'schen Transformationen sich aus quadratischen zusammensetzen lassen; einen Beweis des Satzes gab derselbe bald darauf in Bd. III. dieser Annalen, p. 165. Zugleich mit der letztgenannten Abhandlung erschien eine Uebersicht über die Theorie der Cremona'schen Transformationen, welche Hr. Cayley in den Proceedings of the London Math. Soc. (vol. III. p. 127) gab. Dieselbe enthält insbesondere auch (ohne Beweis) den von Hrn. Clifford unabhängig und zwar, wie es scheint, durch Induction gefundenen Satz über die Zurückführbarkeit auf quadratische Transformationen, und einen darauf gegründeten bequemen Algorithmus zur Darstellung aller Cremona'schen.

Später als diese Abhandlungen erschien ein Aufsatz von Hrn. Rosanes (Borchardt's Journal Bd. 73.), welchem die Literatur des Gegenstandes bis auf den ersten Cremona'schen Aufsatz unbekannt geblieben war. Dieser Aufsatz berührt nur einzelne Theile der Cremona'schen Theorie; aber er enthält, aufs neue selbstständig gefunden, den Satz über die Zurückführung auf eine Folge quadratischer Transformationen und giebt für denselben einen leichten und eleganten Beweis. Hr. Rosanes beweist ausserdem zum ersten Male den Satz, dass alle eindeutig umkehrbaren algebraischen Transformationen der Ebene nothwendig Cremona'sche sein müssen.

Dagegen ist ein anderer sehr bemerkenswerther Satz, welchen Hr. Cremona in seiner zweiten Abhandlung giebt, bisher nicht vollständig bewiesen; es ist der Satz, *dass in der directen und inversen Transformation, welche einander conjugirt sind, die Anzahlen gleichwerthiger Fundamentalpunkte dieselben sind, nur ihre Reihenfolge etwa*

*geändert.* Für den Beweis dieses Satzes deutet Hr. Cremona einen Weg an; ich werde den Beweis im Folgenden führen, mit Hülfe von Principien, welche denen des Hrn. Cremona ganz ähnlich sind, aber in einer Weise, welche eine directe und unmittelbare Einsicht des merkwürdigen Satzes gestattet.

---

Um die Natur der Cremona'schen Transformationen sich völlig klar zu machen, muss man dieselben als abhängig betrachten von einer Anzahl völlig willkürlicher und veränderlicher Parameter. Als solche kann man die Coordinaten der Fundamentalpunkte in der einen oder der anderen Ebene betrachten. Da bei willkürlicher Annahme derselben in einer Ebene alles bis auf projectivische Umformungen der anderen Ebene vollkommen bestimmt ist, und da eine beliebige Annahme der Fundamentalpunkte der einen Ebene im Allgemeinen immer auf eine gleich hohe umgekehrte Transformation führt, so folgt a priori, dass die Anzahl dieser Parameter, d. h. die Anzahl der Fundamentalpunkte beider Ebenen dieselbe sein muss, wie Hr. Cremona auch bewiesen hat. Als unwesentlich werden dabei nur projectivische Umformungen der Ebenen angesehen. Sei $k$ die Anzahl der Fundamentalpunkte in jeder der beiden Ebenen. Man kann, ohne den Charakter der Transformation zu ändern, in jeder Ebene noch 4 Fundamentalpunkten beliebige Lagen geben; und die eigentlichen Parameter der Transformation sind also die Doppelverhältnisse der Strahlbüschel, welche von zweien solcher 4 Punkte je nach den 3 anderen und einem 5ten Fundamentalpunkte gerichtet sind. Jene Zahl ist $2k-8$; man kann sie die absoluten *Invarianten* der Transformation nennen, insofern sie durch projectivische Umformung sich nicht mehr verändern.

Indem man von dieser Auffassung ausgeht, sieht man sofort, dass gemäss der Veränderlichkeit dieser Parameter gewisse Werthesysteme, also gewisse besondere Lagen der Fundamentalpunkte, zunächst ausgeschlossen werden dürfen. Dieselben finden in der allgemeinen Theorie nur als Grenzfälle ihre Stellung. Hierher gehört z. B. derjenige Fall der quadratischen Transformation, in welchem Fundamentalpunkte einander unendlich nahe rücken, oder wo sie sämmtlich in einer Geraden liegen.

---

Bezeichnen wir die beiden Ebenen durch I. und II. Die Fundamentalpunkte von I. seien der Grösse nach geordnet von den Ordnungen $r_1, r_2 \ldots$, sodass $r_1 \gtreqless r_2 \gtreqless r_3 \ldots$; ebenso seien $s_1, s_2 \ldots$ die Ordnungen der Fundamentalpunkte in II. Ihnen entsprechen in I. Fundamentalcurven von den Ordnungen $s_1, s_2 \ldots$, sämmtlich vom Geschlechte $p=0$; ebenso entsprechen den Fundamentalpunkten von I.

in der Ebene II. Fundamentalcurven von den Ordnungen $r_1$, $r_2$ ... und vom Geschlechte $p = 0$.

Kein Fundamentalpunkt kann von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sein, daher auch keine Fundamentalcurve; und wenn wir den Fall $n = 2$ ausnehmen, wo nur Fundamentalcurven $1^{\text{ter}}$ Ordnung auftreten, so kann keine Fundamentalcurve einen höheren als einen $(n-2)$fachen vielfachen Punkt besitzen.

Fundamentalcurven schneiden sich nur in Fundamentalpunkten und können nur in solchen vielfache Punkte haben. Umgekehrt kann ausserhalb solcher Schnittpunkte bez. vielfacher Punkte kein Fundamentalpunkt stattfinden.

*Die $k^{\text{te}}$ Fundamentalcurve in I. geht ebenso oft durch den $i^{\text{ten}}$ Fundamentalpunkt von I., wie die $i^{\text{te}}$ Fundamentalcurve in II. durch den $k^{\text{ten}}$ Fundamentalpunkt von II. geht.* Die Anzahl dieser Durchgänge bezeichne ich durch $\alpha_{ik}$; die Zahlen $\alpha_{ik}$ sind es, welche die conjugirten Lösungen $r$, $s$ der Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sum_i r_i^2 &= n^2 - 1, & \sum_k s_k^2 &= n^2 - 1 \\ \sum_i r_i &= 3n - 3, & \sum_k s_k &= 3n - 3 \end{aligned}$$

mit einander verbinden. Nach dem Vorigen sieht man sofort, *dass, wenn $n > 2$, keine der Zahlen $\alpha_{ik}$ grösser als $n-2$ sein kann.**)

---

Zwischen den Zahlen $r$, $s$, $\alpha$ bestehen nun eine Reihe von Gleichungen, welche die Interpretation folgender Sätze sind:

1. *Die Curven, welche Bilder von Geraden sind, werden von Fundamentalcurven nur in Fundamentalpunkten geschnitten.*

$$(2)\qquad n r_i = \sum_k s_k \alpha_{ik}, \qquad n s_k = \sum_i r_i \alpha_{ik}.$$

2. *Die Fundamentalcurven sind vom Geschlechte $p = 0$.*

$$(3)\qquad \frac{r_i - 1 \,.\, r_i - 2}{2} = \Sigma_k \frac{\alpha_{ik}(\alpha_{ik} - 1)}{2}, \qquad \frac{s_k - 1 \,.\, s_k - 2}{2} = \Sigma_i \frac{\alpha_{ik}(\alpha_{ik} - 1)}{2},$$

3. *Fundamentalcurven schneiden sich nur in Fundamentalpunkten.*

$$(4)\qquad r_i r_{i'} = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{i'k}, \qquad s_k s_{k'} = \sum_i \alpha_{ik} \alpha_{ik'}.$$

4. *Die Anzahl aller Zweige von Fundamentalcurven, welche durch einen Fundamentalpunkt gehen, ist gleich dem Dreifachen seiner Ordnung, vermindert um* 1.

$$(5)\qquad 3 r_i - 1 = \sum_k \alpha_{ik}, \qquad 3 s_k - 1 = \sum_i \alpha_{ik}.$$

---

*) Hr. Cayley hat in den einfachsten Fällen Tafeln gegeben (a. a. O. p. 148 folgg.), aus denen sich ohne grosse Mühe Tafeln für diese Zahlen herstellen lassen.

Combinirt man die Gleichungen (5) mit (3), so erhält man die mit (4) analogen Gleichungen:

$$(6)\qquad r_i^2+1=\sum_k \alpha_{ik}^2,\qquad s_k^2+1=\sum_i \alpha_{ik}^2.$$

Dass die Zahl der $r$ gleich der Zahl der $s$ ist, lehren auch die Formeln (5) in Verbindung mit (1). Denn sei $\varrho$ die Zahl der $r$, $\sigma$ die der $s$, so folgt aus (3), indem man die eine dieser Gleichungen nach $i$, die andere nach $k$ summirt, wobei die rechten Theile einander gleich werden:

$$3\,\Sigma r_i-\varrho=3\,\Sigma s_k-\sigma;$$

aber nach (1) ist $\Sigma r_i=\Sigma s_k$, und daher $\varrho=\sigma$.

Diese Zahl $\varrho=\sigma$ giebt nun auch an, wie viel Reihen die aus den $\alpha_{ik}$ zu bildende Determinante besitzt. Der Werth dieser Determinante folgt, indem man aus (4), (6) ihr Quadrat bildet, gleich den beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} r_1^2+1 & r_1r_2 & r_1r_3 & \dots \\ r_2r_1 & r_2^2+1 & r_2r_3 & \dots \\ r_3r_1 & r_3r_2 & r_3^2+1 & \dots \\ \dots & & & \end{vmatrix}=1+\Sigma r_i^2=n^2$$

$$\begin{vmatrix} s_1^2+1 & s_1s_2 & s_1s_3 & \dots \\ s_2s_1 & s_2^2+1 & s_2s_3 & \dots \\ s_3s_1 & s_3s_2 & s_3^2+1 & \dots \\ \dots & & & \end{vmatrix}=1+\Sigma s_k^2=n^2.$$

Bezeichnet man also den Werth der Determinante durch $\Delta$, so hat man

$$(7)\qquad \Delta=\pm n.$$

*Der absolute Werth der Determinante der $\alpha$ ist $n$.*

Das Vorzeichen bleibt unbestimmt, da die Ordnung der Reihen durch die Anordnungen der $r$, $s$ nach den Grössen nicht völlig bestimmt ist. Denn unter diesen können gleiche sein, deren Folge dann noch beliebig ist, und deren Vertauschung das Zeichen der Determinante ändern würde. Bisher ist kein Beispiel bekannt, in welchem *nicht* gleiche $r$ und gleiche $s$ vorkämen, sodass es scheint, als ob Lösungen mit nur verschiedenen $r$ und $s$ unmöglich sind.

Wegen der Gleichung (7) kann man den Gleichungen (2) durch Auflösung nach den $r$, $s$ die Form geben:

$$(8)\qquad \pm r_i=\sum_k s_k\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{ik}},\qquad \pm s_k=\sum_i r_i\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{ik}}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen erhalten nun die Gleichungen (4), (6) eine sehr einfache Gestalt. Aus dem System

$$r_i r_1 = \sum_k \alpha_{ik}\, \alpha_{ik}$$
$$r_i r_2 = \sum_k \alpha_{ik}\, \alpha_{ik}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$r_i^2 + 1 = \sum_k \alpha_{ik}\, \alpha_{ik}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

ergiebt sich durch Auflösung nach den $\alpha_{ik}$:

$$\pm\, n\alpha_{ik} = r_i \sum_{i'} r_{i'} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{i'k}} + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}},$$

oder, wenn man rechts den Werth der Summe aus (8) einführt:

(9) $$r_i s_k = n\alpha_{ik} \mp \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}},$$

Diese Gleichungen vertreten vollständig die Stelle der Gleichungen (4), (6).

---

Denken wir uns die Determinante der $\alpha$ nun durch horizontale und vertikale Linien getheilt, sodass in jedem der entstehenden Rechtecke nur Horizontalreihen stehen, welche zu *gleichen* $r$, und nur Vertikalreihen, welche zu *gleichen* $s$ gehören. Betrachten wir eins dieser Rechtecke. Da die Gruppe der zu seinen $r$ gehörigen Fundamentalpunkten eine Reihe von Parametern liefert, welche bei der Bildung des den Geraden von II. entsprechenden Systems der Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung in I. vollkommen symmetrisch auftritt, so müssen diese Fundamentalpunkte auch der bei dem Rechteck auftretenden Gruppe der $s$ gegenüber symmetrisch erscheinen. Die in einer Vertikalreihe des Rechtecks stehenden $\alpha$ müssen also in den verschiedenen Vertikalreihen desselben sich wiederholen, und zwar in allen Permutationen und jede Permutation gleich oft. Sei $k$ die Anzahl der Elemente einer Vertikalreihe des Rechtecks, $p$ die Zahl ihrer Permutationen, $l$ die Zahl der Elemente in einer Horizontalreihe des Rechtecks, $q$ die Zahl ihrer Permutationen. Man muss dann haben:

(10) $$l = \mu p,$$

wo $\mu$ eine ganze Zahl. Aber ebenso schliesst man, indem man nur bei der Betrachtung die Rolle der horizontalen und vertikalen Reihen vertauscht, dass auch:

(11) $$k = \nu q,$$

wo $\nu$ eine ganze Zahl.

Nun ist die Zahl der Permutationen immer grösser als die Zahl der Elemente, ausgenommen

1. Wenn alle Elemente gleich sind; dann ist die Zahl der Permutationen gleich 1.

2. Wenn nur ein Element verschieden, die anderen gleich sind; dann ist die Zahl der Permutationen gleich der Zahl der Elemente.

Schliessen wir diese beiden Fälle aus, so sind die Gleichungen (10), (11) unmöglich, denn sie geben $l > k$, $k > l$. Im Falle 1. hat man $p = 1$, $q = 1$, also $k$ und $l$ beliebig; im Falle 2. aber wird $p = k$, $q = l$, also $l = \mu k$, $k = \nu l$. Demnach muss $\mu = \nu = 1$ sein, $k = l$; das Rechteck geht in ein Quadrat über. Mithin gilt der Satz:

*In den Rechtecken von $\Delta$, welche durch die Gruppen gleicher $r$ und gleicher $s$ abgetheilt werden, sind immer die Elemente $\alpha$ gleich; nur in Fällen, wo das Rechteck ein Quadrat ist, kann in jeder Horizontal- und Vertikalreihe ein von den übrigen verschiedenes Glied vorkommen. Diese Glieder sind dann unter sich gleich, und mit ihnen lässt sich durch Umstellung der Reihen die Diagonale des Quadrats ausfüllen.*

Nun kann man ferner zeigen, dass in dem Schema der ganzen Determinante niemals zwei solcher Quadrate horizontal oder vertikal nebeneinander stehen können. Wäre dies nämlich der Fall, so würden wir in zwei Quadraten von gleicher Grösse die abweichenden Elemente an gewissen Stellen finden, die dadurch aufeinander bezogen erschienen. Es würde also eine gewisse Zuordnung der $r$ bez. $s$ der dem einen Quadrat zugehörigen Gruppe gegenüber den $r$ bez. $s$ der dem anderen zugehörigen Gruppe hervorgerufen. Da eine solche Zuordnung wegen der durchaus selbstständig auftretenden Symmetrie innerhalb jeder Gruppe nicht existiren kann, so sieht man den Satz ein:

*Jeder Gruppe von $r$ kann höchstens eine Gruppe von $s$ entsprechen, welche eine gleiche Zahl von Elementen enthält und welche mit jener zusammen auf ein Quadrat von $\alpha$ führt, dessen Elemente nicht sämmtlich gleich sind.*

Aber andererseits muss auch *wenigstens eine* solche Gruppe existiren, denn sonst würden der Gruppe der $r$ lauter Rechtecke entsprechen, welche gleiche Elemente enthielten und die Determinanten der $\alpha$ würden verschwinden, während doch ihr Werth $\pm n$ ist. Nur wenn die Gruppe der $r$ sich auf ein *einziges* reducirt, trifft dieser Schluss nicht zu.

Jeder Gruppe von $r$, welche mehr als ein $r$ enthält, entspricht also irgend eine gleich grosse Gruppe von $s$, und umgekehrt. Lassen wir diese bei Seite, so bleiben endlich noch einzelne $r$ bez. $s$ übrig, welche sämmtlich unter sich verschieden sind; aber die Zahl dieser $r$ muss der Zahl dieser $s$ gleich sein, und sie bilden daher wieder ein System von Gruppenpaaren gleicher Grösse.

Hiermit ist also der Satz bewiesen, welchen Hr. Cremona gegeben hat:

*Die Zahlen, welche angeben, wie viel r jedesmal einander gleich sind, und diejenigen, welche angeben, wie viel s jedesmal einander gleich, sind nur der Anordnung, nicht der Grösse nach verschieden.*

Ich füge noch folgende Bemerkung hinzu. Eines der in der Determinante $\Delta$ auftretenden Quadrate sei:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots \\ \beta & \alpha & \beta & \dots \\ \beta & \beta & \alpha & \dots \\ & \dots & \dots & \end{vmatrix},$$

$a$ sei die Zahl der Reihen des Quadrats. Da horizontal neben dem Quadrat lauter Rechtecke stehen, deren jedes nur gleiche Zahlen enthält, so sieht man, dass wenn man die der ersten Reihe des Quadrates entsprechende Reihe von $\Delta$ von denen abzieht, die den anderen Reihen des Quadrates entsprechen, jede der letztern durch $\alpha - \beta$ theilbar wird. Die Determinante $\Delta$ enthält also den Factor $(\alpha - \beta)^{a-1}$, und man hat den Satz:

*Ist $a$ die Grösse einer Gruppe und sind die Elemente des zugehörigen Quadrates in der Diagonale $\alpha$, ausserhalb derselben $\beta$, so ist $(\alpha - \beta)^{a-1}$ ein Factor von $n$.*

Göttingen, den 21. Juli 1871.

# Bemerkung über irrationale Zahlen.

Von B. Minnigerode in Göttingen.

Es liegt sehr nahe, anzunehmen, dass es nicht möglich ist, durch eine rationale Function von endlichem gegebenem Grade gegebener Irrationalitäten mit rationalen Coefficienten alle Zahlen darzustellen. Da dieser Satz bei manchen Untersuchungen vorauszusetzen ist, so dürfte ein Beweis desselben nicht unerwünscht sein, der im Folgenden gegeben wird.

Führt man die Produkte von Potenzen der gegebenen Irrationalitäten als neue Irrationatitäten ein, so erkennt man, dass der Allgemeinheit der Untersuchung kein Eintrag geschieht, wenn die darzustellenden Zahlen unter der Form:

$$F = \frac{m_1 r_1 + \cdots + m_p r_p}{n_1 r_1 + \cdots + n_p r_p}$$

vorausgesetzt werden, in der $r_1, \ldots r_p$ bestimmte linearunabhängige Zahlen bezeichnen, d. h. Zahlen, zwischen denen eine lineare homogene Gleichung mit rationalen Coefficienten nicht besteht; $m_1, \ldots m_p$, $n_1, \ldots n_p$ sind unbestimmte rationale Zahlen. Es sind nun Zahlen nachzuweisen, die durch die Form $F$ nicht darstellbar sind.

Die Untersuchung mag sogleich dahin verallgemeinert werden, dass die $m$ und $n$ als complexe Zahlen vorausgesetzt werden; d. h. sie sollen rationale Functionen mit rationalen Coefficienten einer Wurzel $\omega$ einer irreducibleu algebraischen Gleichung vom Grade $\lambda$ mit rationalen Coefficienten sein. Die $r$ sind dann auch rücksichtlich dieser complexen Zahlen als linearunabhängig vorauszusetzen.

Die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes leuchtet unmittelbar ein, wenn $p = 1$ ist. Es kann dann $F$ alle Zahlen darstellen, die rational durch $\omega$ ausdrückbar sind, andere aber nicht, insbesondere also nicht Wurzeln irreducibler algebraischer Gleichungen, deren Grad grösser als $\lambda$ ist.

Um die allgemeine Gültigkeit des zu beweisenden Satzes darzuthun, soll gezeigt werden, dass wenn es möglich ist durch $p$ Zahlen $r$ alle Zahlen in der vorausgesetzten Weise darzustellen, dies ebenso durch $1\ p$ — von ihnen möglich ist.

Es mögen für die $m$ und $n$ solche Zahlen gesetzt werden, dass $F$ einer Zahl $\varepsilon$ gleich wird, die Wurzel einer algebraischen Gleichung, aber nicht rational durch $\omega$ ausdrückbar ist. Es ergiebt sich dann eine nicht illusorische Gleichung, vermöge deren man eines der $r$, etwa $r_p$, linear durch die übrigen ausdrücken kann, während die Coefficienten rationale Functionen von $\omega$ und $\varepsilon$ sind.

Nach einem bekannten Lehrsatz von Galois kann man aber $\omega$ und $\varepsilon$ rational durch eine Grösse $\eta$ ausdrücken, die Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist. Geschieht dies, so wird:

$$F = \frac{\mu_1 r_1 + \cdots \mu_{p-1} r_{p-1}}{\nu_1 r_1 + \cdots \nu_{p-1} r_{p-1}},$$

wo die $\mu$ und $\nu$ rationale Functionen von $\eta$ sind. Also ist in der That $F$ in der vorausgesetzten Weise durch $p - 1$ Zahlen $r$ darstellbar. Die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens liefert aber ohne Weiteres den zu beweisenden Lehrsatz.

Göttingen, Juli 1871.

# Ueber die höheren Differentialquotienten.

Von R. Most in Stettin.

1. Der Differentialquotient $\frac{d^n fx}{dt^n}$, in dem $x$ eine Function von $t$ ist, kann durch die Reihe $\sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) A_k$ ausgedrückt werden, wo $f^k(x)$ den $k^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nach $x$ bezeichnet und $A_k$ eine Function $k^{\text{ten}}$ Grades aus einem oder mehreren der $(n-k+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $x$ nach $t$ ist. Es würde keine Schwierigkeit haben, die Coefficienten $A_k$ aus der Lösung des Specialfalles, welchen Götting behandelt hat*), zu entnehmen; jedoch führt die unten in Anwendung kommende Methode kürzer und naturgemässer zum Ziel. Hoppe bestimmt die $A_k$ als lineare Functionen der als bekannt vorausgesetzten $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nach $t$ von $n$ einfachen Functionen der Grösse $x$**); die oben angedeutete allgemeine Lösung gestattet hier die Einführung beliebiger Functionen. Das Wesen des Hoppe'schen Problems liegt darin, dass die Determinante:

$$P = \begin{vmatrix} \varphi^1 & \varphi^2 & \cdot & \cdot & \varphi^n & \frac{d^n \varphi x}{dt^n} \\ \vdots & & & & & \\ \varphi_n^1 & \varphi_n^2 & \cdot & \cdot & \varphi_n^n & \frac{d^n \varphi_n x}{dt^n} \end{vmatrix},$$

wo $\varphi_i^k = \frac{d^k \varphi_i x}{dx^k}$ ist, identisch verschwindet, was sich unmittelbar ergiebt, wenn man inductorisch zeigt, dass $\frac{d^n \varphi_i x}{dt^n}$ eine lineare Function von $\varphi_i^1, \varphi_i^2 \ldots \varphi_i^n$ ist, deren Coefficienten von $\varphi_i$ unabhängig sind; ein strengerer Beweis ergiebt sich unten. — Für einfache und gleichartige Functionen erhält die Determinante $P$ eine sehr einfache Gestalt; setzt

*) Mathematische Annalen B. III, S. 277.

**) Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten S. 73. — Math. Ann. B. IV, S. 86.

man $\psi x = (x - \alpha) \dots (x - \alpha_n)$, wo $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n$ von einander verschieden sind, so ergiebt sich z. B. für beliebige $\alpha$:

$$\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha\psi'(\alpha)}\frac{d^n e^{\alpha x}}{dt^n} + \frac{e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1\psi'(\alpha_1)}\frac{d^n e^{\alpha_1 x}}{dt^n} + \dots \frac{e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n\psi'(\alpha_n)}\frac{d^n e^{\alpha_n x}}{dt^n} = 0$$

$$\frac{x^{-\alpha}}{\alpha\psi'(\alpha)}\frac{d^n x^{\alpha}}{dt^n} + \frac{x^{-\alpha_1}}{\alpha_1\psi'(\alpha_1)}\frac{d^n x^{\alpha_1}}{dt^n} + \dots \frac{x^{-\alpha_n}}{\alpha_n\psi'(\alpha_n)}\frac{d^n x^{\alpha_n}}{dt^n} = 0$$

$$\frac{(\alpha - x)^n}{\psi'(\alpha)}\frac{d^n.\log(\alpha - x)}{dt^n} + \frac{(\alpha_1 - x)^n}{\psi'(\alpha_1)}\frac{d^n\log(\alpha_1 - x)}{dt^n} + \dots \frac{(\alpha_n - x)^n}{\psi'(\alpha_n)}\frac{d^n\log(\alpha_n - x)}{dt^n} = 0.$$

Die Methode, welche zur Ableitung der $A_k$ und nahe liegender Erweiterungen befolgt ist, stützt sich auf den bekannten Integralausdruck des Differentialquotienten.

2. Um in Nachfolgendem die Rechnung mit unendlichen, wenn auch convergenten Reihen zu vermeiden, setze man in dem geschlossenen Integral $\int^{\circ}\frac{(\varphi u - \varphi a)\,du}{u - a}$, welches identisch verschwindet, wenn $\varphi u$ innerhalb der Integralfläche synektisch ist:

$$\frac{1}{u - a} = \frac{1}{u - x} + \frac{a - x}{(u - x)^2} + \dots \frac{(a - x)^n}{(u - x)^{n+1}} + \frac{(a - x)^{n+1}}{(u - x)^{n+1}(u - a)}$$

und erhält dadurch die begrenzte Reihe:

(1) $\varphi a = \varphi x + (a - x) D\varphi x + \dots (a - x)^n D^n\varphi x + (a - x)^{n+1} R_n$,

in der $D^n\varphi x = \frac{d^n\varphi x}{\Pi(n)\,.\,dx^n}$ ist und der endliche Werth von $R_n$ durch das die Punkte $x$ und $a$ umschliessende Integral $\frac{1}{2\pi i}\int^{\circ}\frac{\varphi u\,.\,du}{(u - x)^{n+1}(u - a)}$ gegeben wird.

Für die Restbestimmung einer Function von mehreren Veränderlichen drückt man in dem identisch verschwindenden Integral:

$$\int^{\circ}\frac{f(u, v, w) - f(a, b, c)}{(u - a)(v - b)(w - c)}\,du\,.\,dv\,.\,dw$$

mit einer auf den 3 Integralflächen synektischen Function $f(u, v, w)$ die Factoren $(v - b)^{-1}$ und $(w - c)^{-1}$ entsprechend wie $(u - a)^{-1}$ aus und erhält die Reihe:

(2) $f(a, b, c) = \Sigma\frac{(a - x)^\lambda (b - y)^\mu (c - z)^\nu}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu)\,\Pi(\nu)}\frac{d^{\lambda+\mu+\nu} f(x, y, z)}{dx^\lambda\, dy^\mu\, dz^\nu} + R_n$,

wo $\lambda, \mu, \nu$ sämmtliche Werthe aus $0, 1, 2 \dots n$ durchmachen und $R_n$ nur $(n + 1)^{te}$ Potenzen von $a - x$, $b - y$ und $c - z$ enthält; es ist:

$$R_n = \frac{(a - x)^{n+1}}{(2\pi i)^3}\int^{\circ}\frac{f(u, v, w)}{(u - x)^{n+1}}\frac{du\,.\,dv\,.\,dw}{(u - a)(v - b)(w - c)} + \frac{(b - y)^{n+1}}{(2\pi i)^3}\int^{\circ}\dots$$

$$-\frac{(a-x)^{n+1}(b-y)^{n+1}}{(2\pi i)^3}\int^{\circ}\frac{f(u, v, w)}{(u-x)^{n+1}(v-y)^{n+1}}\frac{du\,.\,dv\,.\,dw}{(u-a)(v-b)(w-c)} - \frac{(b-y)^{n+1}(c-z)^{n+1}}{(2\pi i)^3}\int^{\circ}\dots$$

$$+ (a-x)^{n+1}(b-y)^{n+1}(c-z)^{n+1}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int^{\circ}\frac{f(u, v, w)}{(u-x)^{n+1}(v-y)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\frac{du\,.\,dv\,.\,dw}{(u-a)(v-b)(w-c)}.$$

**3.** Ist bei dem im Anfange eingeführten Differentialquotienten $x = \varphi(t)$, so setze man $\xi = \varphi(\tau)$ und erhält:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)\,.\,d\tau}{\tau - t},$$

mithin:

$$\frac{d^n fx}{dt^n} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)\,d\tau}{(\tau - t)^{n+1}}$$

oder, indem man $f(\xi)$ nach Gleichung (1) entwickelt:

$$(3)\qquad \frac{d^n f(x)}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{f^k(x)}{\Pi(k)}\,\frac{\Pi(n)}{2\pi i}\int \frac{(\xi - x)^k}{(\tau - t)^{n+1}}\,d\tau\,;$$

das Integral $\int\left(\frac{\xi - x}{\tau - t}\right)^{n+1} d\tau$ verschwindet, weil die in ihm enthaltene Function kein Unendliches hat, sondern für $\tau = t$ den endlichen Werth $\left(\frac{dx}{dt}\right)^{n+1}$ erhält. — Den Uebergang von den Integralen der Gleichung (3) zu den sonst gebräuchlichen Substitutionsformen giebt folgende Gleichung:

$$(4)\quad \left[\frac{d^n.\,\psi(u,t)}{du^n}\right]_{u=t} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i}\left[\int \frac{\psi(v,t)\,.\,dv}{(v-u)^{n+1}}\right]_{u=t} = \frac{\Pi(n)}{2\pi i}\int \frac{\psi(v,t)}{(v-t)^{n+1}}\,dv,$$

so dass $\frac{\Pi(n)}{2\pi i}\int \frac{(\xi - x)^k}{(\tau - t)^{n+1}}\,d\tau = \left[\frac{d^n\,(\varphi u - \varphi t)^k}{du^n}\right]_{u=t}$ ist*).

**4.** Drückt man das $\xi$ der Gleichung (3) nach (1) in Potenzen von $\tau - t$ aus und entwickelt:

$$[(\tau - t)\,Dx + (\tau - t)^2\,D^2x + \cdots (\tau - t)^n\,D^n x + (\tau - t)^{n+1}\,R_n]^k$$

als Polynomium, so verschwinden bei der Integration sämmtliche Glieder, welche eine andere Potenz als $(\tau - t)^n$ enthalten. Sammelt man also die zu dieser Potenz gehörigen Glieder, so erhält man:

$$(5)\qquad \frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \Pi(n)\,f^k x\,\Sigma\,\frac{(D^1x)^{\lambda_1}\ldots\ldots(D^r x)^{\lambda_r}}{\Pi(\lambda_1)\ldots\ldots\Pi(\lambda_r)},$$

wo $\lambda_1\,..\,\lambda_r$ für jeden Werth von $k$ alle möglichen ganzen Werthe aus $0, 1, 2\,..\,k$ annehmen, welche den Bedingungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_r = k$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots r\lambda_r = n$$

genügen.

Ist beispielsweise $fx = x^k$, so wird $f^\varkappa x = \varkappa_k\,\Pi(k)\,x^{\varkappa - k}$ **); ist $fx = e^x$ und $x = \alpha t + \beta t^2$, so erhält man:

$$e^{-\alpha t - \beta t^2}\,\frac{d^n.\,e^{\alpha t + \beta t^2}}{dt^n} = \sum_{k=0} \frac{\Pi(n)}{\Pi(k)\,\Pi(n-2k)}\,\beta^k(\alpha + 2\beta t)^{n-2k},$$

---

*) Vergl. Hoppe: a. a. O. S. 148.
**) Vergl. Math. Ann. B. III. S. 283.

die Reihe bricht ab, so bald $n-2k$ negativ wird; ist $x=\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3$, so ergiebt sich:

$$e^{-\alpha t-\beta t^2-\gamma t^3}\,\frac{d^n e^{\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3}}{dt^n}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-\lambda)}(\alpha+2\beta t+3\gamma t^2)^{n-\lambda}\sum_{k\overline{\overline{>}}\frac{1}{2}\lambda}^{k\overline{\overline{<}}\frac{2}{3}\lambda}\frac{\gamma^{2k-\lambda}(\beta+3\gamma t)^{2\lambda-3k}}{\Pi(2k-\lambda)\,\Pi(2\lambda-3k)},$$

wobei $k$ selbstverständlich eine ganze Zahl sein muss.

**5.** Sind $y$ und $z$ Functionen von $t$, welche in $\eta$ und $\zeta$ übergehen, wenn $\tau$ an die Stelle von $t$ gesetzt wird, so ist:

$$\frac{d^n f(x,y,z)}{dt^n}=\frac{\Pi(n)}{2\pi i}\int^{*}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{(\tau-t)^{n+1}}\,d\tau;$$

drückt man $f(\xi,\eta,\zeta)$ nach (2) in Potenzen von $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-z$ aus und diese Grössen wieder nach (1) in Potenzen von $\tau-t$, so hat man bei der Multiplication der Polynome $(\xi-x)^\lambda$, $(\eta-y)^\mu$, $(\zeta-z)^\nu$ nur die zu der Potenz $(\tau-t)^n$ gehörigen Glieder zu sammeln und erhält die Gleichung:

$$\frac{d^n f(x,y,z)}{dt^n} \tag{6}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=n}\Pi(n)\frac{d^k f(x,y,z)}{dx^\lambda\,dy^\mu\,dz^\nu}\sum\frac{(D'x)^{\lambda_1}\ldots(D^px)^{\lambda_p}}{\Pi(\lambda_1)\ldots\Pi(\lambda_p)}\,\frac{(D'y)^{\mu_1}\ldots(D^qy)^{\mu_q}}{\Pi(\mu_1)\ldots\Pi(\mu_q)}\,\frac{(D'z)^{\nu_1}.(D^rz)^{\nu_r}}{\Pi(\nu_1).\Pi(\nu_r)},$$

wo $\lambda$, $\lambda_1\ldots\lambda_p$, $\mu$, $\mu_1\ldots\mu_q$, $\nu$, $\nu_1\ldots\nu_r$ für jeden Werth von $k$ alle möglichen Werthe aus 0, 1, 2 .. $k$ annehmen, welche den Bedingungen genügen:

$$\lambda+\mu+\nu=k$$

$$\lambda_1+\lambda_2\ldots\lambda_p=\lambda\qquad\mu_1+\mu_2\ldots\mu_q=\mu\qquad\nu_1+\nu_2\ldots\nu_r=\nu$$

$$(\lambda_1+2\lambda_2\cdots+p\lambda_p)+(\mu_1+2\mu_2\cdots+q\mu_q)+(\nu_1+2\nu_2\cdots+r\nu_r)=n.$$

Ist z. B. $x=a+bt+ct^2$ und $y=a_1+b_1t+c_1t^2$, so erhält man:

$$\frac{d^n.\,x^\alpha y^\beta}{dt^n}=\Pi(n)\sum_{k=0}^{k\leqq\frac{n}{2}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-k}\alpha^{\lambda|-1}\beta^{n-k-\lambda|-1}x^{\alpha-\lambda}y^{\beta-n+k+\lambda}\times$$

$$\times\sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=\lambda}\frac{(b+2ct)^{\lambda_1}}{\Pi(\lambda_1)}\,\frac{(b_1+2c_1t)^{n-2k-\lambda_1}}{\Pi(n-2k-\lambda_1)}\,\frac{c^{\lambda-\lambda_1}}{\Pi(\lambda-\lambda_1)}\,\frac{c_1{}^{k-\lambda+\lambda_1}}{\Pi(k-\lambda+\lambda_1)},$$

wobei zu beachten ist, dass die $\Pi$-Functionen keine negativen Grössen enthalten dürfen, also nur diejenigen Werthe von $\lambda_1$ in Anwendung kommen, welche der Bedingung: $\lambda-k\overline{\overline{<}}\lambda_1\leq n-2k$ genügen.

**6.** Nimmt man, um andererseits die von Hoppe gegebenen Entwicklungen abzuleiten und zu erweitern, $n$ Functionen $\varphi_1(x),\ldots.\varphi_n(x)$ zu Hilfe, so geben ihre $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nach $t$, wenn sie nach Gleichung (3) entwickelt werden, mit derselben zusammen $n+1$ Gleichungen, aus denen man durch Elimination der $n$ Integralausdrücke

die identisch verschwindende Determinante des ersten Abschnittes erhält. — Besser übersieht man die Bedingungen, denen die Hilfsfunctionen unterworfen sind, wenn man $\varphi_i(\xi)$ nach (1) entwickelt; man erhält:

$$D'.\varphi_i x(\xi - x) + D^2.\varphi_i x(\xi - x)^2 + \cdot\cdot D^n.\varphi_i x(\xi - x)^n = \varphi_i(\xi) - r_i,$$

wo $r_i = \varphi_i(x) + R_{n,i}(\xi - x)^{n+1}$ ist; lässt man $i$ die Werthe $1, 2 \,..\, n$ durchlaufen und bezeichnet die Determinante der linken Seite des erhaltenen Systems von $n$ Gleichungen durch $\Delta$ und den zu $D^h\varphi_i x$ gehörigen Coefficienten ihrer linearen Entwicklung durch $\Delta_i^h$, so ist:

$$\Delta\,.\,(\xi - x)^k = (\varphi_1\xi - r_1)\,\Delta_1^k + (\varphi_2\xi - r_2)\,\Delta_2^k + \cdot\cdot\,(\varphi_n\xi - r_n)\,\Delta_n^k;$$

führt man diese Werthe der Potenzen von $(\xi - x)$ in die Gleichung (3) ein, so erhält man, da die Integrale $\int \frac{r_i d\tau}{(\tau - t)^{n+1}}$ verschwinden:

$$\frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{f^k x}{\Pi(k)} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\Delta_h^k}{\Delta} \frac{d^n.\varphi_h(x)}{dt^n}. \tag{7}$$

Die Hilfsfunctionen $\varphi$ müssen hiernach also so beschaffen sein, dass bei der Entwicklung sämmtlicher $\varphi_i(\xi)$ nach $\xi - x$ die $n$ ersten Potenzen dieser Differenz durch endliche Werthe bestimmbar sind. Die einfachsten Functionen, welche dieser Bedingung genügen, sind die $n$ ersten Potenzen von $\xi$; auf dieselben kommt man unmittelbar, wenn man in (3) $(\xi - x)^k$ nach dem Binomium entwickelt. Will man aber beliebige Grössen $\alpha$ beibehalten, so setze man:

$$\psi(x) = (x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$$

$$\psi'(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)\,..\,(\alpha_i - \alpha_{i-1})\,(\alpha_i - \alpha_{i+1})\,..\,(\alpha_i - \alpha_n)$$

$$= \alpha_i^{n-1} + C_{i_1}\alpha_i^{n-2} + C_{i_2}\alpha_i^{n-3} + \cdots \text{*)}$$

$$\alpha_i\psi'(\alpha_i) = \alpha_i^{n|-1} + B_{i_1}\alpha_i^{n-1|-1} + B_{i_2}\alpha_i^{n-2|-1} + \cdots\cdot \text{**)}$$

$$\psi'(\alpha_i) = (\alpha_i + x)^{n-1} + C_{i_1}^x(\alpha_i + x)^{n-2} + C_{i_2}^x(\alpha_i + x)^{n-2} + \cdots\cdot$$

dann erhält man beispielsweise die Ausdrücke:

$$\frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) \sum_{h=1}^{h=n} \frac{C_{h,\,n-k}}{\psi'(\alpha_h)} \frac{e^{-\alpha_h x}}{\alpha_h} \frac{d^n e^{\alpha_h x}}{dt^n}$$

$$\frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} f^k(x) \sum_{h=1}^{h=n} \frac{B_{h,\,n-k}}{\psi'(\alpha_h)} \frac{x^{-\alpha_h}}{\alpha_h} \frac{d^n x^{\alpha_h}}{dt^n}$$

$$\frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} \frac{f^k x}{\Pi(k-1)} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{C^x_{h,\,k-1}}{\psi'(\alpha_h)} (\alpha_h + x)^n \frac{d^n \log(\alpha_h + x)}{dt^n}.$$

Die unter bestimmten Bedingungen über die Grössen $\alpha$ von Hoppe abgeleiteten Coefficienten ergeben sich aus den Determinanten der Gleichung (7) leicht.

---

*) Vergl. Baltzer, Theorie der Determinanten, 3. Aufl. S. 86.

**) Ueber den Zusammenhang der Grössen $B$ und $C$ vergl. des Verfassers Bemerkung in Schlömilch's Zeitschr. XV. S. 435, Gl. $10_a - 10_c$.

7. Bei mehreren abhängigen Variabeln kann man entsprechend so viel Hilfsfunctionen einführen, dass sämmtliche Produkte:

$$(\xi - x)^{\lambda} \ (\eta - y)^{\mu} \ (\zeta - z)^{\nu}$$

endlich bestimmbar sind; so wird z. B.:

$$(8) \quad \frac{d^n f(x, y)}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \frac{d^k f(x, y)}{dx^{\lambda} \ dy^{k-\lambda}} \sum_{h=1}^{h=\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \frac{\Delta_h^{\lambda, k-h}}{\Delta} \frac{d^n e^{\alpha_h x + \beta_h y}}{dt^n},$$

wenn $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1 \beta_1 & \beta_1^2 & \alpha_1^3 \ldots \beta_1^3 \ldots \alpha_1^n \ldots \beta_1^n \\ \vdots & & & & & \\ \alpha_n & \beta_n & \alpha_n^2 & \alpha_n \beta_n & \ldots & \ldots \ldots \ldots \beta_n^n \end{vmatrix}$ ist

und $\Delta_h^{\lambda, k-\lambda}$ den zu $\alpha_h^{\lambda} \beta_h^{k-\lambda}$ gehörigen Coefficienten ihrer linearen Entwicklung bedeutet; diese Determinanten lassen sich vereinfachen, indem man sie auf Gebilde aus $\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$ zurückführt.

8. Der von Hoppe gewonnene Differentialquotient einer ganzen negativen Potenz*) ist auch ein specieller Fall eines allgemeinen Problems. Mit Hilfe der beliebigen Function $\varphi$ erhält man durch Gleichung (1) den Ausdruck:

$$\frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n+m} \frac{d^k . fx . \varphi x}{\Pi(k) \ dx^k} \frac{\Pi(n)}{2\pi i} \int \frac{(\xi - x)^k \ d\tau}{\varphi(\xi) \ (\tau - t)^{n+1}},$$

wo $m$ eine beliebige ganze Zahl ist; denn, wenn $\varphi(\xi)$ auf der Integralfläche nicht verschwindet, so sind die Integrale für $k > n$ der Null gleich, können also beliebig in den Ausdruck gezogen werden. Bei der Entwicklung nach dem Binomium ergiebt sich:

$$(9) \quad \frac{d^n fx}{dt^n} = \sum_{k=1}^{k=n+m} \frac{1}{\Pi(k)} \frac{d^k . fx . \varphi x}{dx^k} \sum_{h=0}^{h=k} (-1)^{k-h} k_h x^{k-h} \frac{d^n . x^h (\varphi x)^{-1}}{dt^n}.$$

Für $fx = x^{\alpha}$ und $\varphi x = x^{\beta}$, wo $\alpha$ und $\beta$ ganz beliebige Grössen sind, ergiebt sich hiernach:

$$\frac{d^n . x^{\alpha}}{dt^n} = (\alpha + \beta)(n + m - \alpha - \beta)_{n+m} \sum_{h=0}^{h=n+m} (-1)^h (n+m)_n \frac{x^{\alpha+\beta-h}}{\alpha+\beta-h} \frac{d^n . x^{h-\beta}}{dt^n}.$$

---

*) Höhere Diff. S. 162; Math. Ann. B. IV. S. 86.

Stettin, den 14. August 1871.

# Ueber die annähernde Rectification beliebiger Curven.*)

Von J. Somoff in St. Petersburg.

---

In meiner Abhandlung: „Ueber die Beschleunigungen verschiedener Ordnung“ [Sur les accélérations de divers ordres. Mém. de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg T. VIII. Nr. 5. 1864] habe ich aus der Theorie dieser kinematischen Grössen Reihen für folgende Grössen entwickelt: 1) für die Bogensehne einer beliebigen Curve (d. h. einer ebenen oder einer von doppelter Krümmung) und 2) für die Projectionen einer Bogensehne, einerseits auf die Tangente, andererseits auf die Haupt- und Binormale eines der Endpunkte des Bogens.

Diese Reihen können verschiedene Anwendungen haben, unter denen die eine ganz besondere Berücksichtigung verdient, da sie sich zur Auflösung praktischer Fragen nützlich macht. Dieselbe besteht in der Berechnung der angenäherten Länge eines kleinen, aber beliebigen Curvenbogens, aus einem allgemeinen, sehr einfachen Satze, wobei erst die 5te und die höheren Potenzen der relativen Länge eines solchen Bogens zu vernachlässigen sind. Der angedeutete Satz ist folgender:

*Die Länge eines genügend kleinen Bogens ist gleich vier Dritteln seiner Sehne, vermindert um den sechsten Theil einer Summe, welche aus den beiden Projectionen dieser Sehne auf die an die Endpunkte des Bogens geführten Tangenten gebildet ist.*

Aus diesem Satze erhält man dann leicht eine allgemeine Regel zur Bestimmung der angenäherten Länge eines Curvenbogens von beliebiger Grösse, indem man sich nur den ganzen Bogen in genügend kleine Theile getheilt zu denken braucht. Eine solche Regel kann nicht nur zu theoretischen Berechnungen dienen, sondern lässt sich auch zu graphischen Constructionen benutzen, und macht sich ganz besonders nützlich in der descriptiven Geometrie und in der Architektur, wo es oft vorkommt, dass man die ganze Länge eines Bogens zu wissen

---

*) Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, T. XV, pag. 257—261. „Note sur la rectification approximative des courbes quelconques, par J. Somoff.“

braucht, nachdem nur einige nahe zu einander liegende Punkte desselben und die Tangenten in denselben bekannt sind.

In letzterem Falle berechnet man nämlich die Länge des Curvenbogens, ohne denselben hinzuzeichnen gezwungen zu sein.

Der angeführte Satz lässt sich folgendermassen beweisen.

Bezeichnet $\Delta s$ den geringen Zuwachs eines beliebigen Curvenbogens $s$, $\varrho$ und $r$ die Krümmungs- und Schmiegungshalbmesser am Anfangspunkte von $\Delta s$, ist ferner $\omega$ die Sehne von $\Delta s$ und $a$ ihre Projection auf die Tangente am Anfangspunkte von $\Delta s$, so geben die Gleichungen auf Seite 19 meiner Abhandlung über Beschleunigungen verschiedener Ordnung folgende Werthe für $\omega$ und $a$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \omega &= \Delta s - \frac{1}{24\varrho^2}\Delta s^3 - \frac{1}{48}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}\Delta s^4 + \\ &\quad + \frac{1}{720}\left\{\frac{3}{8\varrho^4} + \frac{1}{\varrho^2 r^2} - 4\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}\right\}\Delta s^5 + \cdots \\ a &= \Delta s - \frac{1}{6\varrho^2}\Delta s^3 - \frac{3}{48}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}\Delta s^4 + \cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Wählen wir $\Delta s$ so klein, dass man die mit $\Delta s^5$, $\Delta s^6$ ... behafteten Glieder vernachlässigen kann, und bezeichnen wir mit $\varrho'$ den Krümmunghalbmesser des Bogens am Endpunkte von $\Delta s$, so kann statt $\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}$ der angenäherte Werthe desselben

$$\frac{\frac{1}{\varrho'^2} - \frac{1}{\varrho^2}}{\Delta s}$$

gesetzt werden, wobei der Fehler nur von der Ordnung $\Delta s^5$ sein wird.

Dieses angenommen, erhalten wir:

$$\omega = \Delta s - \frac{1}{24\varrho^2}\Delta s^3 - \frac{1}{48\varrho'^2}\Delta s^3 + \frac{1}{48\varrho^2}\Delta s^3,$$

woraus weiter:

$$(2)\qquad \Delta s = \omega + \tfrac{1}{48}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2}\right)\Delta s^3.$$

Diesen Werth für $\Delta s$ hat zuerst Serret*) gegeben. Setzen wir in den zweiten Theil dieser Gleichung $\omega^3$ statt $\Delta s^3$, so würden wir eine Gleichung erhalten, aus der $\Delta s$ mittelst seiner Sehne und seiner Krümmungsradien $\varrho$ und $\varrho'$ berechnet werden könnte; aber man kann auch einen anderen viel einfacheren Ausdruck für denselben Bogen $\Delta s$ erhalten, der nicht die Krümmungsradien enthält, und zwar folgendermassen:

---

*) Traité de calcul différentiel et intégral de Lacroix. 6$^{me}$ édition. T. 2. p. 175.

Aus den Gleichungen (1) folgern wir:

$$(3) \qquad 3\,\omega - a = 2\,\Delta s + \frac{1}{24\,\varrho^2}\,\Delta s^3,$$

und bezeichnet $a'$ die Projection der Sehne $\omega$ auf die an den Endpunkt von $\Delta s$ geführte Tangente, so erhält man auf ähnliche Weise:

$$(4) \qquad 3\,\omega - a' = 2\,\Delta s + \frac{1}{24\,\varrho'^2}\,\Delta s^3.$$

Aus (3) und (4) erhalten wir:

$$2\,\Delta s = 3\,\omega - \tfrac{1}{2}(a + a') - \tfrac{1}{48}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2}\right)\Delta s^3,$$

welche Gleichung, mit (2) verbunden, die Form

$$3\,\Delta s = 4\,\omega - \tfrac{1}{2}(a + a')$$

annimmt und folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(5) \qquad \Delta s = \tfrac{4}{3}\,\omega - \tfrac{1}{6}(a + a').$$

Dieses ist aber der algebraische Ausdruck des zu beweisenden, oben angeführten Satzes.

Für einen Kreisbogen ist die Summe der Projectionen der Sehne eines Bogens auf die Tangenten an seinen Endpunkten [d. h. $(a + a')$] gleich der Sehne des doppelten Bogens. Für diesen Fall erhält man aus (5) den von Hugens*) zur Bestimmung der angenäherten Länge eines Kreisbogens gegebenen Satz, nämlich:

*Wenn $A$ die Sehne des gegebenen Bogens und $B$ die Sehne der Hälfte desselben bedeutet, so ist die angenäherte Länge des ganzen Bogens gleich:*

$$\frac{8B - A}{3}.$$

In der That, die Gleichung (5) giebt:

$$\tfrac{1}{2}\,\Delta s = \tfrac{4}{3}\,B - \tfrac{1}{6}\,A$$

und folglich:

$$(6) \qquad \Delta s = \frac{8B - A}{3}.$$

Um den Annäherungsgrad der Berechnung nach den Gleichungen (5) und (6) zu übersehen, wählen wir folgende Beispiele:

1. Der Kreisbogen sei von $20^0$; der Radius desselben $= 1$. Dann geben die Tafeln von Hülsse: „Sammlung mathematischer Tafeln“:

$$A = 0{,}3472964$$
$$B = 0{,}1743114,$$

folglich:

---

*) De circuli magnitudine inventa — Isaaci Newtoni Opuscula, Lausanae et Genevae 1754, Opusculum X, Epistola prior ad H. Oldenburgium, p. 320. — J. Wallis, a treatise of Algebra. London 1685, p. 345.

$$\frac{8B - A}{3} = 0{,}3490649\,.$$

Dieses Resultat unterscheidet sich um weniger als

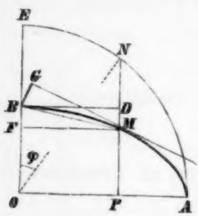
$$0{,}000001$$

von der wahren Länge dieses Bogens, der

$$= 0{,}349065850040$$

ist. —

2. Nehmen wir die elliptische Function 2ter Gattung $E(\varphi, \varkappa)$, für die Amplitude $\varphi = 10^0$ und den Modul $\varkappa = \sin 45^0$. Als Linieneinheit sei die Hälfte der grossen Axe einer Ellipse genommen; $AB$ sei ein Quadrant dieser Ellipse, $\varkappa$ die Excentricität und $\varkappa'$ die kleine Axe derselben. Auf dem angegebenen elliptischen Bogen nehmen wir einen Punkt $M$, dessen Ordinate $PM$ ist. Zeichnen wir, den Punkt $O$ als Centrum und $OA = 1$ als Halbmesser genommen, den Kreisquadranten $AE$, so schneidet die verlängerte Ordinate des Punktes $M$ diesen Kreisbogen in $N$. Verbinden wir nun $N$ mit $O$, so ist:




$$\sphericalangle EON = \varphi \quad \text{und} \quad BM = E(\varphi, \varkappa)\,.$$

Construiren wir die Projectionen der Sehne $BM$ auf die Tangenten der Ellipse in den Punkten $B$ und $M$, so erhalten wir:

$$a = BD, \quad a' = MG$$

und setzt man:

$$\sphericalangle MBD = \sphericalangle BMF = \psi, \qquad \sphericalangle GMF = \Theta,$$

so findet man leicht:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \psi = \varkappa' \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}, & \operatorname{tang} \Theta = \varkappa'^2 \operatorname{tang} \varphi \\ \omega = \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \quad a = \sin \varphi, & a' = \omega \cos (\Theta - \psi)\,. \end{cases}$$

Wählen wir $\varphi = 10^0$, $\varkappa = \sin 45^0$, so finden wir:

$$\omega = 0{,}1739800$$

$$a = 0{,}1736482$$

$$a' = 0{,}1737733\,,$$

wonach

$$E(10^0, \sin 45^0) = \tfrac{4}{3}\omega - \tfrac{1}{2}(a + a') = 0{,}1740695\,.$$

Dieser Zahlenwerth unterscheidet sich von dem von Legendre*) für denselben Bogen gegebenen:

$$0{,}1740915\,,$$

nicht mehr als um:

$$0{,}000023\,.$$

---

*) Traité des fonctions elliptiques.

3. Für den Bogen $E(20^0, \sin 45^0)$ finden wir nach obigen Formeln (7):

$$\omega = 0{,}3446686$$
$$a = 0{,}3420201$$
$$a' = 0{,}3441268,$$

folglich den Bogen:

$$= \frac{4\omega}{3} - \frac{1}{6}(a + a') = 0{,}3448670.$$

Dieses Resultat unterscheidet sich um weniger als 0,0007087 von der Grösse dieses Bogens = 0,3455756, die in den Tabellen von Legendre angegeben ist.

St. Petersburg, im August 1871.

# Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven.

Von A. Brill in Darmstadt.

Der vorliegende Aufsatz bildet die Einleitung zu dem nachfolgenden „Ueber zwei Berührungsprobleme". Man wird dort auf die Aufgabe geführt, die Bedingung dafür anzugeben, dass 3 Curven, welche eine gewisse Anzahl von gegebenen Punkten gemeinsam haben, sich in einem weiteren Punkte schneiden. Je nachdem die Gleichungen der Curven alle oder nur theilweise durch die Coordinaten der gemeinsamen Punkte *identisch* erfüllt werden, ist diese Aufgabe eine durchaus verschiedene. Im Nachfolgenden werden nur 2 von den möglichen Fällen betrachtet.

Zunächst werden alle 3 Curvengleichungen als identisch erfüllbar vorausgesetzt. Im Anschluss an eine Bezeichnung, deren sich Herr Cayley für einen ähnlichen Begriff bedient hat*), will ich die „reducirte Resultante" von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten, welche durch ein oder mehrere Werthsysteme der Unbekannten identisch erfüllt werden, diejenige ganze Function der Coefficienten nennen, deren Verschwinden die Existenz einer weiteren gemeinsamen (von den gegebenen verschiedenen) Lösung anzeigt. An einzelnen Beispielen (§§ 1. 3.) soll gezeigt werden, wie man einen solchen Ausdruck bildet, sodann wird der Grad desselben in den Coefficienten der 3 Gleichungen **) allgemein bestimmt (§§ 2. 4.).

Uebergehend zu dem wichtigeren Falle (der eigentlich diese Betrachtungen veranlasst hat), dass die Coordinaten eines der gemeinsamen Punkte eine der drei Gleichungen nicht identisch befriedigen, wird (§§ 5. 6.) ein Satz bewiesen, welcher die Zahl derjenigen Punktepaare $x$, $\alpha$ auf einer algebraischen Curve von beliebigem Geschlecht bestimmen lehrt, welche zugleich 2 Bedingungsgleichungen, die man zwischen den Coordinaten der Punkte $x$ und $\alpha$ angenommen hat, genügen***). Diese Bedingungsgleichungen (welche übrigens auch beide durch noch andere Werthepaare identisch befriedigt werden können) lassen sich

*) „Recherches sur l'élimination etc." Crelle-Borchardt, Bd. 34.

**) Wir sehen in der Folge die Coefficienten an lediglich als Functionen der Coordinaten $\alpha$, $\beta$ eines allen Curven gemeinsamen Punktes, den wir kurzweg mit $\alpha$ bezeichnen (ebenso wie $x$ einen Punkt mit den Coordinaten $x$, $y$ bedeutet).

***) Einen geometrischen Beweis dieses Satzes und damit in Verbindung den eines verwandten, welcher die Ausdehnung des Correspondenzprincips von Chasles auf Curven von allgemeinem Geschlecht enthält, hat der Verf. in den Gött. Nachrichten vom Oct. 1871 gegeben.

bekanntlich für Curven vom Geschlecht Null in algebraische Gleichungen zwischen den den Punkten $x$ und $\alpha$ zugehörigen Parametern überführen, deren Resultante sich, auch wenn gleiche Wurzeln auftreten, nach bekannten Regeln bestimmen lässt.

Die entsprechende Aufgabe für Curven von allgemeinem Geschlecht zu lösen, ist die in § 6. gegebene Formel bestimmt. Die Beschränkungen, welchen der Gebrauch derselben unterliegt, lassen sich am besten aus der in jenem nachfolgenden Aufsatze gegebenen Anwendung erkennen; sowie auch aus den Anwendungen auf die Theorie der Raumcurven, welche in § 7. beispielsweise aufgeführt sind, sich manches Ergänzende ergiebt. Noch sei erwähnt, dass die dort erhaltenen Formeln mit den von Hrn. Zeuthen in seiner erschöpfenden Abhandlung „sur les singularités des courbes gauches" (Annali di mat., ser. 2. t. III.) gegebenen übereinstimmen.

## § 1.

Gegeben seien die Gleichungen von 3 Curven:

(1) $$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0, \quad \psi(xy) = 0,$$

die in der Folge öfters mit $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ oder auch kurzweg mit $f$, $\varphi$, $\psi$ bezeichnet werden mögen. Dieselben seien von den resp. Ordnungen $n$, $p$, $q$ und sollen durch die Coordinaten $\alpha$, $\beta$ eines Punktes $\alpha$ alle 3 identisch befriedigt werden. Es ist die Bedingung zu finden, welche nothwendig erfüllt sein muss und hinreicht, um die Existenz eines weiteren gemeinsamen Punktes $x$ (Coordinaten $x$, $y$) anzuzeigen. Geometrisch aufgefasst würde diese Bedingung den geometrischen Ort eines Punktes $\alpha$ geben, in welchem sich die 3 Curven $f$, $\varphi$, $\psi$ schneiden müssen, damit sie noch einen weiteren gemeinschaftlichen Punkt besitzen.

Die Resultante $R$ der 3 Gleichungen (1) verschwindet unter obiger Voraussetzung identisch. Man bilde statt dessen die Resultante der 3 nachfolgenden*):

(2) $$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0, \quad \psi(xy) + \varepsilon . \Psi(xy) = 0,$$

wo $\varepsilon$ eine gegen Null convergirende Grösse ist und $\Psi$ eine beliebig gewählte Function, welche in den Coordinaten $x$, $y$ und $\alpha$, $\beta$ von derselben Ordnung wie $\psi$ ist.

Diese Resultante hat alsdann die Form:

$$P = R + \varepsilon . \delta R + \varepsilon^2 . \delta^2 R + \cdots\cdots$$

Da $R$ verschwindet und $\varepsilon$ gegen Null convergirt, so ist derjenige Theil, welcher im vorliegenden Falle die Stelle der Resultante vertritt,

*) Dieses Verfahren wurde in den „Abel'schen Functionen" von Clebsch und Gordan auf einen ähnlichen Fall angewendet. Vergl. auch Serret's Höhere Algebra, I. Bd.

der Coefficient $\delta R$ der ersten Potenz von $\varepsilon$. Haben die 3 Curven einen zweiten gemeinsamen Punkt, so muss auch $\delta R$ verschwinden. Umgekehrt jedoch ist das Verschwinden von $\delta R$ nicht die nothwendige Bedingung für die Existenz eines zweiten, allen dreien gemeinsamen Schnittpunktes. Man kann nämlich zeigen, dass $\delta R$ zwei Factoren besitzt, deren Verschwinden diese Bedingung nicht ausdrückt und welche demnach unwesentlich sind.

Zu dem Zwecke stellen wir nach Poisson die Resultanten $P$ in Form eines Produktes von irrationalen Functionen der Coefficienten dar.

Seien $1, 2, 3, \ldots . np - 1, np$ die Schnittpunkte der beiden Curven $f$ und $\varphi$, von welchen der Punkt (1) der allen gemeinsame $\alpha$ sein möge. Setzt man diese der Reihe nach in $\psi + \varepsilon . \Psi$ ein und bildet das Produkt, so erhält man die Resultante $P$ in der Form:

$$P = (\psi + \varepsilon . \Psi)_\alpha . (\psi + \varepsilon . \Psi)_2 . (\psi + \varepsilon . \Psi)_3 \ldots\ldots (\psi + \varepsilon . \Psi)_{np} .$$

Vergleicht man nun die Coefficienten von $\varepsilon$ in diesem und dem vorigen Ausdrucke für $P$, so kommt, indem man $(\psi)_\alpha = 0$ berücksichtigt:

$$\delta R = (\Psi)_\alpha . (\psi)_2 . (\psi)_3 \ldots . (\psi)_{np} .$$

Man bemerkt zunächst, dass der Factor $(\Psi)_\alpha$ nur dann als ganze Function auftritt, wenn die Coordinaten $\alpha$ explicite gegeben sind, also bei der Darstellung als bekannt adjungirt werden können.

Der übrig bleibende Theil von $\delta R$ ist in den Coefficienten von $\psi$ vom Grade $np - 1$, in denen von $f$ und $\varphi$ resp. vom $pq^{\text{ten}}$ und $nq^{\text{ten}}$ Grade. (Hier wie in der Folge betrachten wir die Coefficienten der 3 Gleichungen als Functionen der Coordinaten $\alpha$, $\beta$ des beweglichen Punktes $\alpha$.) Da nun aber die reducirte Resultante, welche wir suchen, gegen die 3 Functionen $f$, $\varphi$, $\psi$ das gleiche Verhalten zeigen muss, so liegt es nahe, auf die Existenz von einem weiteren *„speciellen Factor"* zu schliessen, durch welchen sich die reducirte Resultante von $\delta R$ unterscheidet und welcher hier in den Coefficienten von $\varphi$ und $\psi$ je vom ersten Grade sein wird. Dies wird durch folgende Betrachtung bestätigt. Der Punkt $\alpha$, dessen Coordinaten in den 3 Curvengleichungen vorkommen, kann im Allgemeinen auf der Ebene noch jede beliebige Lage haben. So oft nun für irgend eine solche Lage der Ausdruck:

$$(\varphi f)_\alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}$$

(wo der eine Index links die beiden angehängten Gleichungen rechts ersetzen soll) verschwindet*), stimmen in diesem Punkte entweder die Werthe $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, gebildet für die beiden Curven $f$ und $\varphi$, überein, oder

*) Im Allgemeinen geschieht dies nur in der ersten Ordnung.

eine der beiden besitzt in diesem Punkte einen Doppelpunkt. In beiden Fällen verschwindet aber einer der $np-1$ letzten Factoren von $\delta R$, somit auch $\delta R$ selbst. In Bezug auf die Coordinaten $\alpha$, $\beta$ repräsentirt also $\delta R = 0$ eine Curve, welche alle Punkte enthält, für die der obige Ausdruck verschwindet. $(\varphi f)_\alpha$ ist demnach Factor von $\delta R$.

Die beiden oben gefundenen Factoren von $\delta R$ können nun aber nicht zugleich solche der reducirten Resultante sein, weil ihr Verschwinden im Allgemeinen nicht die Existenz eines weiteren gemeinsamen Schnittpunktes der 3 Curven ausserhalb $\alpha$ anzeigt. Sie sind somit „specielle" Factoren von $\delta R$ und erst auszuscheiden, ehe man die reducirte Resultante erhält.

Man kann jene beiden Factoren noch zu einem einzigen Ausdrucke zusammenziehen, welcher in Bezug auf die Coefficienten der Gleichungen (2) symmetrisch ist.

Die Functionaldeterminante $(f\varphi\Psi)$ nämlich der Functionen $f$, $\varphi$, $\Psi$, genommen in Bezug auf homogene Coordinaten $\left(\frac{x_1}{x_3} = x,\ \frac{x_2}{x_3} = y\right)$, lässt sich, wenn man in dieselbe die Coordinaten $\alpha$, $\beta$ des gemeinsamen Punktes statt $x$, $y$ einsetzt, mit Rücksicht auf die Gleichungen $f(\alpha\beta) = 0$, $\varphi(\alpha\beta) = 0$ so umgestalten, dass dieselbe in die beiden speciellen Factoren von $\delta R$ zerfällt. Man hat also die Gleichung:

$$\delta R = \varrho \,.\, (f\varphi\Psi)_\alpha,$$

wo $\varrho$, wie gleich gezeigt werden soll, die *reducirte Resultante* ist.

## § 2.

Es ist noch zu beweisen, dass jener Ausdruck $\varrho$, welcher in den Coefficienten der 3 Gleichungen $f$, $\varphi$, $\psi$ bezw. vom Grade $pq-1$, $qn-1$, $np-1$ ist, in der That die reducirte Resultante der 3 Gleichungen ist.

Wir führen statt dessen allgemein den Beweis, *dass 3 Curven $f$, $\varphi$, $\psi$ von der Ordnung bezw. $m$, $p$, $q$, welche in einem Punkte $\alpha$ beliebig vielfache Punkte besitzen, deren Zweige sich auch gegenseitig berühren können*), eine reducirte Resultante haben, welche in den Coefficienten der 3 Gleichungen bezw. vom Grade $pq-\nu$, $qn-\pi$, $np-\varkappa$ ist, wo $\nu$, $\pi$, $\varkappa$ die Anzahl der in $\alpha$ fallenden Schnittpunkte von bezw. $\varphi$ und $\psi$, $\psi$ und $f$, $f$ und $\varphi$ ist.*

---

*) Der Verlauf der je zweien Curven gemeinsamen Bogenelemente in einem allen gemeinsamen Punkte $\alpha$ möge in der Folge als gegeben betrachtet werden, und zwar so, dass für irgend zwei in $\alpha$ sich $r$ fach berührende Zweige die $r$ ersten Differentialquotienten *identisch* übereinstimmen.

Variirt man nämlich, wie dies in dem obigen besonderen Falle geschehen, die Coefficienten von einer der Curvengleichungen $\psi = 0$, indem man statt dessen $\psi + \varepsilon \,.\, \Psi = 0$ schreibt, und entwickelt die Resultante von dieser Function und $f$ und $\varphi$ nach Potenzen von $\varepsilon$, so verschwindet identisch $R$, $\delta R$, .... $\delta^{\varkappa-1} R$; die Stelle der Resultante vertritt der Coefficient von $\varepsilon^{\varkappa}$:

$$\delta^{\varkappa} R = (\Psi)_{\alpha}^{\varkappa} \,.\, (\psi)_{\varkappa+1} \,.\, (\psi)_{\varkappa+2} \,\ldots\, (\psi)_{np},$$

indem man durch Indices die Schnittpunkte von $f$ und $\varphi$ bezeichnet, welche der Reihe nach in $\psi + \varepsilon\Psi$ eingesetzt werden. Zunächst ist der Factor $\Psi_{\alpha}^{\varkappa}$ dem Begriff der reducirten Resultante fremd. Man kann aber auch noch andere Punkte $(\alpha, \beta)$ finden, für welche $\delta^{\varkappa} R$ verschwindet, ohne dass deshalb $\varphi$, $f$, $\psi$ ausserhalb $\alpha$ einen weiteren Schnittpunkt gemeinsam haben. Dies erfolgt nämlich immer dann, wenn ein weiterer Schnittpunkt von $\varphi$ und $f$ nach $\alpha$ rückt, weil immer dann einer der $np - \varkappa$ irrationalen Factoren von $\delta^{\varkappa} R$ verschwindet. Man denke sich nun alle möglichen Ausdrücke aufgestellt, deren Verschwinden aussagt, dass in den Punkt $\alpha$, in welchem sich bereits $\varkappa$ Schnittpunkte von $f$ und $\varphi$ befinden, ein $(\varkappa + 1)^{\text{ter}}$ solcher fällt. Dieselben sind Functionen nur noch von den Coefficienten von $\varphi$ und $f$, und endlich an Zahl.

Wir betrachten einen solchen nicht zerfallenden Ausdruck. Da eine unendliche Zahl von Werthen $(\alpha, \beta)$ zugleich diesen und den Ausdruck $\delta^{\varkappa} R$ zum Verschwinden bringt, so muss derselbe Factor von $\delta^{\varkappa} R$ sein. Alle Ausdrücke der geschilderten Art, welche nicht zerfallen, sind demnach Factoren von $\delta^{\varkappa} R$. Es ist indess nicht immer leicht zu ermitteln, wie oft ein solcher Factor in $\delta^{\varkappa} R$ auftritt. Weil von den $np - \varkappa$ irrationalen Factoren von $\delta^{\varkappa} R$ nur dann einer verschwindet, wenn entweder der entsprechende Schnittpunkt ausserhalb $\alpha$ sich befindet, in welchem Falle $\psi$ ausser $f$ und $\varphi$ für diesen Punkt verschwindet, oder wenn der entsprechende Punkt nach $\alpha$ fällt, so müssen, da die Punkte der letzteren Art sich zu Factoren von $\delta^{\varkappa} R$ vereinigen, welche man ausscheiden kann, die Punkte der ersteren Art den übrig bleibenden Factor zum Verschwinden bringen; es muss also eine reducirte Resultante existiren.

Dieser Ausdruck muss von seiner Entstehungsweise unabhängig sein. Ebenso, wie sich nun der Grad desselben in Bezug auf die Coefficienten von $\psi$ durch Variation dieser letzteren als $mp - \varkappa$ ergeben hat, so erhält man durch Variation von $\varphi$ bezw. $f$ für den Grad der Coefficienten in diesen Functionen $qr - \pi$; $pq - \nu$.

Diese Bemerkung gewährt, wie wir sehen werden, bei der Aufstellung der Potenz der Divisoren von $\delta^{\varkappa} R$ einen Anhaltspunkt.

## § 3.

Es mögen zunächst für einige weitere Beispiele die speciellen Factoren ermittelt werden.

Wenn die Curve $\psi$ in dem gemeinsamen Punkte $\alpha$ einen Doppelpunkt besitzt, so mag $\varphi$ variirt werden. $\delta^2 R$ verschwindet alsdann allemal, wenn die Curven $\psi$ und $f$ in $\alpha$ einen weiteren Schnittpunkt besitzen. Nun ist aber die Gleichung:

$$0 = [\varphi f^2]_\alpha = \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}$$

nur dann erfüllt, wenn entweder $f$ in $\alpha$ einen Doppelpunkt besitzt, oder wenn $f$ einen Zweig von $\varphi$ in $\alpha$ berührt. Da aber in beiden Fällen einer der irrationalen Factoren von $\delta^2 R$ verschwindet, so ist $[\varphi f^2]_\alpha$ Factor von $\delta^2 R$, und zwar specieller Factor. Die reducirte Resultante $\varrho$ ist demnach in den Coefficienten von $f$, $\varphi$, $\psi$ bezw. vom $pq-2$, $qn-2$, $np-1^{\text{ten}}$ Grade, wie dies auch aus dem Satz in § 2. hervorgeht.

Wenn man statt der Coefficienten von $\varphi$ die von $\psi$ variirt, so verschwindet $\delta R$ allemal dann, wenn $(f\varphi)_\alpha$ (s. oben § 1.) verschwindet. Weil aber $\delta R$ alsdann nicht bloss einfach Null wird, sondern, da $\psi$ in $\alpha$ einen Doppelpunkt besitzt, auch die ersten partiellen Differentialquotienten von $\delta R$ verschwinden, wenn der Punkt $\alpha$ so beschaffen ist, dass sich $\varphi$ und $f$ in $\alpha$ berühren, so wird $\delta R$ wie $(f\varphi)_\alpha^2$ Null. Die reducirte Resultante ist demnach darstellbar durch:

$$\varrho = \frac{\delta R}{\Psi_\alpha\cdot(f\varphi)_\alpha^2}\,.$$

Ueberhaupt: besitzt $\psi$ in dem gemeinsamen Punkte $\alpha$, durch welchen die Curven $\varphi$ und $f$ einfach hindurch gehen, einen $\varkappa$fachen Punkt, so variire man $\psi$. $\delta^\varkappa R$ ist alsdann zu dividiren durch $\Psi_\alpha.(\varphi f)_\alpha^\varkappa$, wo $(\varphi f)_\alpha = 0$ wie oben die Bedingung für eine Berührung von $\varphi$ und $f$ in $\alpha$ ist.

Wenn $\varphi$ und $f$ sich in $\alpha$ berühren, ohne dass die beiden die Curve $\psi$, welche einfach hindurch geht, berühren, so transformire man die Gleichungen so, dass $\alpha$ in den Ursprung fällt. Dann sind die Gleichungen von der Form:

$$\psi = xu + yv;\quad f = c(x+\varkappa y) + \omega;\quad \varphi = c'(x+\varkappa y) + \omega';$$

wo $\varkappa$, $c$, $c'$ Constante; $u$, $v$ beliebige ganze Functionen von $x$ und $y$; $\omega$, $\omega'$ aber solche sind, deren Glieder niedrigster Dimension in $x$ und $y$ von der $2^{\text{ten}}$ Dimension sind. Man variire $\psi$ und dividire durch:

$$\Psi_0{}^2\,.\,(cw' - wc')_0\,,$$

wo der angehängte Index bedeutet, dass für $x$, $y$ 0, 0 einzusetzen ist.

Hätte man $\varphi$ statt $\psi$ variirt, so wäre durch:

$$\Phi_0 \,.\, (u\varkappa - v)_0^2 \,.\, c$$

zu dividiren gewesen. Das Verschwinden von $c$ zeigt die Existenz eines Doppelpunktes von $f$ in dem Ursprung des Coordinatensystems an; das Verschwinden von $u\varkappa - v$ eine Berührung von $\psi$ mit den beiden Curven $\varphi$ und $f$.

Es ist in vielen Fällen nicht schwer, sich direct von der Möglichkeit der Ausscheidung der speciellen Factoren zu überzeugen.

Berühren sich z. B. alle 3 Curven $f$, $\varphi$, $\psi$ in $\alpha$, so transformire man so, dass $\alpha$ in den Ursprung fällt und die $Y$-Axe gemeinsame Tangente wird. Dann haben die Gleichungen die Form:

$$\psi = xu + y^2 v\,; \quad \varphi = xu' + y^2 v'; \quad f = xu'' + y^2 v''.$$

Berechnet man die Werthepaare $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, .... welche $\varphi = 0$ und $f = 0$ gleichzeitig befriedigen (ausser $x = y = 0$) und bildet das Product:

$$\delta^2 R = (xu + y^2 v)_3 \, (xu + y^2 v)_4 \ldots\ldots$$

so scheidet dasselbe den Factor $y_3^2 y_4^2 \ldots$ aus. Derselbe ist aber das Quadrat desjenigen Ausdrucks, dessen Verschwinden das Zusammenfallen eines der Schnittpunkte 3, 4, .... mit $x = y = 0$ aussagt, also gleich $u'v'' - v'u''$.

Ueberhaupt: berühren die Curven $f$, $\varphi$, $\psi$ in dem gemeinsamen Punkt $\alpha$, durch welchen jede einfach hindurchgeht, einander $i$ punktig ($i + 1$ gemeinsame Schnittpunkte), so dass also die Differentialquotienten bis zum $i$ in diesem Punkt identisch übereinstimmen, so erhält man die reducirte Resultante, indem man $\delta^{i+1} R$ dividirt durch die $(i + 1)^{\text{te}}$ Potenz von $\Psi_\alpha \,.\, [\varphi f]_\alpha$, wenn $[\varphi f]_\alpha = 0$ die Bedingung dafür ist, dass $\varphi$ und $f$ sich in $\alpha$ $(i + 1)$ punktig berühren. Diese Bedingung ist unter Adjunction der gemeinschaftlichen $i$ ersten Differentialquotienten linear in Bezug auf die Coefficienten von $\varphi$ und $f$.

## § 4.

Ausser dem beweglichen Punkt $\alpha$ mögen jetzt noch andere festliegende Punkte $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$ (Coordinaten $\lambda_i \mu_i$) den Curven $f$, $\varphi$, $\psi$ gemeinsam sein. Es sei zunächst die Annahme, dass ausser einem einfachen Schnittpunkt $\alpha$ noch ein einfacher solcher $\lambda$ gemeinsam sei.

Man variire etwa $\psi$. $R$ und $\delta R$ verschwinden identisch, weil $\psi_\alpha$ und $\psi_\lambda$ Null sind. Es bleibt zu untersuchen:

$$\delta^2 R = \Psi_\alpha \,.\, \Psi_\lambda \,.\, \psi_3 \,.\, \psi_4 \ldots\ldots \psi_{mp}\,.$$

Das Produkt: $(\varphi f)_\alpha (\varphi f)_\lambda$ (die Bezeichnung wie in § 1.) verschwindet nur für diejenigen Werthepaare $\alpha$, $\beta$, welche so beschaffen sind, dass entweder $\varphi$ und $f$ sich in den Punkten $\alpha$ oder $\lambda$ berühren, oder dass

eine derselben in einem der beiden Punkte einen Doppelpunkt besitzt. Allemal dann verschwindet aber auch einer der irrationalen Factoren von $\delta^2 R$. Nur für das eine Werthepaar $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, für welches jeder der beiden Factoren des Productes $P$ verschwindet, ist es nicht immer unmittelbar ersichtlich, dass $\delta^2 R$ von derselben Ordnung wie $P$ zu Null wird*). Indess muss dies, wenn $\alpha$ frei beweglich ist, um deswillen der Fall sein, weil 2 Curven nicht in allen bis auf einen Punkt übereinstimmen können. Die Division mit $P$ ist demnach ausführbar.

Diese Schlüsse lassen sich auf den allgemeineren Fall übertragen, dass die 3 Curven ausser in dem variabeln Punkt $\alpha$ noch in *mehreren* festen Punkten $\lambda_1 \lambda_2 \dots$ mehrfache Punkte mit sich berührenden Zweigen besitzen. *Die auszuscheidenden Factoren sind dieselben, als ob bloss jeder der gemeinsamen Punkte allein vorhanden wäre.*

Wenn dagegen $\alpha$ nicht frei beweglich ist, sondern z. B. auf einer Curve zu bleiben gezwungen ist, so ist der obige Schluss nicht mehr zutreffend; man muss alsdann eine direkte Untersuchung darüber anstellen, ob $\delta^2 R$ für $\alpha = \lambda_i$, $\beta = \mu_i$ ebenso oft verschwindet, wie diejenigen Ausdrücke, welche zu speciellen Factoren werden, wenn dies stattfindet**). Auf diesen Fall kommen wir weiter unten zurück.

Hat man nun 3 Curven gegeben, deren Gleichungen:

$$p(x, \alpha) = 0 \quad q(x, \alpha) = 0 \quad r(x, \alpha) = 0,$$

sowohl die Coordinaten des Punktes $\alpha$ (bezw. in der $p'.$, $q'.$, $r'.$ Ordnung), wie die des Punktes $x$ (bezw. in der $p'$, $q'$, $r'$ Ordnung) enthalten. Dieselben mögen in dem frei beweglichen Punkt $\alpha$ bezw. einen $b$, $c$, $d$ fachen Punkt besitzen, und ausserdem noch alle drei durch gewisse feste Punkte der Ebene $\lambda_1$, $\lambda_2$, .... beliebig oft hindurchgehen. Schneiden sich $q$ und $r$ ausser in diesen festen Punkten noch in $u$ Punkten (von welchen $c\,.\,d$ in den Punkt $\alpha$ fallen), $r$ und $p$ noch in $v$, $p$ und $q$ noch in $w$ Punkten, von welchen bezw. $d\,.\,b$, $b\,.\,c$ in $\alpha$

---

*) Wenn $\lambda$ in den Ursprung verlegt wird, so hat im Allgemeinen eine Curvengleichung, welche sowohl für $x = \lambda$, wie für $x = \alpha$ je einfach identisch verschwindet, die Form:

$$(ux + vy)(x - \alpha) + (px + qy)(y - \beta) + (\beta x - \alpha y) r = 0,$$

wo $pquvr$ Functionen von $x$ und $\alpha$ sind. Diese Curve hat aber für $x = \alpha = 0$, $y = \beta = 0$ einen Doppelpunkt. Wenn dies für $f$, $\varphi$, $\psi$ gleichzeitig eintritt, so fällt ein vierfacher Punkt von $\delta^2 R = 0$ in $\alpha = \lambda$.

**) Ist z. B. $\alpha = \lambda = 0$, und $\mu = 0$, dagegen $\beta$ von Null verschieden, so repräsentirt die Gleichung:

$$vy(y - \beta) + xu = 0$$

einen solchen Ausnahmefall. Sind $\varphi$ und $f$ von dieser Form, so muss aus dem Product $P$ (s. oben) erst der Factor $\beta$ ausgesondert werden, ehe die Division von $\delta^2 R$ ausführbar wird.

fallen, so soll der Grad derjenigen Curve bestimmt werden, welche der Punkt $\alpha$ beschreiben muss, damit sich die 3 Curven in noch einem weiteren ausserhalb $\alpha$ gelegenen Punkte $x$ schneiden. Wir bedürfen bei Aufstellung dieser Zahl noch der Kenntniss des Grades der Curve, auf welcher sich $\alpha$ immer und nur dann befindet, wenn die Curven $q$ und $r$ noch einen weiteren Schnittpunkt ausser jenen $u$ in dem Punkt $\alpha$ besitzen. Sei dieser Grad $\pi$; $\varkappa$ und $\varrho$ die entsprechenden für $r$ und $p$, $p$ und $q$. Man variire zunächst die Coefficienten von einer der 3 Gleichungen, z. B. von $p$. Die Coefficienten der niedrigsten Potenzen von $\varepsilon$ mögen verschwinden bis zu $\delta^x R$. Alsdann lässt sich ein Produkt $P$ von (speciellen) Factoren bilden (jeder Factor geschrieben in den Coordinaten eines der Allen gemeinsamen Punkte), dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $q$ und $r$ in einem der gemeinsamen Punkte $\alpha$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, .... einen weiteren Schnittpunkt ausser den bereits vorhandenen besitzt. Dieses Produkt ist Factor von $\delta^x R$, nach dessen Wegheben die reducirte Resultante bleibt, deren Grad in den Coordinaten $\alpha$, $\beta$ gesucht wird. Nach Ausscheidung desjenigen Theils von $P$, welcher von den Punkten $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... herrührt, aus $\delta^x R$ bleibt ein Ausdruck, welcher (nach § 2.) in den Coefficienten von $p$, $q$, $r$ bezw. vom Grad $u$, $v$, $w$ ist. Derjenige Theil von $P$, welcher von dem Punkt $\alpha$ herrührt, besteht wieder aus zwei Factoren, deren einer die $c \cdot d^{\text{te}}$ Potenz des variirten $p$ ist, und somit in den Coordinaten $\alpha$ .$\beta$ von der $c \cdot d \cdot (p'+p)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, deren anderer eine $b^{\text{te}}$ Potenz ist (§ 3.), und eine Reduction in Bezug auf die Coordinaten $\alpha$, $\beta$ veranlasst $= b \cdot \pi$. *Somit ist die Ordnung derjenigen Curve, auf welcher sich der Punkt $\alpha$ bewegen muss, damit die 3 Curven $p$, $q$, $r$ einen weiteren Schnittpunkt ausserhalb $\alpha$ gemeinsam haben:*

$$= u \cdot p' + v \cdot q' + w \cdot r' - c \cdot d \cdot (p' + p) - b \cdot \pi \ ^*).$$

## § 5.

Den vorstehenden Betrachtungen lassen sich ganz analoge an die Seite stellen, welche sich auf einen Fall von allgemeinerem Interesse beziehen, *dass nämlich eine der drei Curvengleichungen nicht identisch durch die Coordinaten des gemeinsamen Punktes $\alpha$ befriedigt wird, dieselben vielmehr gar nicht enthält.* Man hat sich alsdann $\alpha$ nicht mehr ganz willkührlich, sondern auf jener Curve beweglich vorzustellen. Sei $f(x) = 0$ die Gleichung derselben, $p(x, \alpha) = 0$ $q(x, \alpha) = 0$ die der

*) Durch cyclische Vertauschung erhält man zwei neue Formeln für dieselbe Zahl, welche zu den merkwürdigen Relationen Veranlassung geben:

$$c \cdot d \cdot (p + p') + b \cdot \pi = d \cdot b \cdot (q + q') + c \cdot \varkappa = b \cdot c \cdot (r + r') + d \cdot \varrho .$$

beiden anderen Curven. Variirt man die Coefficienten von $p$ z. B., und verschwinden etwa die $\varkappa - 2$ ersten Glieder der Entwicklung der Resultante nach $\varepsilon$ identisch, das $\varkappa - 1^{\text{te}}$ Glied unter Zuziehung der Gleichung $f(\alpha) = 0$, so ist das $\varkappa^{\text{te}}$ Glied $\delta^\varkappa R$ nun nicht mehr nach seinem Grad in Bezug auf $\alpha$ zu betrachten, sondern nach der Zahl derjenigen Coordinatenpaare $\alpha$, $\beta$, durch welche sowohl $\delta^\varkappa R = 0$ als auch $f = 0$ befriedigt werden, welche jedoch weder zu singulären Punkten von $f$ noch zu solchen Punkten $\lambda$ gehören, welche von vornherein als den 3 Curven gemeinschaftlich angenommen werden. *Solche Schnittpunkte wollen wir in der Folge zum Unterschied von den „festen" Punkten (nämlich den singulären und jenen Punkten $\lambda$) kurzweg „freie" nennen.* Es sollen nun diejenigen freien Schnittpunkte $\alpha$ von $\delta^\varkappa R = 0$ mit $f = 0$ gefunden werden, in welchen sich $p$ und $q$ schneiden müssen, wenn diese beiden Curven noch einen weiteren Schnittpunkt $x$ auf $f = 0$, welcher nicht in jenen fällt, besitzen sollen.

Wir haben analog dem früheren Fall aus der Zahl sämmtlicher freien Schnittpunkte diejenigen auszuscheiden, welche einen in die singulären und festen Punkte $\lambda$ oder nach $\alpha$ selbst zurück fallenden weiteren Schnittpunkt liefern würden. Diese Punkte sind nun aber diejenigen, welche ein dem im vorstehenden § erwähnten Produkt $P$ entsprechend gebildetes Produkt von speciellen Factoren, gleich Null gesetzt, in Verbindung mit $f = 0$, liefern. Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Wir führen den vorliegenden Fall auf den früher behandelten, wo alle 3 Gleichungen identisch befriedigt werden, zurück, wenn wir für $f(x) = 0$ die Gleichung substituiren:

$$\Omega(x, \alpha) = f(x) \,.\, \vartheta(x) \,.\, \omega(\alpha) - f(\alpha) \,.\, \vartheta(\alpha) \,.\, \omega(x) = 0,$$

wo $\omega(x) = 0$ eine durch alle festen Punkte ebenso oft wie $f$ selbst hindurchgehende Curve ist; $\vartheta(x) = 0$ eine beliebige Curve von so hohem Grad, dass $\vartheta(x) \,.\, f(x)$ von demselben Grad wie $\omega(x)$ ist. Jene Curve $\Omega$ hat in allen gemeinsamen Punkten $\alpha$ und $\lambda$ dieselbe Vielfachheit, wie $f$ selbst. Ihre Gleichung zerfällt, wenn $\alpha$ ein Punkt auf $f$ ist, in ein Produkt von 3 Gleichungen, deren eine $f = 0$ ist. Man denke sich wieder $p$ variirt, und die Coordinaten der Schnittpunkte von $q$ und $\Omega$ in $p + \varepsilon P = 0$ eingesetzt. Bezeichnet man mit $\delta^\varkappa R_\Omega$ das erste nicht verschwindende Glied in der Entwicklung dieser Resultante nach $\varepsilon$, mit $\delta^\varkappa R_f$ das entsprechende für die Resultante von $p + \varepsilon P = 0$, $f = 0$, $q = 0$ (gebildet unter Zuziehung der Gleichung $f(\alpha) = 0$), so ist $\delta^\varkappa R_\Omega$ von der Form:

$$\delta^\varkappa R_f \,.\, R_\vartheta \,.\, \omega^s(\alpha) + f(\alpha) \,.\, M,$$

wo $R_\vartheta$ die Resultante von $\vartheta$, $p$, $q$ ist, $s$ eine ganze Zahl.

Das Produkt $P_\Omega$ von speciellen Factoren, welches nach Früherem in $\delta^x R_\Omega$ als Factor enthalten ist, hat die Form:

$$P_f \,.\, \vartheta^t(\alpha) \,.\, \omega^r(\alpha) + f(\alpha) \,.\, N,$$

wo $P_f$ das entsprechende Produkt von speciellen Factoren, gebildet unter Zuziehung von $f(\alpha) = 0$ für $q$ und $f$, statt $q$ und $\Omega$, ist, $t$ und $r$ ganze Zahlen. Denn $q$ und $\Omega$ haben, im Fall $\alpha$ auf $f$ liegt, nur dann in einem der gemeinsamen Punkte einen weiteren Schnittpunkt gemeinsam, wenn entweder $\omega(\alpha)$ oder wenn $\vartheta(\alpha)$ verschwindet, oder endlich, wenn $f$ und $q$ einen weiteren gemeinsamen Punkt in den angenommenen besitzen. Für irgend einen Punkt $\alpha$ auf $f$, für welchen $P_f \,.\, \vartheta(\alpha)$ verschwindet, muss nun aber $\delta^x R_f \,.\, \omega^{s-t}(\alpha) \,.\, R_\vartheta$ mindestens in derselben Ordnung verschwinden, weil sonst jene Division nicht ausführbar wäre. Die freien Schnittpunkte von $P_f = 0$ mit $f(\alpha) = 0$ können nun aber von jenen Factoren nur $\delta^x R_f$ zum Verschwinden bringen, denn wenn der Punkt $\alpha$ so gelegen ist, dass $q$ und $f$ in einem Punkte $\lambda$ oder in $\alpha$ einen weiteren Schnittpunkt besitzen, so verschwindet, wenn $\alpha$ „frei" ist, im Allgemeinen weder $\omega(\alpha)$ noch die Resultante $R_\vartheta$. Hiermit ist aber unsere Behauptung erwiesen.

Von einer Ausführung der Division $\delta^x R_f$ durch $P_f$ kann im vorliegenden Fall nicht die Rede sein. In welcher Weise dieselbe unter Adjunction der Gleichung $f(\alpha) = 0$ geschehen kann, geht aus dem Vorstehenden hervor.

## § 6.

Wir gehen nun dazu über, den in § 4. aufgestellten Satz auf den vorliegenden Fall zu übertragen. Wir nehmen an, dass die Curven $p$, $q$ ausser in gewissen festen Punkten $\lambda$ (die auchsinguläre Punkte von $f$ sein können), in welchen sie die Curve $f$ beliebig oft schneiden und berühren mögen, in einem auf $f$ beweglichen Punkt $\alpha$ bezw. einen $b$ und $c$ fachen Punkt besitzen. Vermöge der Gleichung $p = 0$ mögen einem Punkt $x$ $p_1$ freie Punkte $\alpha$ und einem Punkt $\alpha$ $p_2$ freie Punkte $x$ entsprechen, von welchen je $b$ nach $x$ bezw. $\alpha$ zurückfallen. Sei ferner $P$ die Zahl derjenigen freien Punkte $\alpha$ auf $f$, welchen der vermöge der Gleichung $p = 0$ entsprechende Punkt $x$ unendlich nahe gelegen ist, also die Zahl der Lösungen der Gleichungen:

$$f(x) = 0 \qquad p(x,\, \alpha)_{\alpha = x} = 0,$$

wo $\alpha = x$ die benachbarte Lage andeuten soll. $q_1$, $q_2$, $Q$ seien die entsprechenden Zahlen für die Gleichung $q = 0$. Um alsdann die Zahl der freien Punkte $\alpha$ auf $f$ zu finden, in welchen sich $p$ und $q$ schneiden müssen, damit sie noch einen weiteren von $\alpha$ verschiedenen Schnittpunkt $x$ auf $f$ besitzen, hat man von der Zahl der freien Schnittpunkte von $\delta^x R_f$ die der freien Schnittpunkte von $P_f$ abzuziehen. Man erhält

diese Zahl durch die gleichen Betrachtungen, wie im vorigen §, nur dass überall statt „Grad in Bezug auf die Coordinaten von $\alpha$“ zu setzen ist: „Zahl der freien Schnittpunkte mit $f$“, d. h. statt $p'$, $q'$ bezw. $p_1$ und $q_1$, sowie statt $p$, $q$ bezw. $p_2$, $q_2$. Setzt man ferner in der Schlussformel des vorigen § $r' = 0$, $d = 1$, $u = q_2$, $v = p_2$, und nimmt $P$, $Q$ (an Stelle von $\varkappa$, $\pi$) in der oben definirten Bedeutung, so erhält man als die gesuchte Zahl von Schnittpunkten:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &q_2 p_1 + p_2 q_1 - c(p_1 + p_2) - b\,Q \\ &= p_1(q_2 - c) + p_2(q_1 - c) - b\,Q, \end{aligned}$$

oder auch, durch Vertauschung:

$$\text{(I}^{\text{a}}\text{)}\qquad = q_1(p_2 - b) + q_2(p_1 - b) - c\,P.$$

Das vorstehende Resultat möge noch einmal kurz in Form eines Satzes ausgesprochen werden. Wir wollen zunächst eine Ausdrucksweise erläutern, deren wir uns bedienen werden.

*Einem Punkt $x$ einer Curve $f$* von beliebigem Geschlecht *„entspricht“ eine Anzahl von Punkten $\alpha$* auf derselben, und umgekehrt, wenn zwischen $x$ und $\alpha$ eine solche Beziehung besteht, dass zu jeder Lage des Punktes $x$ eine Curve gehört, deren Schnittpunkte mit $f$ die $\alpha$ sind und umgekehrt. Von jenen Schnittpunkten $\alpha$ können einige in singuläre oder sonstwie ausgezeichnete Punkte der Curve $f$ fallen, welche nicht mitgezählt werden dürfen. Wir haben im Gegensatz zu diesen „festen“ jene anderen Punkte „freie“ genannt. Von diesen freien werden indess noch einige *nach $x$ selbst zurückfallen*, wenn jene Curve in $x$ einen ein- oder mehrfachen Punkt besitzt.

*Handelt es sich nun darum, die Zahl derjenigen Punktepaare auf einer beliebigen algebraischen Curve $f$ zu finden, welche zugleich zwei Bedingungen genügen, so bedarf es der Aufstellung folgender Daten:* Entsprechen vermöge der *einen* Bedingung jedem Punkt $x$ von $f$ $p_1$ „freie“ Punkte $\alpha$, und einem Punkt $\alpha$ $p_2$ „freie“ Punkte $x$, von welchen indess noch je $b$ nach $x$, bezw. $\alpha$, zurückfallen (s. oben); entsprechen ferner vermöge der *anderen* Beziehung jedem $x$ $q_1'(=q_1 - c)$ freie Punkte $\alpha$, jedem Punkt $\alpha$ $q_2'(= q_2 - c)$ freie Punkte $x$, von denen je keiner mehr nach $x$, bezw. $\alpha$, zurückfällt, giebt es ferner $Q$ Punkte, in welchen die vermöge der *letzten* Beziehung sich entsprechenden Punktepaare $x$, $\alpha$ zusammenfallen, *so ist die Zahl der freien Punktepaare, welche beiden Bedingungen genügen:*

$$\text{(I}^{\text{b}}\text{)}\qquad = p_1 q_2' + p_2 q_1' - b\,.\,Q.$$

Unter den Paaren $x$, $\alpha$ von Punkten auf $f$, welche den *beiden* aufgestellten Bedingungsgleichungen genügen, und welche demgemäss in den Formeln (I) und (I$^{\text{a}}$) inbegriffen sind, können sich indess immer noch solche befinden, welche einander *unendlich benachbart* sind. Diese

sind in jedem Fall besonders zu ermitteln und auszuscheiden, insofern dieselben als uneigentliche Lösungen angesehen werden. So insbesondere kann es vorkommen, dass in die singulären Punkte von $f$ mehr Punktepaare $x$, $\alpha$ fallen, als im Vorstehenden durch Aufstellung des Produkts $P$ und durch Abrechnung der in solche Punkte fallenden Verschwindungspunkte der Coefficienten von $p$ und $q$ berücksichtigt worden sind*).

Unter Berücksichtigung dieser Beschränkung (welche in den Anwendungen sich meistens leichter beseitigen lässt, als es scheinen könnte) erhält man *durch die Formel* (I) *die Zahl der „freien" Punktepaare auf einer Curve von beliebigem Geschlecht, welche zugleich zweien Bedingungsgleichungen genügen.*

Der Charakter und die Bedeutung des vorstehenden Satzes tritt besonders deutlich hervor, wenn man denselben auf den speciellen Fall anwendet, dass die gegebene Curve $f = 0$ eine gerade Linie $y = 0$ ist. Setzt man in $p(x, \alpha) = 0$, $q(x, \alpha) = 0$, $y = 0$, $\beta = 0$, so erhält man 2 algebraische Gleichungen für $x$, welche (unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen) den Factor $x - \alpha$ bezw. $b$ fach und $c$ fach besitzen, desgleichen je eine Anzahl von Factoren von der Form $x - \lambda$, welche festen Punkten $\lambda$ auf der Geraden entsprechen. Die Elimination von $x$ ergiebt, nachdem jene Factoren ausgeschieden, eine Gleichung in $\alpha$ vom Grade: $(p_1 - b)(q_2 - c) + (p_2 - b)(q_1 - c)$. Diese Zahl stimmt mit (I) für den besonderen Fall überein. Im allgemeinen Fall ist diese Ausscheidung an den Gleichungen selbst unmöglich; selbst aus der Resultante lassen sich die speciellen Factoren nicht herausheben, wenn $f = 0$ nicht identisch durch $x = \alpha$, $y = \beta$ erfüllt wird. *Die Formel* (I) *ist also die Verallgemeinerung des bekannten Ausdrucks für den Grad der Resultante von* 2 *Gleichungen mit* 2 *Variabeln auf den Fall zweier Gleichungen mit* 2 *Paaren von Variabeln, für deren Jedes noch eine weitere* (*dieselbe*) *Gleichung besteht.*

## § 7.

## Anwendung auf Raumcurven.

Den hauptsächlichsten Gebrauch von der im vorstehenden § bewiesenen Formel findet man in dem nachfolgenden Aufsatz über Berührungsprobleme gemacht. Auch bezüglich der Anwendung auf die

*) Sind z. B. $p$ und $q$ beide von der Form: $\varphi(x)\,\psi(\alpha) - \psi(x)\,\varphi(\alpha) = 0$, und hat $f(x) = 0$ in einem Punkte $d$ einen Doppelpunkt, durch welchen $\varphi(x) = 0$ $\psi(x) = 0$ nicht hindurchgeht, so verschwindet $\delta R$, wenn $\alpha$ nach $d$ rückt, ohne dass $p$ oder $q$ für eine allgemeine Lage von $\alpha$ durch $d$ hindurch gehen.

Theorie der Raumcurven, die im Folgenden an einigen Beispielen gegeben werden soll, sei es erlaubt, auf einige in jenem Aufsatz zu erweisende Resultate, bei Uebereinstimmung mit der dortigen Bezeichnung, Bezug zu nehmen. So insbesondere auf die geometrischen Anwendungen, woraus hervorgeht, dass eine Uebertragung von solchen Formeln auf lineare Gebilde von beliebig vielen Dimensionen gestattet ist, welche gewissermassen eine bei eindeutiger Transformation invariable Beziehung zwischen den Punktepaaren $x$, $\alpha$ aussagen. Ebenso wie dort in II. § 2. Note schliesst man auch allgemein, dass wenn nicht wirkliche Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte der Raumcurve vorhanden sind, die oben (§ 6.) erwähnte Beschränkung der Formel (I) meist ganz wegfällt.

Es ist *die Zahl* $(M_{1,\,2})$ *derjenigen Tangenten einer Raumcurve zu bestimmen, welche ausser in dem Berührungspunkt die Curve in noch einem anderen Punkt treffen.* Man projicire die Raumcurve (Grad $M$, Geschlecht $p$) von einem Punkt $A$ aus auf eine Ebene; jedem Punkt $\alpha$ der Raumcurve entspricht ein solcher der ebenen Curve, von welchem aus sich $2M + 2p - 2 = N_2$ Tangenten an die letztere legen lassen, wenn man die beiden in $\alpha$ selbst fallenden Tangenten mitzählt. Sei $x$ ein Punkt der Raumcurve, dem ein Berührungspunkt einer jener Tangenten in der ebenen Curve entspricht. Einem solchen entsprechen rückwärts, mit Einrechnung der 2 in $x$ selbst fallenden Punkte, $M$ Punkte $\alpha$. Dass ein Punkt $x$ mit einem Punkt $\alpha$ zusammenfällt, kommt so vielmal vor, als die ebene Curve Wendepunkte hat, nämlich $N_3$ mal, wenn $N_3 = 3M + 6p - 6$ ist. Die zwischen den Punkten $x$ und $\alpha$ bestehende Beziehung wird demnach durch eine Gleichung charakterisirt, für welche die in den §§ 5., 6. näher definirten Zahlen $p_1$, $p_2$, $b$, $P$ die folgenden Werthe besitzen:

$$p_1 = M \;\;;\;\; p_2 = N_2 \;\;;\;\; b = 2 \;\;;\;\; P = N_3\,.$$

Nimmt man zum Centrum der Projection statt des Punktes $A$ einen anderen Punkt $B$, so entsprechen einem Punkt $\alpha$ in derselben Weise im Allgemeinen andere Punkte $x$. Aber die Beziehung zwischen $x$ und $\alpha$ wird wieder dieselbe Form haben, so dass für die entsprechende Gleichung die zugehörigen Zahlen dieselben Werthe besitzen, nämlich:

$$q_1 = M \;\;;\;\; q_2 = N \;\;;\;\; c = 2 \;\;;\;\; Q = N_3\,.$$

Das Werthepaar $x$, $\alpha$, welches den singulären Tangenten, die in noch einem Punkt schneiden, entspricht, wird den beiden obigen Gleichungen gleichzeitig genügen. Man suche demnach die gemeinsamen Lösungen nach §§ 5., 6. Die Zahl derselben ist nach Formel (I):

$$M(N_2 - 2) + N_2(M - 2) - 2N_3\,.$$

Unter diesen befinden sich indess noch diejenigen Punktepaare, welche in die Tangentialebenen, die man von der Verbindungslinie $AB$ aus

an die Curve legen kann, fallen und uneigentlichen Lösungen entsprechen. Die Zahl dieser Paare ist:

$$N_2(M-2).$$

Man hat demnach:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= M(N_2-2)-2N_3 \\ &= 2(M-2)(M-3)+2p(M-6). \end{aligned}$$

Dieselbe Zahl ist im nachfolgenden Aufsatz mit Rücksicht auch auf etwa vorhandene Rückkehrpunkte der Raumcurve aufgestellt. Durch dualistische Vertauschung von $M$ mit $N_3$ und $\beta$, der Zahl der Rückkehrpunkte, mit $N_4 = 4M + 12p - 12$, der Zahl der Wendungsberührebenen, erhält man aus jener Formel die folgende (wo wieder $\beta = 0$ gesetzt ist):

$$N_{1,2} = 6(M-3)(M-4) + 18p(M-4) + 12p(p-1)$$

für die *Zahl der Tangenten der Raumcurve, welche in die Schmiegungsebene eines anderen Punktes fallen.*

A) Zu einem Punkt $x$ der Raumcurve gehören bekanntlich:

$$\nu = (M-2)(M-3) - 2p$$

Punkte $\alpha$, welche auf einer dreifach schneidenden Sehne liegen, die durch $x$ geht. Ferner giebt es $M_{1,2}$ (s. oben) Punkte $x$, mit welchen die so entsprechenden Punkte $\alpha$ zusammenfallen.

Die Gleichung $q(x, \alpha) = 0$, welche jene Beziehung zwischen $x$ und $\alpha$ ausdrückt, besitzt folgende „zugehörige" Zahlen (§ 6.):

$$\text{(A)} \qquad q_1 - c = q_2 - c = \nu; \quad Q = M_{1,2}.$$

Die Zahl $c$ giebt an, wie vielfach der Punkt der Curve $q(x, \alpha) = 0$ für $x = \alpha$ ist. Wir werden dies unten indirect ermitteln.

B) Durch die Tangente eines Punktes $x$ der Raumcurve kann man $N_2 - 4$ (s. oben) Tangentialebenen an die Curve legen, welche in Punkten $\alpha$ berühren, deren keiner im Allgemeinen nach $x$ fällt. Die zugehörigen Zahlen zu dieser Beziehung $p(x, \alpha) = 0$ sind:

$$\text{(B)} \qquad p_1 = p_2 = N_2; \quad b = 4; \quad P = N_4.$$

*Um nun die Zahl derjenigen Punktepaare $x$, $\alpha$ zu erhalten, welche auf dreifach schneidenden Sehnen einer Raumcurve liegen und für welche die zugehörigen Curvenelemente in einer Ebene liegen*, hat man vermöge Formel (1):

$$2\nu N_2 - 4M_{1,2}$$

als Zahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $p(x, \alpha) = 0$ und $q(x, \alpha) = 0$. Unter derselben befinden sich jedoch $M_{1,2}$ uneigentliche Lösungen, welche den beiden Bedingungen genügen, nur so, dass die Punkte $x$, $\alpha$ einander unendlich nahe liegen. Zählt man diese Zahl doppelt (den beiden Berührungspunkten entsprechend) ab, so erhält man:

$$2\nu N_2 - 6M_{1,2}$$

Punkte $x$, $\alpha$, also halb so viel Punktepaare.

Den Werth für $c$, und somit für $q_1 = q_2$ bestimmt man, indem man die Formeln (I) und (I$^a$) in § 6. einander gleichsetzt. Man erhält die auch sonst sehr wichtige Relation:

(I$^b$) $$b\{Q - 2(q-c)\} = c\{P - 2(p-b)\}.$$

Hieraus erhält man aber, nach Einsetzung der Werthe für $b$, etc.:

$$c = M - 4,$$

(A$^a$) $$q_1 = q_2 = M^2 - 4M + 2 - 2p.$$

C) Von einem Punkt $x$ der Curve kann man $N_3$ Schmiegungsebenen an dieselbe legen, von welchen 3 nach $x$ selbst fallen. Jedem Schmiegungspunkt $\alpha$ entsprechen umgekehrt $M$ Schnittpunkte, von welchen 3 nach $\alpha$ fallen. Die Zahl der Fälle, wo $\alpha$ mit $x$ zusammenfällt, ist gleich der Zahl $N_4$ der Wendungsberührebenen. Daher sind die zugehörigen Zahlen:

(C) $$p_1 = M \;;\; p_2 = N_3 \;;\; b = 3 \;;\; P = N_4.$$

*Man soll die Zahl der Geraden angeben, welche die Raumcurve in 3 Punkten schneiden, deren einer in der Schmiegungsebene eines der beiden anderen liegt.*

Man erhält die Zahl der gemeinsamen Lösungen der durch die Formeln (A) und (C) charakterisirten Gleichungen (unter welchen sich auch die gesuchten Punktepaare befinden) aus Formel (I):

$$= (M + N_3).\nu - 3.M_{1,2}.$$

Unter diesen gemeinsamen Lösungen befinden sich aber die $M_{1,2}$ Schnittpunkte der singulären Tangenten. Zählt man diese doppelt (den beiden Berührungspunkten entsprechend) ab, so ist die Hälfte der Differenz gleich der gesuchten Zahl:

($\gamma$) $$= \frac{\nu}{2}(M + N_3) - \frac{5}{2} M_{1,2}$$
$$= 2(M-2)(M-3)(M-4) + 8p(M^2 - 8M + 18) - 6p^2.$$

D) Durch einen Punkt $x$ der Curve lassen sich $N_3 - 3$ Schmiegungsebenen an dieselbe legen. In jeder befinden sich noch $M - 4$ Punkte $\alpha$, welche weder mit $x$ zusammen noch in den Schmiegungspunkt fallen. Zwischen den Punkten $x$ und $\alpha$ besteht also eine Beziehung, welche für einen gegebenen Punkt $x$ $(M-4)(N_3-3)$ Punkte $\alpha$, die nicht mit $x$ zusammenfallen, ergiebt, und umgekehrt ebensoviele.

Die Zahl der zusammenfallenden Paare $x$, $\alpha$ ist $N_{1,2}$ (s. oben). Die Gleichung ist also charakterisirt durch die Zahlen:

(D) $$p_1 - b = p_2 - b = (M-4)(N_3-3);\quad P = N_{1,2}.$$

Die den beiden Bedingungen, welche unter (D) und (A) aufgestellt

sind, genügenden Punktepaare *liegen in Schmiegungsebenen, in welchen sich dreifach schneidende Sehnen befinden.* Die Zahl derselben ist mit Rücksicht auf die Formel ($A^a$):

$$2(p_1 - b)(q_1 - c) - c(P - 2(p_1 - b))$$
$$= 2(M-4)(N_3 - 3)\nu - (M-4)(N_{1,2} - 2(M-4)(N_3 - 3))$$
$$= 6(M-4)[(M-2)(M-3)^2 + p(2M^2 - 13M + 24) - 6p^2].$$

Unter diesen befinden sich die Punktepaare auf den oben bereits gezählten Sehnen, welche durch den zugehörigen Schmiegungspunkt selbst hindurch gehen. (Vergl. (C), Formel ($\gamma$)).

Zählt man den Ausdruck ($\gamma$) sechsfach von der obigen Zahl ab, so bleibt *die Zahl derjenigen dreifach schneidenden Sehnen, welche durch den Schmiegungspunkt einer Schmiegungsebene, in welcher sie liegen, nicht hindurch gehen.* Man erhält durch Zusammenziehen:

$$6(M-5)[(M-2)(M-3)(M-4) - 2p(M^2 - 7M + 15) - 6p^2]$$

deren 6. Theil die Zahl jener Sehnen angiebt. Endlich lassen sich die Einzelwerthe von $b$ und $p_1 = p_2$, welche die Formeln (D) vervollständigen, durch Anwendung der Formel ($I^b$) wie oben finden.

Es wäre leicht, die Zahl dieser Beispiele aus der Theorie der Raumcurven zu vermehren. Auch auf die Theorie der windschiefen Flächen gestattet der Satz des § 6. eine fruchtbare Anwendung. Indess würde ein näheres Eingehen hierauf die Grenzen dieses einleitenden Aufsatzes überschreiten.

Darmstadt, im Juli 1871.

# Ueber zwei Berührungsprobleme*).

Von A. Brill in Darmstadt.

Im 66. Band des Journals Crelle-Borchardt hat Herr Jonquières die Zahl derjenigen Curven eines Büschels („Büschel" im weiteren Sinne genommen) bestimmt, welche eine gegebene Curve in einem Punkte $n_1$ punktig, in einem anderen $n_2$ punktig u. s. w. berühren (in bezw. $n_1 + 1$, $n_2 + 1$, etc. aufeinander folgenden Punkten treffen). Er geht dabei aus von dem besonderen Fall, dass die gegebene Curve vom Geschlecht Null ist, somit die Anwendung des Chasles'schen Correspondenzsatzes verträgt. Eine Bemerkung über den Einfluss, welchen Doppelpunkte der gegebenen Curve auf die erhaltenen Zahlen ausüben, führt ihn zur Aufstellung einer eleganten Formel für allgemeine Curven. Dieselbe wurde von Herrn Cayley auf anderem Wege bewiesen und auf den Fall einer Curve mit Rückkehrpunkten ausgedehnt**). Herr Cayley bedient sich hierbei einer Methode, welche von ihm bereits mehrfach erfolgreich angewendet worden ist: er stellt gewisse Functionalgleichungen auf, welche durch einen Rückschluss von zerfallenden auf nichtzerfallende Curven gelöst werden.

Eine rein algebraische Behandlung ist, soviel ich weiss, bisher dem Probleme nicht zu Theil geworden. Es kann nun in dieser Hinsicht nicht die Aufgabe sein, diejenigen simultanen Covarianten des Büschels und der gegebenen Curven, welche in den gesuchten Berührungspunkten derselben verschwinden, wirklich aufzustellen und auszurechnen. Denn schon in den einfachsten Fällen scheinen diese Covarianten eine nicht leicht zu übersehende Form zu haben***).

Dagegen scheint es von Interesse, solche algebraische Methoden aufzusuchen, welche jene synthetischen Methoden, die sich bei der

*) Der nachfolgende Aufsatz ist die weitere Ausführung und Ergänzung einer in den Göttinger Nachrichten vom Dec. 1870 veröffentlichten Note des Verf.

**) Philos. Transact. London. Vol. 158.

***) Vergl. einen Aufsatz des Verf. in diesem Journal, Bd. 3. S. 459. Eine solche Covariante ist dort mit $L$ bezeichnet.

Behandlung von Problemen der genannten Art so förderlich erweisen, einigermassen zu ersetzen geeignet sind. Im Nachstehenden wurde dies für die einfachsten Fälle versucht: Curven, welche die gegebene 1. an einer Stelle, 2. an zwei verschiedenen Stellen mehrfach berühren. Insbesondere die algebraische Behandlung des zweiten Problems führte zu einigen, wie ich glaube, neuen Beiträgen zur Theorie der Elimination überhaupt, welche im voranstehenden Aufsatze zusammengestellt sind, und im II. Abschnitt des vorliegenden mehrfache Anwendung finden. Das erste Problem (I. Abschnitt) ist durch ein näheres Eingehen auf gewisse Eigenschaften der dabei auftretenden Covarianten ($\Delta_\varphi$) und anderer damit verwandten Covarianten ($\Phi^{(i)}$), welche den einzelnen Curven des Büschels gegenüber ein ähnliches Verhalten zeigen, wie Liniencoordinaten gegen Punktcoordinaten, gelöst worden. Zugleich wurde der Grad jener Covarianten in den Variabeln aufgestellt.

## I.

## Ueber die Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve an einer Stelle $r$ punktig berühren.

### § 1.

### Einleitung.

Wir beginnen mit Betrachtungen, welche den eingeschlagenen Weg in geometrischer Form zu veranschaulichen geeignet sind.

Auf einer Ebene $e$ befinde sich ein Curvenbüschel $\varphi$ von Curven $s^{\text{ter}}$ Ordnung mit $r$ willkürlichen Parametern, welche linear aber nicht homogen auftreten.

Ist $r = 1$, so entspricht dem Büschel $\varphi$ jedes beliebige Strahlenbüschel eindeutig.

Für $r = 2$ kann man der Ebene $e$ eine andere $E$ zuordnen, deren Gerade den Curven von $\varphi$ eindeutig entsprechen. Einer beliebigen Curve $f$ auf $e$, welche von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung, vom Geschlecht $p$ sein möge und durch $\sigma$ Basispunkte des Büschels $\varphi$ einfach, durch $\tau$ ebensolche doppelt hindurchgehen möge, entspricht alsdann eine Curve $F$ auf $E$, deren Geschlecht wiederum $p$ und deren Grad $M$ gleich ist der Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden mit $F$, also gleich der Anzahl der „beweglichen", d. h. mit der Curve $f$ sich ändernden Schnittpunkte einer Curve aus dem Büschel $\varphi$ mit $f$.

Denn Schnittpunkten von Curven auf $e$ entsprechen im Allgemeinen solche auf $E$, wenn dieselben nicht in die Basispunkte des Büschels fallen*). Hiernach ist:

---

*) Vergl. Cremona, sulle trasformazione delle curve piane, Accad. Bologna.

(1) $$M = m \cdot s - \sigma - 2\tau.$$

Einer Tangente von $F$ entspricht eine Curve von $\varphi$, welche $f$ berührt; und *die bekannte Anzahl der Tangenten von einem Punkte in E an die Curve F:*

(2) $$N_2 = 2(M + p - 1) - \beta$$

(wo $\beta$ die Zahl der Rückkehrpunkte von $f$ ist, denen im Allgemeinen ebensolche von $F$ entsprechen) *ist zugleich der Ausdruck für die Zahl derjenigen Curven von $\varphi$, welche $f$ einfach berühren.* Die Curve $f$ besitzt im Allgemeinen *Wendepunkte; sei $\alpha_2$ die Zahl derselben.* Diese lässt sich ermitteln durch dualistische Umkehr der Formel (2) in:

$$M = 2(N_2 + p - 1) - \alpha_2$$

und Elimination von $N_2$ aus beiden. Man findet:

$$\alpha_2 = 3(M + 2p - 2) - 2\beta.$$

*Diese Zahl giebt nun aber auch zugleich die Anzahl derjenigen Curven $\varphi$ an, welche $f$ zweipunktig berühren* (in 3 aufeinanderfolgenden Punkten schneiden). Denn diese Curven sind es, welchen die Wendetangenten von $F$ eindeutig entsprechen.

Ist die Zahl $r$ der Parameter von $\varphi$ gleich 3, so entspricht der Ebene $e$ eine krumme Oberfläche*), der Curve $f$ eine Curve doppelter Krümmung auf derselben, deren Ordnung immer noch durch die Formel (1) dargestellt wird, wenn die Bezeichnungen im Uebrigen beibehalten werden. Den Schmiegungsebenen der letzteren entsprechen zweipunktig berührende Curven $\varphi$, den Rückkehrpunkten Rückkehrpunkte, den ($\alpha_3$) *Wendungsberührebenen* die dreipunktig berührenden Curven $\varphi$. Die Zahl der Schmiegungsebenen, welche man von einem beliebigen Punkte der Fläche an die Raumcurve legen kann, und welche wir, in Uebereinstimmung mit der oben eingeführten Bezeichnung, $N_3$ nennen wollen, ist demnach gleich der oben gefundenen Zahl $\alpha_2$. Man hat so:

(3) $$N_3 = 3(M + 2p - 2) - 2\beta.$$

($3^a$) $$M = 3(N_3 + 2p - 2) - 2\alpha_3,$$

wo die letzte Formel sich durch die Dualität zwischen Punkt und Ebene ergiebt.

Hieraus wiederum:

$$\alpha_3 = 4(M + 3p - 3) - 3\beta,$$

eine Zahl, welche wieder rückwärts für die Ebene $e$ gedeutet werden kann, als *Anzahl der die Curve $f$ dreipunktig berührenden Curven $\varphi$.*

Man erkennt, wie man nur das angedeutete Verfahren auf Räume von mehr Dimensionen auszudehnen hätte, um mittelst desselben den

---

*) Vergl. Clebsch, über Abbildung von Flächen. Diese Annalen Bd. I. S. 253.

allgemeinen Ausdruck $\alpha_r$ für die Anzahl der die Curve $f$ $r$ punktig berührenden Curven $\varphi$ zu erhalten. Das Bildungsgesetz ist übrigens aus Obigem bereits leicht zu erkennen:

$$\alpha_r = (r+1)\{M + rp - r\} - r\beta.$$

Wir wollen in dem folgenden Abschnitt die *algebraische* Herleitung dieses Ausdrucks geben, indem wir aus dem Vorstehenden bloss die Bemerkung entlehnen, dass *die dualistische Verdoppelung der Formeln* ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis der allgemeinen Formel bildet.

## § 2.

## Determinantensätze.

Seien irgend welche $r(r+1)$ Grössen $\varphi_i^{(\varkappa)}$, $i = 0, 1, \ldots. r-1$, $\varkappa = 0, 1, \ldots. r$, gegeben. Bestehen alsdann für ein System von $r(r+1)$ Functionen $\Phi$ die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma\varphi_0^{(i)}\ \Phi_0^{(i)} = 0,\ \Sigma\varphi_1^{(i)}\,\Phi_1^{(i)} = 0,\ \ldots\ \Sigma\varphi_{r-2}^{(i)}\,\Phi_{r-2}^{(i)} = 0,\ \Sigma\varphi_{r-1}^{(i)}\,\Phi_{r-1}^{(i)} = 0 \\ \Sigma\varphi_1^{(i)}\ \Phi_0^{(i)} = 0,\ \Sigma\varphi_2^{(i)}\,\Phi_1^{(i)} = 0,\ \ldots\ \Sigma\varphi_{r-1}^{(i)}\,\Phi_{r-2}^{(i)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma\varphi_{r-1}^{(i)}\,\Phi_0^{(i)} = 0,\ \Sigma\varphi_{r-1}^{(i)}\,\Phi_1^{(i)} = 0, \end{cases}$$

wo sich die Summenzeichen auf den Index $i = 0, 1, \ldots r$ erstrecken, so besteht zwischen den $\varphi$ und $\Phi$ eine Reciprocität entsprechend derjenigen der Elemente einer Determinante mit den Elementen der adjungirten. *Es verhalten sich nämlich die Unterdeterminanten $k$. Grades ($k = 1, 2, \ldots r$), welche aus den $k$ letzten Horizontalreihen des unvollständigen Systems:*

$$(5)\qquad D_\varphi = \left\| \begin{matrix} \varphi_0^{(0)} & \varphi_0^{(1)} & \ldots\ldots & \varphi_0^{(r)} \\ \varphi_1^{(0)} & \varphi_1^{(1)} & \ldots\ldots & \varphi_1^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \varphi_{r-1}^{(0)} & \varphi_{r-1}^{(1)} & \ldots\ldots & \varphi_{r-1}^{(r)} \end{matrix} \right\|$$

*gebildet werden können, wie die Unterdeterminanten aus den $(r+1-k)$ ersten Reihen des* (5) *analog gebildeten unvollständigen Systems $D_\Phi$ in den $\Phi$.*

Man beweist den Satz in folgender Weise:

Man ergänze das System $D_\varphi$ durch Zufügung der Zeile von indifferenten Elementen: $\varphi_r^{(0)}\ \varphi_r^{(1)} \ldots \varphi_r^{(r)}$ zu einer Determinante $\Delta_\varphi$ (von derselben wird in der Folge mehrfach die Rede sein). Diese Determinante multiplicire man mit der folgenden:

$$(5^a)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_0^{(0)} & \alpha_0^{(1)} & \cdots & \alpha_0^{(r)} \\ \alpha_1^{(0)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{\varkappa-1}^{(0)} & \alpha_{\varkappa-1}^{(1)} & \cdots & \alpha_{\varkappa-1}^{(r)} \\ \Phi_0^{(0)} & \Phi_0^{(1)} & \cdots & \Phi_0^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Phi_{r-\varkappa}^{(0)} & \Phi_{r-\varkappa}^{(1)} & \cdots & \Phi_{r-\varkappa}^{(r)} \end{vmatrix}$$

wo die $\alpha$ willkührliche Grössen sind. Alsdann entsteht eine Determinante, welche in Folge der Gleichungen (4) zerfällt in das Produkt zweier Determinanten, deren eine den Werth:

$$\Sigma\Phi_0\varphi_r \,.\, \Sigma\Phi_1\varphi_0 \,\ldots\ldots\, \Sigma\Phi_{r-\varkappa}\varphi_{r-\varkappa-1}$$

besitzt, während die andere nach dem Multiplicationssatz der Determinantentheorie dargestellt werden kann als die Summe von Produkten der entsprechenden Determinanten der beiden unvollständigen Systeme:

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_0^{(0)} & \alpha_0^{(1)} & \cdots & \alpha_0^{(r)} \\ \alpha_1^{(0)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{\varkappa-1}^{(0)} & \alpha_{\varkappa-1}^{(1)} & \cdots & \alpha_{\varkappa-1}^{(r)} \end{matrix}\right\| \,.\, \left\|\begin{matrix} \varphi_{r-\varkappa}^{(0)} & \varphi_{r-\varkappa}^{(1)} & \cdots & \varphi_{r-\varkappa}^{(r)} \\ \varphi_{r-\varkappa+1}^{(0)} & \varphi_{r-\varkappa+1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{r-\varkappa+1}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{r-1}^{(0)} & \varphi_{r-1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{r-1}^{(r)} \end{matrix}\right\|.$$

Vergleicht man nun beiderseits die Verhältnisse der Coefficienten gleicher Determinanten aus den Elementen $\alpha$, so erkennt man die Richtigkeit des zu erweisenden Satzes.

Für den Fall, dass $\Delta_\varphi$ verschwindet, gilt derselbe indess nicht mehr.

Wir wollen ferner einen zweiten Satz beweisen, von welchem in der 2. Abtheilung Gebrauch gemacht werden wird.

*Wenn alle Determinanten des unvollständigen Systems* (dasselbe ist der Uebersichtlichkeit wegen vertikal angeordnet):

$$(6)\qquad \left\|\begin{matrix} \varphi_{\varkappa-1}^{(0)} & \varphi_{\varkappa-1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{\varkappa-1}^{(r)} \\ \varphi_{\varkappa}^{(0)} & \varphi_{\varkappa}^{(1)} & \cdots & \varphi_{\varkappa}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{r-1}^{(0)} & \varphi_{r-1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{r-1}^{(r)} \\ \psi_{i-1}^{(0)} & \psi_{i-1}^{(1)} & \cdots & \psi_{i-1}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{r-1}^{(0)} & \psi_{r-1}^{(1)} & \cdots & \psi_{r-1}^{(r)} \end{matrix}\right\|, \quad r = i + \varkappa,$$

*in welchem die $\varphi$, $\psi$ beliebige Grössen sind, verschwinden, so verschwinden auch die Determinanten des folgenden Systems:*

$$
(6^a)\quad \left\|\begin{matrix}
\Phi_0^{(0)} & \Phi_0^{(1)} & \cdots\cdots & \Phi_0^{(r)} \\
\Phi_1^{(0)} & \Phi_1^{(1)} & \cdots\cdots & \Phi_1^{(r)} \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
\Phi_{\varkappa-1}^{(0)} & \Phi_{\varkappa-1}^{(1)} & \cdots\cdots & \Phi_{\varkappa-1}^{(r)} \\
\Psi_0^{(0)} & \Psi_0^{(1)} & \cdots\cdots & \Psi_0^{(r)} \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
\Psi_{i-1}^{(0)} & \Psi_{i-1}^{(1)} & \cdots\cdots & \Psi_{i-1}^{(r)}
\end{matrix}\right\|, \quad r = i + \varkappa,
$$

*wo die $\Phi$ als Functionen der $\varphi$ durch die Gleichungen* (4) *definirt sind, und die $\Psi$ mit den $\psi$ in ganz analoger Weise zusammenhängen. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der Determinanten* ($6^a$) *das der Determinanten* (6).

Aus den Gleichungen (6) folgt nämlich ein System von linearen Gleichungen:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\Sigma u\varphi_{\varkappa-1} = 0 & \Sigma u\psi_{i-1} = 0 \\
\Sigma u\varphi_{\varkappa} \quad 0 = & \Sigma u\psi_{i} \quad = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\Sigma u\varphi_{r-1} = 0 & \Sigma u\psi_{r-1} = 0,
\end{cases}
$$

wo zur Abkürzung:

$$
\Sigma u\varphi_\varkappa = u^{(0)}\varphi_\varkappa^{(0)} + u^{(1)}\varphi_\varkappa^{(1)} + \cdots\cdots\cdots u^{(r)}\varphi_\varkappa^{(r)},
$$

u. s. w.

geschrieben worden ist. Die allgemeinsten Werthe $u$, welche den Gleichungen (7) *links* genügen, sind von der Form:

$$
u^{(\lambda)} = \alpha_0\Phi_0^{(\lambda)} + \alpha_1\Phi_1^{(\lambda)} + \cdots\cdots\cdots + \alpha_{\varkappa-1}\Phi_{\varkappa-1}^{(\lambda)},
$$

wo die $\alpha$ willkührliche Constante sind. Denn infolge der Gleichungen (4) genügen die einzelnen Coefficienten der $\alpha$. Das System ist das allgemeinste, weil es die nöthige Anzahl von willkührlichen Constanten mit sich führt.

Andererseits ist das allgemeinste System von Unbekannten, welches den Gleichungen *rechts* genügt, von der Form:

$$
u^{(\lambda)} = \beta_0\Psi_0^{(\lambda)} + \beta_1\Psi_1^{(\lambda)} + \cdots + \beta_{i-1}\Psi_{i-1}^{(\lambda)},
$$

wo die $\beta$ willkührliche Constanten sind.

Die beiden Werthe für $u^{(\lambda)}$ müssen übereinstimmen; aus der Vergleichung derselben folgt eine Gleichung, welche $r + 1$ solche repräsentirt und $\varkappa + i - 1 = r - 1$ Verhältnisse der $\alpha$, $\beta$ enthält; daher verschwinden die Determinanten des unvollständigen Systems der Coefficienten; dies ist aber kein anderes als ($6^a$).

Die Umkehrung beweist man leicht, indem man denselben Weg rückwärts geht.

Für $r = 2$ und $r = 3$ kann man sich von den oben angedeuteten Umformungen eine geometrische Vorstellung bilden. Bedeuten z. B. für $r = 3$ die Grössen $\varphi^{(0)}\ \varphi^{(1)}\ \varphi^{(2)}\ \varphi^{(3)}$ die homogenen Coordinaten eines Punktes im Raum, so bedeuten die $\Phi$ die Ebenencoordinaten einer durch 3 Punkte gelegten Ebene. Der erste Satz sagt alsdann für $\varkappa = 2$ aus, dass die „Coordinaten" einer Geraden im Raum, wenn man dieselbe als Verbindungslinie zweier Punkte (Strahl) auffasst, proportional sind den Coordinaten derselben, wenn man sie als Durchschnitt zweier Ebenen auffasst (Axe)*). Unter „Coordinaten" der Geraden verstehen wir die Verhältnisse der aus den homogenen Coordinaten zweier Punkte resp. Ebenen gebildeten zweigliederigen Determinanten.

Der zweite Satz sagt für diesen Fall aus, was sich übrigens von selbst versteht, dass man die Bedingung, dass 2 Punkte in die Ebene von 3 anderen fallen, in Ebenencoordinaten so auszudrücken hat: Die Letztere geht durch die Schnittlinie von irgend 2 durch die 2 Punkte gelegten Ebenen.

## § 3.

## Das reciproke Verhalten gewisser Curvenbüschel.

Die im vorigen § aufgestellten Determinantensätze erhalten dadurch ein Interesse für die Theorie der Curvenbüschel, dass man den dort noch willkührlich vorausgesetzten $\varphi$ die im Nachstehenden näher auseinander gesetzte geometrische Bedeutung beilegt. Eine solche erwächst alsdann auch den $\Phi$; diese, sowie die Bedeutung des ersten Determinantensatzes werden den Inhalt dieses und des nächstfolgenden § bilden.

$f(x_1 x_2 x_3) = 0$ oder kürzer $f(x) = 0$ sei die Gleichung einer Curve $m^{\text{ter}}$ Ordnung $f$ in homogenen Coordinaten, $p$ das Geschlecht, $d$ die Anzahl ihrer Doppelpunkte, unter welchen sich auch Rückkehrpunkte befinden können.

$$\varphi^{(0)}(x) = 0 \qquad \varphi^{(1)}(x) = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, \varphi^{(r)}(x) = 0$$

seien die Gleichungen von $r + 1$ Curven $s^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $\sigma$ einfache und $\tau$ Doppelpunkte auf $f$ gemeinschaftlich haben mögen.

Bildet man aus den Curven $\varphi$ ein Büschel $\varphi$ (in weiterem Sinne genommen), so hat irgend eine Curve desselben die Gleichung:

$$\alpha^{(0)}\varphi^{(0)} + \alpha^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + \alpha^{(r)}\varphi^{(r)} = 0,$$

wo die $\alpha$ willkührliche Grössen sind. Die Schnittpunkte dieser Curve mit $f$ sind zum Theil mit den $\alpha^{(i)}$ beweglich, zum Theil fest. Fest sind diejenigen, welche in die auf der gegebenen Curve $f$ liegenden $\sigma + \tau$ Basispunkte des Büschels fallen; es bleiben somit bewegliche

*) Plücker, neue Geometrie des Raumes. S 5.

Schnittpunkte (wir wollen sie, in Uebereinstimmung mit dem vorangehenden Aufsatz auch „freie“ nennen, im Gegensatz zu den „festen“ Basispunkten und singulären Punkten von $f$) übrig:

$$M = ms - \sigma - 2\tau .$$

Es wird sich in der Folge blos um die „freien“ Schnittpunkte eines Büschels mit $f$ handeln.

Sind nun:

$$x_1 = x + \Delta x ;$$
$$x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x ;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_\varkappa = x + \varkappa . \Delta x + \cdots + \Delta^\varkappa x$$

der Reihe nach $\varkappa$ dem Punkte $x$ (wir werden ihn zuweilen der Gleichförmigkeit wegen mit $x_0$ bezeichnen) unendlich benachbarte Punkte auf der Curve $f$, so mögen die mit diesen Argumenten geschriebenen Ausdrücke $f$ und $\varphi$ bezw. durch:

$$f_1\, f_2 \,\cdots\cdots\, f_\varkappa$$
$$\varphi_1\, \varphi_2 \,\cdots\cdots\, \varphi_\varkappa$$

bezeichnet werden. $\varphi_i^{(\varkappa)}$ bedeutet demnach den Ausdruck $\varphi^{(\varkappa)}$ geschrieben mit den Coordinaten des Punktes $x_i$. Die Gleichungen (4) von § 2., welche die $\Phi$ mit den $\varphi$ verbinden, setzen bezüglich der $\varphi$ nichts Näheres voraus. Wir wollen uns jetzt an Stelle derselben die eben definirten Functionen $\varphi$ des Punktes $x$ und seiner Nachbarpunkte eingesetzt denken. Alsdann definirt die erste Verticalreihe der Gleichungen (4) die $\Phi$ als Functionen von $x$; dieselben verhalten sich wie die Determinanten des aus den Coefficienten $\varphi_i^{(\varkappa)}$ gebildeten unvollständigen Systems. Auch die $\Phi$ selbst sind durch jene Determinanten definirt, wenn man die Bedingung zufügt, dass dieselben ganze, im Allgemeinen irreducible Functionen sind. Die Gleichungen der anderen Verticalreihen (4) werden aus denen der ersten gebildet, indem man je die Coordinaten des Nachbarpunktes statt $x$ setzt. Die Determinantensätze des § 2. lassen sich jetzt auf die so definirten $\varphi$ und $\Phi$ übertragen. Aus dem ersten derselben schliesst man auf ein *reciprokes Verhalten der $\varphi$ und $\Phi$*. Denn die Determinanten des Systems $D_\Phi$ verhalten sich wie die $\varphi$, geschrieben mit den Coordinaten des Punktes $x_{r-1}$, oder auch: des diesem unendlich benachbarten Punktes $x$. Umgekehrt verhalten sich die Determinanten des Systems $D_\varphi$ wie die $\Phi$.

Man kann dieser Bemerkung auch eine geometrische Fassung geben. Man denke sich zunächst jene Unterdeterminanten dadurch von den Differentialien befreit, dass man dieselben aus den Gleichungen:

$$f = 0 \quad f_1 = 0 \ldots . f_\varkappa = 0$$

ausgerechnet und in jene eingesetzt annimmt*). Wenn alsdann für die Coordinaten eines Punktes $x$ eine der Determinanten von $D_\varphi$ verschwindet, so kann dies auf zwei Arten geschehen. *Entweder* verschwinden auch zugleich die Unterdeterminanten niederer Ordnung in derselben. Dies tritt nach unseren Voraussetzungen im Allgemeinen nur ein, wenn alle $\varphi$ zugleich verschwinden, also für die $\sigma + \tau$ Basispunkte des Büschels, und etwa noch für singuläre Punkte von $f$, *oder* der Punkt $x$ ist ein solcher, in welchem eine Curve eines Büschels von nur $r$ jener $r+1$ Curven $\varphi$ die Curve $f$ $(r-1)$punktig berührt. Dies ist die geometrische Bedeutung einer Gleichung $\Phi^{(i)} = 0$.

*Die Reciprocität zwischen den $\Phi$ und $\varphi$ lässt sich demnach in folgender Weise geometrisch aussprechen:*

Es sei ein Büschel von $r+1$ Curven $\varphi$ gegeben; ferner eine Curve $f$, auf welcher jene Curven eine Anzahl $a$ von Punkten gemeinsam haben können.

Gruppirt man nun die $r+1$ Curven $\varphi$ zu $r+1$ Büscheln von je $r$, und sucht diejenigen Curven eines solchen Büschels, welche $f$ $r-1$ punktig berühren, so lässt sich durch die Berührungspunkte eine Curve $\Phi$ legen, welche ausser in diesen $f$ nur noch in jenen $a$ Punkten und singulären Punkten von $f$ trifft. Jedes Büschel liefert so eine Curve $\Phi$, welche zusammen wieder ein Büschel von $r+1$ Curven bilden, auf die man dieselbe Operation, welche man auf die $\varphi$ angewendet hat, wiederum anwenden kann. Die hieraus hervorgehenden $r+1$ Curven sind alsdann keine anderen, als die $\varphi$, von denen man ausging.

---

*) Es ist von Interesse, diese algebraischen Processe in besonderen Fällen durchzuführen. So sind für $r = 2$ die 3 Functionen $\Phi$, wie man leicht erkennt, nichts Anderes, als die Functionaldeterminanten von $f$ mit je 2 der 3 gegebenen Functionen $\varphi$. Jene simultanen Covarianten $\Phi$ von $f$ und den Curven des Büschels verallgemeinern demnach gewisse Eigenschaften der Functionaldeterminanten. Die dem Fall $r = 3$ entsprechenden $\Phi$ habe ich (diese Annalen, Bd. 3. S. 459) in expliciter Form aufgestellt, und einige Eigenschaften derselben entwickelt. Indess wird man auch weiter unten (§ 5. am Ende) einige bemerkenswerthe Eigenschaften der ausgerechneten Covarianten $\Phi$ angegeben finden. Die oben ausgesprochene Reciprocität der $\varphi$ und $\Phi$ liefert für $r = 2$ den Satz:

Wenn man aus je zweien von 3 homogenen Functionen von 3 Variabeln mit einer anderen ebensolchen Function $f$ die Functionaldeterminante bildet, so entstehen 3 Functionen, welche, in derselben Weise wieder zu je zweien mit $f$ combinirt, zurückführen auf die 3 ursprünglich gegebenen Functionen bis auf einen Allen gemeinsamen Factor.

Dieser Satz, welcher sich ohne Mühe auf $n$ homogene Functionen von $n$ Variabeln ausdehnen lässt, schliesst sich an einen Satz über Functionaldeterminanten von Herrn Clebsch an (Crelle-Borchardt, Bd. 69, S. 355), auf welchen er zurückkommt, wenn man $f$ gleich einer der $n$ homogenen Variabeln setzt.

Wenn man die Betrachtungen, welche wir oben für die Determinanten von $D_\varphi$ selbst angestellt haben, auf die Unterdeterminanten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung ausdehnt, so gelangt man, mit Rücksicht auf den ersten Determinantensatz in § 2. zu dem Satz:

Gruppirt man die $r+1$ Curven $\varphi$ zu je $\varkappa$, und sucht die Berührungspunkte derjenigen Curven eines der so entstehenden $\frac{(r+1)!}{\varkappa!(r+1-\varkappa)!}$ Büschel, welche $(\varkappa-1)$punktig berühren, so kann man durch dieselben eine Curve $\varphi'$ legen, welche ausserdem $f$ nur noch in den festen Punkten trifft. Jedes Büschel liefert so eine Curve $\varphi'$; wendet man auf das Büschel dieser letzteren wiederum den obigen Process an, indem man dieselben zu je $\varkappa$ gruppirt, so erhält man Curven $\Phi'$, auf welche jene Operation abermals angewandt werden kann. Man erhält alsdann die Curven $\varphi'$ wieder; die $\Phi'$ und $\varphi'$ reproduciren sich beständig gegenseitig.

## § 4.

## Fortsetzung.

Definirt man in § 2. auch die dort als willkürlich angenommenen Grössen $\varphi_r^{(i)}$ in der Weise des § 3. und ergänzt das System der Gleichungen (4) durch das Folgende:

$$(4^a) \qquad \Sigma\varphi_r^{(i)}\Phi_1^{(i)}=0, \quad \Sigma\varphi_r^{(i)}\Phi_2^{(i)}=0, \ldots \Sigma\varphi_r^{(i)}\Phi_r^{(i)}=0,$$

so erhalten die Determinanten $\Delta_\varphi$ und $\Delta_\Phi$ (§ 2.) eine den $\Phi$, bezw. $\varphi$, analoge Bedeutung. Das Verschwinden von $\Delta_\varphi$ nämlich giebt, in Verbindung mit den Gleichungen:

$$f=0, \quad f_1=0, \ldots\ldots f_r=0$$

aus welchen die in $\Delta_\varphi$ einzusetzenden Differentialien berechnet werden, ausser den „festen" Punkten von $f$ noch diejenigen an, in welchen $f$ von einer Curve des Büschels der $r+1$ Curven $\varphi$ $r$punktig berührt wird. Es wird sich in diesem Abschnitt darum handeln, die Zahl dieser Punkte zu finden. Sei dieselbe $\alpha_r$. Sei ferner $N_r$ die Zahl der beweglichen („freien") Schnittpunkte von $f=0$ mit irgend einer linearen Function der $\Phi$, und allgemeiner $N_\varkappa$ die Zahl der beweglichen Schnittpunkte von $f=0$ mit irgend einer linearen Function der aus $\varkappa$ aufeinanderfolgenden Horizontalreihen gebildeten Unterdeterminanten von $\Delta_\varphi$. Lässt man analog $M_\varkappa$ die Zahl der Schnittpunkte von $f=0$ mit einer linearen Function der Unterdeterminanten $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante $\Delta_\Phi$ bedeuten, so hat man, infolge des vorigen § (oder auch § 2. 1. Satz):

$$(9) \qquad N_\varkappa = M_{r+1-\varkappa}.$$

Insbesondere ist:

$$(9^a) \qquad N_1 = M_r = ms - \sigma - 2\tau.$$

Die Reciprocität zwischen den $\varphi$ und $\Phi$ findet in dem Entsprechen der Zahlen $M$ und $N$ ihren Ausdruck. Es wirft sich aber zugleich die Frage auf: welche Zahl $\beta_r$ muss als der Zahl $\alpha_r$ entsprechend angesehen werden? Offenbar die Zahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $f=0$ und $\Delta_\Phi = 0$. Man kann diese aber auch durch die $\varphi$ definiren. Denn aus $\Delta_\Phi = 0$ folgt (abgesehen von den Lösungen, welche den „festen" Punkten von $f$ entsprechen), dass sich die Unterdeterminanten der ersten Horizontalreihe wie die der letzten verhalten; setzt man für dieselben die Werthe $\varphi$, so hat man alsdann die Gleichungen:

$$(8) \qquad \varrho \,.\, \varphi^{(i)}(x) = \varphi^{(i)}(x + \Delta x) \quad i = 0, 1, \ldots . r,$$

wo $\varrho$ ein Proportionalitätsfactor ist. Diese Gleichungen können nun aber entweder erfüllt werden durch besondere Voraussetzungen über die Curven $\varphi$. Diese wollen wir hier nicht machen. Oder durch die Annahme, dass die Curve $f$ Rückkehrpunkte*) besitzt, welche sich nicht unter den gemeinsamen $\sigma + \tau$ Basispunkten des Büschels der $\varphi$ befinden. Diese letztere Annahme lässt sich ohne Schwierigkeiten machen. Sei $\beta$ die Zahl dieser Rückkehrpunkte, so ist:

$$\beta_r = \beta .$$

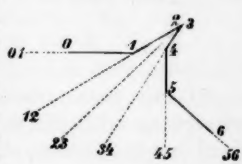
Man beweist ebenso, dass die Gleichung:

$$\Delta_\varphi = 0$$

dasselbe aussagt (abgesehen von den festen Punkten von $f$) wie die $r+1$ Gleichungen:

$$(8^a) \qquad \varrho \,.\, \Phi(x) = \Phi(x + \Delta x); \qquad i = 0, 1 \ldots r.$$

*) Von dem Verhalten der Tangente in der Nähe eines Rückkehrpunktes (1. Art) muss man sich dabei folgende Vorstellung bilden. Plücker (algebraische Curven S. 200) lässt eine Curve entstehen durch die Bewegung eines Punktes auf einer beweglichen Geraden, welche in jeder Lage Tangente an die Curve ist. Wenn nun die Gleichungen (8) für einen solchen Punkt $x$ erfüllt sein sollen, so kann dies nur dadurch geschehen, dass die Grössen $\Delta x$, oder auch das Element $\Delta s$ d. h. die Verschiebung des beweglichen Punktes auf der beweglichen Tangente an dieser Stelle = Null ist. Die Tangente dreht sich indess in derselben Richtung gleichförmig fort. Ersetzt man also die Curve durch ein Polygon, und sind 01, 12, 23, ..... die aufeinander folgenden Lagen der *ruckweise* sich bewegenden Tangente, auf welcher der Punkt sich *stetig* bewegt, so muss man sich die durch beifolgende Zeichnung gegebene Vorstellung von der Bewegung des Punktes auf der Tangente machen. Der Rückkehrpunkt entspricht dem Wendepunkt, für welchen 3 aufeinander folgende Punkte in einer Tangente liegen, dualistisch. In der That schneiden sich bei der hier gegebenen Vorstellung 3 aufeinander folgende Tangenten in dem Rückkehrpunkt.




Die Gleichungen (8) werden demnach erfüllt, wenn $x$ in den Punkt 2 fällt, weil alsdann $x + \Delta x$ in 3 fällt.

Wir haben oben die Zahl dieser Lösungen $\alpha_r$ genannt.

Die Annahme von solchen wirklichen Doppelpunkten von $f$, welche nicht Basispunkte sind, würde, wie man leicht durch einen Schluss, ähnlich dem oben gemachten, sieht, die Annahme von besonderen Voraussetzungen über das Büschel der Curven $\varphi$ nach sich ziehen, wenn die Dualität nicht verletzt werden sollte. Diese haben wir aber der Einfachheit wegen oben ausgeschlossen.

Wir nehmen also in der Folge ausser den $\tau$ Doppelpunkten von $f$, welche Basispunkte des Büschels sind, nur noch $\beta$ Rückkehrpunkte an.

Es ist aus Vorstehendem klar, dass beim Uebergang von den $\Phi$ zu den $\varphi$ und umgekehrt jedesmal eine Vertauschung zwischen den Grössen:

$$\begin{matrix} M & N & \alpha & \beta \\ N & M & \beta & \alpha \end{matrix}$$

stattfinden muss, so also, dass aus jeder Formel für die oberen eine mit denselben Zahlencoefficienten für die unteren abgeleitet werden kann, wobei bemerkenswerth ist, dass *jede* dieser Formeln alsdann eine Bedeutung sowohl für die $\Phi$ wie für die $\varphi$ besitzt, weil $M$, $N$, $\alpha$, $\beta$ für die einen wie für die anderen eine Bedeutung haben.

Die geometrische Bedeutung ist mit Rücksicht auf das oben über die Beziehungen zwischen den $\varphi$ und $\Phi$ Gesagte kurz zusammengefasst, folgende:

$M_\varkappa$ repräsentirt die Anzahl der freien (nicht in die Rückkehrpunkte von $f$ oder die $\sigma + \tau$ Basispunkte des Büschels fallenden) Schnittpunkte von $f=0$ mit einer solchen Curve des Büschels $\sum\limits_0^r \alpha\varphi = 0$, welche durch $r - \varkappa$ feste Punkte ausserhalb geht. (Diese letztere Beschränkung, welche den Index $\varkappa$ erläutern soll, hat, wie ersichtlich, auf die Grösse $M_\varkappa$ keinen Einfluss. Vielmehr ist im Allgemeinen $M_\varkappa = M_r = M$.) $N_\varkappa$ ist gleich der Anzahl der Curven des Büschels $\Sigma\alpha\varphi = 0$, welche durch $r - \varkappa + 1$ feste Punkte ausserhalb gehen und $f = 0$ $(\varkappa - 1)$fach berühren. $\alpha_\varkappa$ wollen wir durch die Gleichung $\alpha_\varkappa = N_{\varkappa+1}$ definiren. *$\alpha_r$ ist die Anzahl der $r$ fach berührenden Curven des Büschels $\sum\limits_0^r \alpha\varphi = 0$.* Ebenso sei $\beta_\varkappa$ definirt durch die Gleichung $\beta_\varkappa = M_{\varkappa+1}$. $\beta_r$ ist in dieser Erklärung nicht mit eingeschlossen. Wir haben oben $\beta_r = \beta =$ der Zahl der Rückkehrpunkte von $f = 0$ gesetzt; wir sagen jetzt besser, um die Analogie der $\varphi$ mit den $\Phi$ aufrecht zu erhalten: $\beta_r$ ist die Zahl der Punkte auf $f = 0$, welche die Eigenschaft haben, dass jede Curve des Büschels $\Sigma\alpha\varphi = 0$, welche durch einen solchen geht, zugleich durch einen nächstbenachbarten Punkt desselben Astes der Curve hindurchgeht (hierdurch sind gewöhnliche Doppelpunkte ausgeschlossen).

Nachdem nunmehr die geometrische Bedeutung der 4 Grössen $MN\alpha\beta$ für das Büschel $\Sigma\alpha\varphi = 0$ aufgestellt ist, haben wir bloss die Vertauschungen $NM\beta\alpha$ vorzunehmen, um dieselben auf das Büschel $\Sigma\alpha\varphi = 0$ anwendbar zu machen.

Zwischen diesen Zahlen und dem Geschlecht $p$ der Curve $f = 0$ (welches dualistisch sich selbst entspricht) bestehen 2 Beziehungen, welche wir im folgenden §. aufstellen wollen.

## § 5.

## Lösung des Problems.

Die Bedeutung, welche wir oben den Zeichen $MN\alpha\beta$ unterlegen, stimmt mit der im § 1. für besondere Fälle gebrauchten überein. Nun haben wir aber dort die Gültigkeit der Formel für $\alpha$, um deren Aufstellung es sich handelt, in den einfachsten Fällen $r = 1, 2, 3$ nachgewiesen. Wir wollen jetzt die Richtigkeit für $r - 1$ annehmen:

$$(10) \qquad \alpha_{r-1} = r\big(M_{r-1} + (p-1)(r-1)\big) - (r-1)\beta_{r-1}$$

und hieraus die Richtigkeit der Formel für $\alpha_r$ beweisen. $\alpha_{r-1}$ giebt die Zahl der gemeinsamen Lösungen von $f = 0$ mit der gleich Null gesetzten Determinante $\Delta_\varphi$ an, wenn man darin die letzte Horizontal- und Vertikalreihe weglässt. Erweitert man diese Determinante alsdann wieder durch Hinzunahme einer Vertikalreihe, welche die $\varphi^{(r)}$ wiederum enthält, und einer Horizontalreihe aus den beliebigen Grössen $a^{(0)}$, $a^{(1)}, \dots a^{(r)}$, so verändert sich die Zahl der gemeinsamen Lösungen in keiner Weise, wenn die Function $\varphi^{(r)}$ die gemeinsamen Eigenschaften der übrigen theilt. Andererseits ist nunmehr aber, nach dem vorhergehenden §., die Zahl der Lösungen zu bezeichnen mit $N_r$, sowie statt $M_{r-1}$, $\beta_{r-1}$ in der Formel für $\alpha_{r-1}$ zu setzen $M_r$, $\beta_r$. Man erhält so die Gleichung:

$$(10^a) \qquad N_r = r\big(M_r + (p-1)(r-1)\big) - (r-1)\beta_r$$

zugleich aber, wegen der Reciprocität der entsprechenden Zahlen:

$$(10^b) \qquad M_r = r\big(N_r + (p-1)(r-1)\big) - (r-1)\alpha_r.$$

Durch Elimination von $N_r$ aus beiden Gleichungen erhält man die zu beweisende Formel für $\alpha_r$ (vergl. § 1.).

Unter der Zahl $\alpha_r$ der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $f = 0$ und $\Delta_\varphi = 0$ befinden sich *keine solchen, welche in singuläre Punkte von* $f$ fallen. Denn für solche, welche in die $\beta$ Rückkehrpunkte, durch welche die Curven des Büschels $\varphi$ nicht hindurchgehen, fallen, verschwinden die Unterdeterminanten von $\Delta_\varphi$. Solche Lösungen haben wir aber ausgeschlossen. Indessen sind die übrigen Schnittpunkte von $\Delta_\varphi = 0$ mit $f = 0$ alle solche, welche in singuläre oder Basispunkte

des Büschels $\varphi$, also kurzweg in „feste" Punkte von $f$ fallen. Wir wollen einzeln deren Zahl bestimmen. Man vergleiche zu dem Zwecke zunächst die Zahl $\alpha_r$, gebildet für eine Curve $f=0$ mit $\beta$ Rückkehrpunkten mit derjenigen, welche für eine Curve mit $\beta-1$ Rückkehrpunkten gebildet ist. In beiden Fällen sei $m$ die Ordnung von $f$, $s$ die des Büschels, $\sigma$ die Zahl der einfachen Punkte, $\tau$ die der Doppelpunkte von $f$, welche Basispunkte des Büschels sind. Im ersten Falle ist:

$$\alpha_r = (r+1)\big(M+(p-1)r\big) - r\beta,$$

im zweiten Falle:

$$\alpha_r = (r+1)\big(M+pr\big) - r(\beta-1).$$

Beide Zahlen unterscheiden sich um $r(r+2)$ Schnittpunkte, welche demnach auf Rechnung des hinzutretenden Rückkehrpunktes kommen.

Es giebt $\sigma$ einfache und $\tau$ Doppelpunkte von $f$, durch welche alle Curven des Büschels $\varphi$ hindurchgehen. Wie viele Schnittpunkte von $\Delta_\varphi$ mit $f$ vereinigen sich in diesen Punkten? Geht zunächst einer der $\tau$ Doppelpunkte in einen einfachen Punkt über, so ändert sich $p$ in $p-1$, zugleich $\tau$ in $\tau-1$ und $\sigma$ in $\sigma+1$. Dadurch geht $\alpha_r$ über in $\alpha_r+(r+1)^2$, indem man sich der Formel:

$$M = ms - \sigma - 2\tau$$

erinnert. Also fallen in einen der $\tau$ Doppelpunkte $(r+1)^2$ Schnittpunkte mehr, als in einen der $\sigma$ einfachen. Lässt man endlich einen solchen aus der Curve $f$ herausrücken, so bleibt Alles ungeändert, bis auf $\sigma$, welches in $\sigma-1$ übergeht. Daher fallen $(r+1)$ Schnittpunkte in einen der $\sigma$ einfachen Punkte von $f$. Indem wir das Vorhergehende zusammenfassen, erhalten wir den Satz:

*Von den Schnittpunkten, welche die Curve $\Delta_\varphi=0$ (§ 2.) mit $f=0$ gemeinsam hat, fallen $\alpha_r$ (§ 1.) in solche Punkte von $f$, welche nicht weiter ausgezeichnet sind („bewegliche Schnittpunkte"). $r+1$ fallen in jeden der $\sigma$ einfachen, $(r+1)(r+2)$ in jeden der $\tau$ Doppelpunkte von $f$, welche Basispunkte des Büschels der Curven $\varphi$ sind; $r(r+2)$ in jeden der $\beta$ Rückkehrpunkte, welche keine Basispunkte sind.*

Addirt man alle diese Schnittpunkte, so muss man eine durch $m$ theilbare Zahl erhalten. In der That kommt:

$$ms(r+1) + \frac{r(r+1)}{2}\, m(m-3).$$

*Daher ist die Ordnung der ausgerechneten Covariante $\Delta_\varphi$ in Bezug auf die Coordinaten $x$:*

$$g = s(r+1) + \frac{r(r+1)}{2}(m-3),$$

oder auch: *$g$ ist die Ordnung der Curve $\Delta_\varphi=0$.**) Weil nun aber

*) Eine Bestätigung der obigen Formeln bietet sich in den Fällen $r=1$ und $r=2$ dar. Im ersten Falle ist die ausgerechnete Covariante $\Delta_\varphi$, wie wir bereits

die Curven $\Phi = 0$ ebensolche $\Delta_\varphi$ sind, blos für $r-1$ statt für $r$ geschrieben, so *gelten die eben ausgesprochenen Sätze alle noch, wenn man statt* $r$, $r-1$ *und zugleich statt* $\Delta_\varphi$ *schreibt: eine lineare Function der* $\Phi$ *oder: eine Curve des Büschels* $\Phi$.

## § 6.

## Geometrische Anwendungen.

Wir haben oben (§ 1.) an mehreren Beispielen gesehen, dass sich mittelst eindeutigen Entsprechens eine Beziehung herstellen lässt zwischen einer ebenen Curve und einem linearen Gebilde in einem Raume von $r$ Dimensionen.

Entspricht ein solches Gebilde eindeutig einer ebenen Curve $f=0$*), so lässt sich dasselbe definiren durch die folgenden Gleichungen für die Coordinaten $(y)$ desselben:

$$(11) \qquad \varrho \,.\, y_i = \varphi^{(i)}(x_1\, x_2\, x_3)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots . r,$$

wo $\varrho$ einen Proportionalitätsfactor bedeutet und die homogenen Coordinaten $x$ der Gleichung genügen:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0\,.$$

Man kann ein solches Gebilde auch durch die Gleichungen:

$$(11^a) \qquad \varrho \,.\, v_i = \Phi^{(i)}(x_1\, x_2\, x_3)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots . r$$
$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

darstellen, wenn man dasselbe auffasst als umhüllt von einer „ebenen" Mannigfaltigkeit von $r-1$ Dimensionen. *Diese Eigenschaft giebt den oben betrachteten Functionen* $\Phi$ *eine neue Bedeutung.*

Für $r = 2, 3$ haben wir oben einige geometrische Anwendungen bereits gegeben.

Für einen Raum von 4 Dimensionen hat neuerdings Plücker in seiner „neuen Geometrie des Raumes" eine geometrische Anschauung erschlossen. Nimmt man nämlich $r = 5$ an, und lässt zwischen den 6 Functionen $\varphi$ die identische Gleichung bestehen:

$$\varphi^{(0)}\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}\varphi^{(3)} + \varphi^{(4)}\varphi^{(5)} = 0,$$

so entspricht den Gleichungen (11) eine windschiefe Fläche**) als „lineares" Gebilde in einer (im Sinne von Riemann allerdings nicht

---

oben erwähnt haben, die Jacobi'sche Determinante von $f$, $\varphi^{(0)}$ und $\varphi^{(1)}$. Das Nähere über die Schnittpunkte derselben mit $f = 0$ sehe man in Salmon-Fiedler, Algebra, § 49. Was den Fall $r = 2$ anbelangt, so vergleiche man diese Ann. Bd. 3. S. 459, wo die Covariante $\Delta_\varphi$ mit $L$ bezeichnet ist und die betr. Zahlen auf ganz anderem Wege bestimmt worden sind.

*) Vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, 3. Abschn.

**) Vgl. Lüroth, Zur Theorie der w. F. Crelle-Borchardt 67.

mehr „ebenen") Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen. Sei $M$ die Ordnung, $p$ das Geschlecht, $\beta$ die Zahl der Rückkehrgeraden der windschiefen Fläche, so ist die Zahl der Complexe 1ter Ordnung, welche durch $6-i$ willkürlich im Raume angenommene Gerade und $i$ aufeinander folgende Erzeugende der windschiefen Fläche hindurch gehen:

$$N_i = i\big(M + (p-1)(i-1)\big) - (i-1)\beta .$$
$$i = 1, 2, \ldots 5.$$

## II.

## Ueber Berührungen an zwei verschiedenen Stellen einer gegebenen Curve.

### § 1.

### Dualistische Eigenschaften der Aufgabe.

An das im Vorstehenden behandelte Problem reiht sich naturgemäss ein anderes an, welches zwar vorwiegend ein algebraisches Interesse hat, insofern es sich hauptsächlich um die Ausscheidung unbrauchbarer Lösungen aus einem System von Gleichungen handelt — eine Operation, bei der sich die in dem vorangehenden Aufsatze angestellten Betrachtungen über Resultanten der Gleichungen von 3 Curven als dienlich erweisen — indessen kann man dem Problem auch eine geometrische Seite abgewinnen, insofern eben jene algebraische Behandlungsweise auf ein dualistisches Verhalten zweier Gattungen von Aufgaben über Berührungen hinweist, sowie dieselbe auch einen neuen Beitrag zu dem Dualismus der im vorstehenden Abschnitt besprochenen Curvenbüschel liefert. Man kann die Aufgabe in folgender Form stellen:

Man soll die Zahl der Punktepaare $x$, $y$ der Curve $f$ finden, welche sämmtliche Determinanten des folgenden unvollständigen Systems:

$$(1)\qquad \left\| \begin{array}{llcl} \varphi^{(0)}(x) & \varphi^{(1)}(x) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(x) \\ \varphi^{(0)}(x_1) & \varphi^{(1)}(x_1) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \varphi^{(0)}(x_{i-1}) & \varphi^{(1)}(x_{i-1}) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(x_{i-1}) \\ \varphi^{(0)}(y) & \varphi^{(1)}(y) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(y) \\ \varphi^{(0)}(y_1) & \varphi^{(1)}(y_1) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \varphi^{(0)}(y_{\varkappa-1}) & \varphi^{(1)}(y_{\varkappa-1}) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(r)}(y_{\varkappa-1}) \end{array} \right\| ,$$

wo $r = i + \varkappa$ ist, zum Verschwinden bringen. Die Bezeichnungen sind die des § 3. der ersten Abtheilung, sodass also z. B. $x_1$ den dem Punkte $x$ auf der Curve $f = 0$ nächstbenachbarten bezeichnet u. s. w. $\tau = d$ sei die Gesammtzahl der Doppelpunkte. Sei $M_{i,\varkappa}$ die Zahl

jener Punktepaare $x$, $y$. Geometrisch aufgefasst kommt jedem dieser Paare alsdann *die Eigenschaft zu, dass eine einfach unendliche Schaar von Curven des Büschels:*

$$\alpha^{(0)}\varphi^{(0)}+\alpha^{(1)}\varphi^{(1)}+\cdots+\alpha^{(r)}\varphi^{(r)}=0$$

*existirt, welche im Punkte $x$ $i$, im Punkte $y$ $\varkappa$ aufeinander folgende Punkte mit $f$ gemeinsam hat.* Die Aufstellung dieser Zahl $M_{i,\varkappa}$ ist nicht wohl zu trennen von derjenigen der Zahl $N_{i,\varkappa}$ der Punktepaare $x$, $y$ von $f=0$, welche die Determinanten des folgenden unvollständigen Systems (dasselbe ist der Uebersichtlichkeit wegen vertikal angeordnet):

$$(2)\qquad\left\|\begin{matrix}\varphi^{(0)}(x) & \varphi^{(1)}(x) & \dots & \varphi^{(r)}(x)\\ \varphi^{(0)}(x_1) & \varphi^{(1)}(x_1) & \dots & \varphi^{(r)}(x_1)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi^{(0)}(x_i) & \varphi^{(1)}(x_i) & \dots & \varphi^{(r)}(x_i)\\ \varphi^{(0)}(y) & \varphi^{(1)}(y) & \dots & \varphi^{(r)}(y)\\ \varphi^{(0)}(y_1) & \varphi^{(1)}(y_1) & \dots & \varphi^{(r)}(y_1)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \varphi^{(0)}(y_\varkappa) & \varphi^{(1)}(y_\varkappa) & \dots & \varphi^{(r)}(y_\varkappa)\end{matrix}\right\|$$

zum Verschwinden bringen. *$N_{i,\varkappa}$ bedeutet offenbar die Zahl der Curven des Büschels $\varphi$, welche mit $f=0$ eine $i$ punktige Berührung* ($i+1$ *aufeinander folgende Punkte*) *in $x$, eine $\varkappa$ punktige Berührung in $y$ haben.* Die Verwandtschaft der beiden eben aufgestellten Probleme wird durch den zweiten im § 2. des I. Abschnitts bewiesenen Determinantensatz begründet, vermöge dessen das System (1), nachdem in dasselbe statt der $\varphi$ die $\Phi$ (§ 3. des I. Abschnitts) eingeführt sind, genau auf das System (2) zurückkommt, während das System (2), in den $\Phi$ geschrieben, auf das System (1) führt. Das Letztere folgt aus dem Ersteren vermöge der zwischen den $\varphi$ und $\Phi$ bestehenden Dualität, welche in I., § 3. nachgewiesen wurde. Lässt man also eine Vertauschung der $\varphi$ mit den $\Phi$ eintreten, so geht $M_{i,\varkappa}$ in $N_{i,\varkappa}$ und umgekehrt über.

Man kann demnach *sowohl $M_{i,\varkappa}$ wie $N_{i,\varkappa}$ auch in Bezug auf das Büschel der $\Phi$ deuten*, und zwar bedeutet $N_{i,\varkappa}$ die Zahl der Punktepaare von $f=0$, für welche eine einfach unendliche Schaar von Curven des Büschels $\Phi$ in dem Punkte $x$ $i$, in dem Punkte $y$ $\varkappa$ aufeinander folgende Punkte mit $f$ gemeinsam hat; $M_{i,\varkappa}$ bedeutet die Zahl der Curven des Büschels $\Phi$, welche mit $f=0$ eine $i$ punktige Berührung in $x$, eine $\varkappa$ punktige in $y$ haben.

Man bestimmt nach einer von Herrn Salmon aufgestellten Methode die Zahl der gemeinsamen Lösungen eines unvollständigen Systems, indem man die gemeinsamen Lösungen $(pq)$ von irgend zweien $p$ und $q$ der Determinanten aufsucht und davon die Lösungen abzieht, welche demjenigen unvollständigen System von Determinanten

der nächst niederen Ordnung zukommen, welches den gemeinsamen Bestandtheil der beiden benutzten Determinanten bildet. Bildet man diesen Bestandtheil für irgend 2 Determinanten des Systems (1), so ist derselbe von der Form des Systems (2), nur dass statt $i$, $\varkappa$, $r$ resp. $i-1$, $\varkappa-1$, $r-2$ steht. Umgekehrt, bildet man den gemeinsamen Bestandtheil von 2 Determinanten des Systems (2), so ist derselbe ein unvollständiges System direct von der Form (1).

Daher hat man:

$$(3)\qquad \begin{aligned} M_{i,\varkappa} &= (pq) - N_{i-1,\varkappa-1} \\ N_{i,\varkappa} &= (pq) - M_{i,\varkappa}, \end{aligned}$$

wo $(pq)$ selbstverständlich beidemal einen anderen Werth hat. Sind wir nun im Stande, $(pq)$ jedesmal aufzustellen, so besitzen wir zwei recurrente Formeln für $M_{i,\varkappa}$ und $N_{i,\varkappa}$, welche diese Zahlen zu bestimmen erlauben.

## § 2.

## Die gemeinsamen Lösungen für je zwei Determinanten der Systeme (1) und (2).

Die Zahl der gemeinsamen Lösungen $(pq)$ irgend zweier Determinanten der Systeme (1) und (2) kann mittelst der in der voranstehenden Abhandlung über Elimination (§ 6.) aufgestellten Formel gefunden werden.

A. Seien $p_{x,y}=0$, $q_{x,y}=0$ irgend 2 *Determinanten des Systems* (1). Vermöge *jeder* dieser Gleichungen entspricht irgend einem Punkte $x$ eine Anzahl $N_\varkappa$ (I., § 4.) von Punkten $y$, welche indess theilweise nach $x$ hereinfallen. Andererseits entsprechen einem Punkte $y$ $N_i$ Punkte $x$, welche theilweise nach $y$ hereinfallen.

Als Gleichung für $y$ aufgefasst, repräsentirt eine solche Determinante, gleich Null gesetzt, eine Curve mit einem $i.\varkappa$ fachen Punkte in dem (festliegend gedachten) Punkte $x$. Man überzeugt sich hiervon am leichtesten durch Bildung der Differentialien der Determinante, welche alle für $y=x$ bis zum $i.\varkappa^{\text{ten}}$ verschwinden. Dasselbe findet statt, wenn man die Gleichung als die einer Curve mit den Coordinaten $x$ auffasst.

Man setze also in der Formel I. des § 6. jener Abhandlung $p_1=q_1=N_\varkappa$; $p_2=q_2=N_i$; $b=c=i.\varkappa$.

Endlich ist noch die Zahl derjenigen Punkte anzugeben, für welche die vermöge einer der obigen Gleichungen einander entsprechenden Punkte $x$ und $y$ zusammenfallen. Diese Zahl ist aber $P=Q=N_{i+\varkappa}$ zu setzen. Denn lässt man in einer Determinante des Systems (1) $y$ dem $x$ unendlich nahe rücken, setzt also $y=x_i$; $y_1=x_{i+1}$; ....

$y_{\varkappa-1} = x_{i+\varkappa-1}$, so entsteht eine solche, für welche [Abthlg. I. (§ 4.)] die Zahl der Lösungen $= N_{i+\varkappa}$ ist.

Man erhält demnach durch Einsetzung in jene Formel I.:

$$(pq) = N_i(N_\varkappa - i\varkappa) + N_\varkappa(N_i - i\varkappa) - i\varkappa \,.\, N_{i+\varkappa} + \varrho_{i,\varkappa} \,.\, \beta,$$

wo $\varrho_{i,\varkappa} \,.\, \beta$ mit Rücksicht auf die Beschränkung, welcher, wie a. a. O. bemerkt, die Anwendung der Formel unterliegt, zugefügt ist.*) Die Bestimmung des Factors $\varrho_{i,\varkappa}$ wird später mit Hülfe des Dualismus zwischen den $\varphi$ und $\Phi$ geleistet werden.

Man hat nun unter Berücksichtigung der identischen Gleichung:

$$N_{i+\varkappa} = N_i + N_\varkappa + 2i\varkappa(p-1) - \beta,$$

wenn man $(pq)$ in die oben für $M_{i,\varkappa}$ aufgestellte Gleichung einsetzt und in den Ausdruck $\varrho_{i,\varkappa} \,.\, \beta$ noch $i\varkappa \,.\, \beta$ eingehen lässt:

$$(4)\quad M_{i,\varkappa} = 2(N_i - i\varkappa)(N_\varkappa - i\varkappa) - 2pi^2\varkappa^2 - \varrho_{i,\varkappa} \,.\, \beta - N_{i-1,\varkappa-1}.$$

Denkt man sich dieselbe Abzählung für ein unvollständiges System gemacht, welches aus (1) durch Vertauschung der $\varphi$ mit den $\Phi$ (§ 3., I.) entsteht, so erhält man die Formel:

$$(4_a)\quad N_{i,\varkappa} = 2(M_i - i\varkappa)(M_\varkappa - i\varkappa) - 2pi^2\varkappa^2 - \varrho_{i,\varkappa} \,.\, \alpha - M_{i-1,\varkappa-1}.$$

Die $M_i$ drücken sich vermöge der Formel ($10^b$) der I. Abtheilung durch $N$ aus; überhaupt muss man, ebenso wie in der Formel für $M_{i,\varkappa}$ Alles zunächst durch $M$, so in der Formel für $N_{i,\varkappa}$ Alles zunächst durch $N$ ausdrücken, ehe man sich damit befassen kann, auch $N_{i,\varkappa}$ als Function von $M$ darzustellen. Indess würde für diesen Zweck auch schon die Kenntniss von $\varrho_{i,\varkappa}$ nöthig sein. Wir bedürfen daher noch einer anderen Beziehung zwischen $M_{i,\varkappa}$ und $N_{i,\varkappa}$.

B. Diese wird nun aber durch die Berechnung der gemeinsamen Lösungen $(pq)$ von 2 *Determinanten* $p_{x,y}$ *und* $q_{x,y}$ *des Systems* (2) mit $f(y) = 0$ geliefert. Da das Verfahren, welches uns hier zum Ziele führt, von dem oben für das System (1) eingeschlagenen nicht verschieden ist, so genügt es, die in die Formel I. des § 6. der Abhandlung über Elimination einzusetzenden Werthe anzugeben.

Wir stellen die Lösungen auf für:

---

*) Dass nicht eine weitere Beschränkung durch die $\sigma + d$ Basispunkte des Büschels eintritt, ergiebt sich daraus, dass jede Formel für Berührungen nicht nur für die ebene Curve $f$ eine Bedeutung hat, sondern zugleich gewisse Singularitäten eines Gebildes in einem mehrfachen Raume angiebt. Die Singularitäten eines solchen hängen im Allgemeinen von seinem Grade $M$, seinem Geschlechte $p$ und der Zahl der Rückkehrelemente $\beta$ ab, können aber explicite von den Zahlen $\sigma$ und $d$, welche durch den Zusammenhang des Gebildes mit der Curve $f$ erzeugt sind, ohne dass dieselben eine Eigenthümlichkeit des Gebildes an und für sich ausdrücken, in keiner Weise abhängig sein.

$$p_{x,y} = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi(x_i) & \ldots\ldots \\ \varphi(y) & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi(y_{\varkappa-1}) & \ldots \end{vmatrix} = 0; \qquad q_{x,y} = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi(x_{i-1}) & \ldots \\ \varphi(y) & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi(y_\varkappa) & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste Determinante hat, als Function von $y$ betrachtet, für $y = x$ einen $i(\varkappa - 1)$fachen Punkt; die zweite ebenda einen $\varkappa(i-1)$fachen. Man hat also zu setzen:

$$\begin{aligned} p_1 &= N_\varkappa; & p_2 &= N_{i+1} \\ q_1 &= N_{\varkappa+1}; & q_2 &= N_i; \\ b &= \varkappa(i+1); & c &= i(\varkappa+1) \\ P &= Q = N_{i+\varkappa+1}. \end{aligned}$$

Es ist indess hier nothwendig zu bemerken, dass, für $y = x_i$, $p_{x,y}$ und $q_{x,y}$ einander gleich, $= \Phi$, werden. Dies lässt darauf schliessen, dass auch noch in der reducirten Resultante der Factor $\Phi$ enthalten ist. Man erkennt aus einem speciellen Falle, z. B. wenn man $f(x) = x_3$ annimmt, leicht, dass derselbe nur noch *ein*mal als Factor auftritt. In $\delta^{\varkappa(i-1)}R$ ist mithin mit der $(i+1)\varkappa + 1^{\text{ten}}$ Potenz von $\Phi$ zu dividiren und man erhält mit Hinzufügung wieder eines von $\beta$ abhängigen Gliedes $\varrho'_{i,\varkappa} \cdot \beta$ durch Einsetzung in die $2^{\text{te}}$ Formel (3):

$$\text{(5)} \quad \begin{aligned} N_{i,\varkappa} = N_{i+1} \cdot N_{\varkappa+1} + N_i \cdot N_\varkappa - i(\varkappa+1)(N_{i+1} + N_\varkappa) \\ - \varrho'_{i\varkappa} \cdot \beta - [(i+1)\varkappa + 1] N_{i+\varkappa+1} - M_{i,\varkappa} \end{aligned}$$

eine Formel, die sich wieder dualistisch verdoppeln lässt. Zuvor wollen wir dieselbe in ähnlicher Weise, wie dies oben geschah, auf die einfachere Form bringen:

$$\text{(5}^{\text{a}}\text{)} \quad \left\{ \begin{aligned} N_{i,\varkappa} + M_{i,\varkappa} = [N_{i+1} - \varkappa i - \varkappa - 1]\,[N_{\varkappa+1} - \varkappa i - i] \\ + [N_\varkappa - \varkappa i - \varkappa - 1]\,[N_i - \varkappa i - i] \\ - 2i(\varkappa+1)(\varkappa i + \varkappa + 1)p - \varrho''_{i,\varkappa} \cdot \beta, \end{aligned} \right.$$

wo $\varrho''_{i,\varkappa} = \varrho'_{i,\varkappa} - (i\varkappa + \varkappa + 1)$.

Durch dualistische Vertauschung erhält man, unter Berücksichtigung der in (I. § 4.) entwickelten Gleichung:

$$M_i = N_{r+1-i} = N_{\varkappa+1}$$

eine andere Gleichung, welche mit der (5) vollständig übereinstimmt, bis auf $\beta \cdot \varrho''_{i,\varkappa}$, welches in $\alpha \cdot \varrho''_{i,\varkappa}$ übergeht. Beide können aber nur dann einander gleich sein, wenn jedes von ihnen gleich Null ist.

Man hat somit:

$$\text{(5}^{\text{b}}\text{)} \qquad \varrho''_{i,\varkappa} = 0; \qquad \varrho'_{i,\varkappa} = i\varkappa + \varkappa + 1.$$

## § 3.

## Aufstellung der Werthe für $M_{i,\varkappa}$ und $N_{i,\varkappa}$.

Eine directe Recursionsformel für $N_{i,\varkappa}$ erhält man, indem man die Gleichung (4) von (5) subtrahirt, nachdem man den Werth von $\varrho'_{i,\varkappa}$ substituirt hat. Durch Umkehrung kommt eine solche für $M_{i,\varkappa}$. Indess kann man auch die Gleichungen (4), ($4^a$) alternirend anwenden, indem man die oben erwähnten Regeln bezüglich des Ausdrucks in $M$ bezw. $N$ berücksichtigt.

Der Werth von $N_{0,\varkappa}$ wird direct erhalten. Die Zahl der gemeinsamen Nullpunkte der Determinanten des unvollständigen Systems:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varphi^{(0)}(x) & \dots & \varphi^{(\varkappa+1)}(x) \\ \varphi^{(0)}(y) & \dots & \dots \\ \varphi^{(0)}(y_1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi^{0}(y_\varkappa) & \dots & \varphi^{(\varkappa+1)}(y_\varkappa) \end{array} \right\| \quad \text{mit } f(x)=0,\ f(y)=0,\ f(y_1)=0, \text{ etc.}$$

ist nämlich gleich der Anzahl der Nullpunkte der Determinante, welche durch Auslassung der obersten Horizontalreihe entsteht, mal der Zahl der Nullpunkte der durch Auslassung der untersten entstehenden Determinante. Die letztere verschwindet für den Punkt $y = x$ $(\varkappa + 1)$fach, und man hat demnach:

$$N_{0,\varkappa} = (M - \varkappa - 1)\, N_{\varkappa+1}.$$

Daher:

$$M_{0,\varkappa} = (N_\varkappa - \varkappa - 1)\, N_0 = (M_1 - \varkappa - 1)\, M_{\varkappa+1}.$$

Da der Ausdruck für $M_{0,\varkappa}$ in die Formel ($4^a$) eingesetzt werden soll, so haben wir denselben erst als Function von $N$ dargestellt (I. § 5.). Setzt man die obigen Werthe in (4) und ($4^a$) ein, nachdem man $\varkappa$ mit $\varkappa - 1$ vertauscht hat, und addirt dann beide Formeln, so kommt:

$$\begin{aligned} M_{1,\varkappa} + N_{1,\varkappa} = {} & 2\,(M - \varkappa)\,(N_\varkappa - \varkappa) - 2p\varkappa^2 - \varrho_{1,\varkappa}\cdot\beta \\ & + 2\,(N_{\varkappa+1} - \varkappa)\,(N_2 - \varkappa) - 2p\varkappa^2 - \varrho_{1,\varkappa}\cdot\alpha \\ & - (M - \varkappa)\,N_\varkappa - (M_1 - \varkappa)\,M_\varkappa, \end{aligned}$$

wo jetzt $M_i = N_{\varkappa+2-i}$ und $\alpha = N_{\varkappa+2}$ ist. Andererseits ergiebt aber die Formel (5):

$$\begin{aligned} M_{1,\varkappa} + N_{1,\varkappa} = {} & (N_2 - 2\varkappa - 1)\,(N_{\varkappa+1} - \varkappa - 1) \\ & + (N_\varkappa - 2\varkappa - 1)\,(M - \varkappa - 1) \\ & - 2\,(\varkappa + 1)\,(2\varkappa + 1)\,p. \end{aligned}$$

Indem man mit Benutzung der Formeln I. § 5. beide aufeinander reducirt, erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\varrho_{1,\varkappa} = 2.$$

Hiermit lässt sich $M_{1,\varkappa}$ und $N_{1,\varkappa}$ vollständig bestimmen. Setzt man

diese Werthe wiederum in (4) und ($4^a$) ein, nachdem man zuvor für $\varkappa$ $\varkappa-1$ gesetzt und $M_{1,\varkappa-1}$ durchaus in $N$, $N_{1,\varkappa-1}$ durchaus in $M$ ausgedrückt hat, addirt und vergleicht mit (5), so erhält man den Werth für $\varrho_{2,\varkappa}$. Indem man so fortfährt, erhält man in jedem Falle:

$$\varrho_{i,\varkappa}=2\,.$$

Für $M_{i,\varkappa}$ und $N_{i,\varkappa}$ aber ergeben sich die Werthe:

$$(6)\quad \begin{aligned} N_{i,\varkappa}=&[N_{i+1}-(i+1)(\varkappa+1)][N_{\varkappa+1}-(i+1)(\varkappa+1)]-i\varkappa(i+1)(\varkappa+1)p\\ &-i\varkappa\beta+(i+1)(\varkappa+1)(M-i-\varkappa-1)\,,\end{aligned}$$

$$M_{i,\varkappa}=N_{i-1,\varkappa-1}-2i\varkappa[M+(p-1)(i+\varkappa-1)-\beta]-2(i+\varkappa)\beta\,,$$

wo die $N_r$ sich aus den Formeln (10) des § 5., I. Abthlg., ergeben.

Den directen Beweis dieser Formeln führt man auf folgende Weise. Zunächst erkennt man leicht, dass die eine aus der anderen durch dualistische Vertauschung ableitbar ist. Dies lässt sich ohne mühsame Rechnung ausführen mit Hülfe der Formeln für $N_r$, sowie der folgenden:

$$(7)\quad \begin{aligned} N_i&=N_{\varkappa+1}\\ N_{i+\varkappa}-N_i-N_\varkappa&=2i\varkappa(p-1)-\beta\,,\end{aligned}$$

welche sich leicht aus Früherem ergeben.

Man nehme nun die Formel für $N_{i,\varkappa}$ als bewiesen für den Fall $N_{i-1,\varkappa-1}$ an. Durch Substitution des Werthes hiervon in die Gleichung (4) erhält man den Werth von $M_{i,\varkappa}$ ausgedrückt durch $\varrho_{i,\varkappa}$. Durch dualistische Vertauschung erhält man auch $N_{i,\varkappa}$ durch $\varrho_{i,\varkappa}$ ausgedrückt. Addirt man beide Werthe, nachdem man $M$ statt $N$ in $N_{i,\varkappa}$ eingeführt hat, mit Hülfe der Formeln I. § 5., so muss das Resultat identisch mit der rechten Seite der Gleichung (5) übereinstimmen [cfr. Gl. ($5^b$)]. Diese Forderung lässt aber die Bestimmung von $\varrho_{i,\varkappa}$ zu.

Man erhält $\varrho_{i,\varkappa}=2$. Durch Einsetzung in die früher erhaltenen Werthe von $M_{i,\varkappa}$ und $N_{i,\varkappa}$ ergeben sich alsdann Ausdrücke, welche leicht auf die Form (6) gebracht werden können. Somit ist also der Schluss von $i-1$, $\varkappa-1$ auf $i$, $\varkappa$ gerechtfertigt. Da die Formel (6) für den Fall 0, $\varkappa$, wie wir oben gezeigt, direct bewiesen werden kann, so ist der Beweis für jene Formeln geliefert.

Wir haben es vorgezogen, den Gang der Rechnung — denn auf eine solche reducirt sich der Beweis — nur anzudeuten. Die Ausführung, die sich bei passender Verwendung der Formeln (7) ohne Mühe bewerkstelligen lässt, bietet kein besonderes Interesse.

## § 4.

## Geometrische Anwendungen.

Mit Rücksicht auf die im Schlussparagraphen des I. Abschnittes gemachten Bemerkungen genügt es, einige geometrische Resultate aus dem Vorstehenden beispielsweise anzuführen.

Die Zahl der Tangenten einer Raumcurve, welche dieselbe noch einmal (in einem fremden Punkte) treffen, ist:

$$M_{1,2} = 2(M-2)(M-3) + 2p(M-6) - M\beta .$$

Ebenso ist $N_{1,2}$ gleich der Zahl der Schmiegungsebenen, welche eine fremde Tangente enthalten.

Die Zahl der Congruenzen 1ter Ordnung, welche mit einer gegebenen windschiefen Fläche an einer Stelle derselben $i$ aufeinander folgende Erzeugende, an der anderen $\varkappa$ solche gemeinsam haben (wo $i, \varkappa = 1, 2, 3, 4$ und $i + \varkappa \leqq 5$ ist) und ausserdem durch $5 - i - \varkappa$ beliebige Gerade im Raume gehen, ist $= M_{i,\varkappa}$.

Die Zahl der Complexe 1ter Ordnung, welche mit der windschiefen Fläche ein $i$fache und eine $\varkappa$fache Berührung gemeinsam haben und durch 5*) $- i - \varkappa$ beliebige Gerade im Raume gehen, ist

$$= N_{i,\varkappa} . \quad \left(i, \varkappa = 1, 2, 3, 4; \quad i + \varkappa \leqq 5^{*)}\right).$$

*) In der erwähnten Note in den Göttinger Nachrichten steht beidemal 6 statt 5. Ich verdanke Herrn Klein die Berichtigung dieses Fehlers.

Darmstadt, im Juli 1871.

# Formules relatives à la théorie des intégrales définies.

Par M. Andréiewsky à Varsovie.

Cette note a pour objet l'indication d'un nouveau moyen par lequel on peut obtenir quelques relations entre certaines intégrales définies.

Nous avons pris, comme point de départ, pour la présente recherche une formule de M. Lejeune-Dirichlet, qu'il a si bien employée dans son mémoire „sur les séries, dont le terme général dépend de deux angles“ (Journal de Crelle, t. XVII.); cette formule est la suivante:

$$(1) \qquad \int_0^a dx \int_0^a f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction quelconque, continue entre les limites des intégrations.

La formule (1) se démontre très facilement à l'aide de considérations géométriques. (On peut voir cette démonstration aussi dans le cours de calcul différentiel et intégral de M. Serret, t. II. p. 295.)

En voulant donner une démonstration analytique de la formule (1), nous avons trouvé en même temps un corollaire intéressant de cette formule et qui, il me semble, n'a pas été encore remarqué.

Pour démontrer (1), nous posons:

$$f(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x},$$

et nous aurons:

$$\int_0^x f(x, y)\, dy = \varphi(x, x) - \varphi(x, 0),$$

$$\int_y^a f(x, y)\, dx = \psi(a, y) - \psi(y, y),$$

après quoi la formule (1) devient:

$$\int_0^a [\varphi(x, x) - \varphi(x, 0)]\, dx = \int_0^a [\psi(a, y) - \psi(y, y)]\, dy.$$

Cette équation peut être présentée sous la forme:

$$(2)\qquad \int_0^a [\varphi(x,x)+\psi(x,x)]\,dx = \int_0^a [\varphi(x,0)+\psi(a,x)]\,dx,$$

où $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ désignent deux fonctions de $x$, $y$ continues entre les limites des intégrations et satisfaisant à la condition:

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}.$$

La formule (2) est justement le corollaire, mentionné plus haut, de la formule (1); il est clair, que réciproquement, si la formule (2) est démontrée indépendamment de (1), alors la formule (1) sera un corollaire de (2).

Occupons-nous maintenant de démontrer la formule (2). Pour cela, nous remarquons, qu'en vertu de l'équation (3), on a:

$$(4)\qquad \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = dF(x,y).$$

Au moyen d'une formule connue, nous déduisons d'ici la fonction $F(x, y)$ et nous écrivons sa valeur de la manière suivante:

$$F(x,y) = \int_a^x \varphi(z,y)\,dz + \int_0^x \psi(a,z)\,dz + C,$$

($C$ étant une constante arbitraire).

Pour $y = x$, cette équation devient:

$$F(x,x) = \int_a^x \varphi(z,x)\,dz + \int_0^x \psi(a,z)\,dz + C.$$

D'un autre côté, en posant $y = x$ dans (4), nous aurons:

$$dF(x,x) = [\varphi(x,x)+\psi(x,x)]\,dx,$$

et, par conséquent:

$$(5)\qquad \int [\varphi(x,x)+\psi(x,x)]\,dx = \int_a^x \varphi(z,x)\,dz + \int_0^x \psi(a,z)\,dz + C.$$

Pour passer maintenant à l'intégrale définie:

$$(6)\qquad \int_0^a [\varphi(x,x)+\psi(x,x)]\,dx$$

nous remarquons, que pour $x = a$ et $x = 0$, le second membre de (5) prend successivement les valeurs:

$$\int_0^a \psi(a,z)\,dz + C,\qquad \int_a^0 \varphi(z,0)\,dz + C$$

dont la différence est:

$$\int_0^a \psi(a,z)\,dz - \int_a^0 \varphi(z,0)\,dz,$$

ou, en remplaçant $z$ par $x$ et renversant les limites de la seconde intégrale:

$$\int_0^a \varphi(x, 0)\, dx + \int_0^a \psi(a, x)\, dx.$$

Telle est la valeur de l'intégrale (6), et, par conséquent, la formule (2) est démontrée.

Il est évident, que, dans la démonstration précédente, la limite inférieure de l'intégration peut être un nombre quelconque; il faut seulement que les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ restent continues entre les limites des intégrations.

Ainsi, la formule (2) peut être remplacée par une autre plus générale, à savoir:

$$(7)\quad \int_a^b [\varphi(x, x) + \psi(x, x)]\, dx = \int_a^b [\varphi(x, a) + \psi(b, x)]\, dx.$$

Si dans les deux membres de cette équation on change les lettres $a, b$ l'une dans l'autre, elle deviendra:

$$\int_b^a [\varphi(x, x) + \psi(x, x)]\, dx = \int_b^a [\varphi(x, b) + \psi(a, x)]\, dx,$$

et, en renversant ici les limites de l'intégration, et multipliant les deux membres de l'équation par $-1$, nous aurons:

$$(8)\quad \int_a^b [\varphi(x, x) + \psi(x, x)]\, dx = \int_a^b [\varphi(x, b) + \psi(a, x)]\, dx.$$

La comparaison des formules (7) et (8) entre elles nous amène à cette conclusion, que dans le second membre de chacune de ces formules on peut transmettre sous le signe d'intégration les lettres $a$, $b$, sans aucune influence sur la valeur de l'intégrale.

La formule (7) facilite, en général, la recherche de l'intégrale $\int_a^b [\varphi(x, x) + \psi(x, x)]\, dx$ puisqu'elle permet d'y substituer à la fonction $\varphi(x, x) + \psi(x, x)$ une autre, plus simple: $\varphi(x, a) + \psi(b, x)$.

Pour montrer maintenant, comment la formule (7) peut servir pour la déduction des relations entre certaines intégrales définies, nous agissons ainsi: prenons une fonction quelconque de la variable imaginaire $x + y\sqrt{-1}$, par exemple $F(x + y\sqrt{-1})$, et mettons-la sous la forme:

$$F(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x, y) + \sqrt{-1}\, \psi(x, y),$$

où $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont deux fonctions réelles de $x$, $y$.

On sait, que quelque soit la fonction $F$, les fonctions $\varphi$ et $\psi$ satisferont aux deux conditions:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}.$$

Par conséquent, en supposant, que $\varphi(x, x)$ et $\psi(x, x)$ restent

continues entre les valeurs des variables $x = a$, $x = b$, nous pourrons appliquer aux fonctions $\varphi(x, x) + \psi(x, x)$, $\varphi(x, x) - \psi(x, x)$ la formule (7), et nous recevrons:

$$(9) \qquad \int_a^b [\varphi(x, x) + \psi(x, x)]\, dx = \int_a^b [\psi(x, a) + \varphi(b, x)]\, dx,$$

$$(10) \qquad \int_a^b [\varphi(x, x) - \psi(x, x)]\, dx = \int_a^b [\varphi(x, a) - \psi(b, x)]\, dx,$$

d'où il suit, que la fonction $F(x + x\sqrt{-1})$ étant mise sous la forme:

$$F(x + x\sqrt{-1}) = \Theta(x) + \sqrt{-1}\,\omega(x),$$

les intégrales définies:

$$\int_a^b \Theta(x)\, dx, \quad \int_a^b \omega(x)\, dx$$

peuvent être exprimées par d'autres intégrales définies, en général plus simples que les premières.

Soit, par exemple:

$$F(x + y\sqrt{-1}) = e^{-(x+y\sqrt{-1})^2} = e^{-x^2}.\, e^{y^2}(\cos 2xy - \sqrt{-1}\sin 2xy),$$

et par suite:

$$(11) \quad \begin{aligned} &\varphi(x, y) = e^{-x^2}.\, e^{y^2}\cos 2xy, && \psi(x, y) = -\, e^{-x^2}.\, e^{y^2}\sin 2xy \\ &\varphi(x, x) = \cos 2x^2, && \psi(x, x) = -\sin 2x^2 \end{aligned}$$

et, en vertu des formules (9), (10), où nous prendrons 0 pour la limite inférieure et $a$ pour la limite supérieure, nous aurons:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^a [\cos 2x^2 - \sin 2x^2]\, dx = e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}\cos 2ax\, dx \\ &\int_0^a [\cos 2x^2 + \sin 2x^2]\, dx = \int_0^a e^{-x^2} dx + e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}\sin 2ax\, dx. \end{aligned} \right.$$

En transmettant dans les seconds membres des formules (9), (10) sous les signes d'intégration les lettres $a$, $b$ [en ayant égard à la remarque faite plus haut relativement aux formules (7), (8)] et en les appliquant ensuite aux fonctions (11), on trouve:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^a [\cos 2x^2 - \sin 2x^2]\, dx = \int_0^a e^{-x^2} dx - e^{a^2}\int_0^a e^{-x^2}\sin 2ax\, dx \\ &\int_0^a [\cos 2x^2 + \sin 2x^2]\, dx = e^{a^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2ax\, dx. \end{aligned} \right.$$

La comparaison des formules (12), (13) entre elles donnera les relations:

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = e^{a^2}\int_0^a e^{-x^2}\sin 2ax\,dx + e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}\cos 2ax\,dx,$$

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = e^{a^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2ax\,dx - e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}\sin 2ax\,dx.$$

Prenons encore la fonction:

$$\frac{e^{b(x+y\sqrt{-1})}}{x+y\sqrt{-1}} = \left[x\cos by + y\sin by + \sqrt{-1}\,(x\sin by - y\cos by)\right]\frac{e^{bx}}{x^2+y^2},$$

où $b$ est différent de zéro.

Dans le cas actuel:

$$\varphi(x,y) = \frac{e^{bx}(x\cos by + y\sin by)}{x^2+y^2}, \qquad \psi(x,y) = \frac{e^{bx}(x\sin by - y\cos by)}{x^2+y^2},$$

$$\varphi(x,x) = \frac{e^{bx}(x\cos bx + x\sin bx)}{2x^2}, \qquad \psi(x,x) = \frac{e^{bx}(x\sin bx - x\cos bx)}{2x^2},$$

et les formules (9), (10) fourniront les relations:

$$\int_0^a \frac{e^{bx}\sin bx}{x}\,dx = ae^{ab}\int_0^a \frac{\cos bx\,dx}{x^2+a^2} + e^{ab}\int_0^a \frac{x\sin bx\,dx}{x^2+a^2},$$

$$\int_0^a \frac{e^{bx}\cos bx}{x}\,dx = \int_0^a \frac{e^{bx}}{x}\,dx - ae^{ab}\int_0^a \frac{\sin bx\,dx}{x^2+a^2} + e^{ab}\int_0^a \frac{x\cos bx\,dx}{x^2+a^2}.$$

Nous croyons, que les exemples cités ci-dessus montrent déjà suffisamment la possibilité de déduction des formules (9), (10) de plusieurs relations entre différentes intégrales définies.

Revenons maintenant au théorème exprimé par la formule (7); nous allons montrer comment ce théorème peut être généralisé, c'est à dire, comment on peut l'étendre au cas de plusieurs variables.

Nous nous bornerons à donner son extension au cas de trois variables, car après cela il sera facile de faire la même chose pour un nombre quelconque de variables. Le théorème relatif à la formule (7), étendu au cas de trois variables s'exprime ainsi:

Si $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\vartheta(x,y,z)$ sont trois fonctions de $x$, $y$, $z$ satisfaisant aux trois conditions:

$$(14) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\vartheta}{\partial y}$$

et restant continues entre les valeurs des variables $x = y = z = a$ et $x = y = z = b$, on aura:

$$(15) \qquad \int_a^b [\varphi(x,x,x) + \psi(x,x,x) + \vartheta(x,x,x)]\,dx$$

$$= \int_a^b [\varphi(x,b,b) + \psi(a,x,a) + \vartheta(a,b,x)]\,dx.$$

Pour démontrer ce théorème, nous ne pouvons plus nous servir de la

formule (1) de M. Lejeune-Dirichlet, parce que cette formule se rapporte seulement au cas de deux variables; mais la démonstration analytique que nous avons proposée pour cette formule peut être aussi appliquée avec succès à la formule (15).

Ainsi, des conditions (14) nous concluons, que:

$$(16)\quad \varphi(x, y, z)\,dx + \psi(x, y, z)\,dy + \vartheta(x, y, z)\,dz = dF(x, y, z).$$

Cette équation, à l'aide d'une formule connue, nous permet de présenter la valeur de la fonction $F(x, y, z)$ sous cette forme:

$$F(x, y, z) = \int_a^x \varphi(u, y, z)\,du + \int_b^y \psi(a, u, z)\,du + \int_b^z \vartheta(a, b, u)\,du + C.$$

En posant ici, dans les deux membres, $y = z = x$, on trouve:

$$F(x, x, x) = \int_a^x \varphi(u, x, x)\,du + \int_b^x \psi(a, u, x)\,du + \int_b^x \vartheta(a, b, u)\,du + C,$$

ou d'après l'égalité (16):

$$\int [\varphi(x, x, x) + \psi(x, x, x) + \vartheta(x, x, x)]\,dx$$

$$= \int_a^x \varphi(u, x, x)\,du + \int_b^x \psi(a, u, x)\,du + \int_b^x \vartheta(a, b, u)\,du + C.$$

Pour $x = b$ et $x = a$, le second membre de cette équation prend successivement les valeurs:

$$\int_a^b \varphi(u, b, b)\,du + C,$$

$$\int_b^a \psi(a, u, a)\,du + \int_b^a \vartheta(a, b, u)\,du + C,$$

dont la différence peut être écrite ainsi:

$$\int_a^b [\varphi(u, b, b) + \psi(a, u, a) + \vartheta(a, b, u)]\,du,$$

d'où résulte l'exactitude de la formule (15).

Si dans cette formule (15) on change les lettres $a$, $b$ l'une dans l'autre, et qu'on multiplie ensuite ses deux membres par $-1$, on aura:

$$\int_a^b [\varphi(x, x, x) + \psi(x, x, x) + \vartheta(x, x, x)]\,dx$$

$$= \int_a^b [\varphi(x, a, a) + \psi(b, x, b) + \vartheta(b, a, x)]\,dx.$$

En comparant cette équation avec l'équation (15), nous voyons, que dans le second membre de cette dernière il est permis de trans-

mettre sous le signe de l'intégration les lettres $a$, $b$ sans aucune influence sur le résultat final de l'intégration.

Quelques-uns des résultats trouvés ci-dessus peuvent être encore généralisés.

En effet, supposons qu'une intégrale définie de la forme:

$$\int_a^b f(x, a, b)\, dx,$$

c'est à dire, qui contient sous le signe d'intégration les limites $a$, $b$, comme paramètres, peut être transformée de quelque manière en une autre intégrale définie:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

ayant les mêmes limites $a$, $b$, mais ne les contenant plus sous le signe d'intégration, ét proposons nous de chercher la forme de la fonction $\varphi(x)$, satisfaisant à l'équation:

$$\int_a^b f(x, a, b)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx, \tag{17}$$

que nous admettons comme possible.

Pour cela, différentions les deux membres de l'équation (17) par rapport à l'une des limites, par exemple par rapport à $b$, en considérant $b$, comme un paramètre; nous aurons:

$$f(b, a, b) + \int_a^b \frac{\partial f(x, a, b)}{\partial b}\, dx = \varphi(b).$$

Les lettres $a$, $b$, désignant des nombres quelconques, on peut faire dans la dernière équation $b = a$, et alors elle devient:

$$f(a, a, a) = \varphi(a),$$

ou en remplaçant la lettre $a$ par $x$:

$$\varphi(x) = f(x, x, x).$$

Telle est l'expression de la fonction inconnue $\varphi(x)$ au moyen de la fonction donnée $f(x, a, b)$.

Nous avons donc ce résultat intéressant, que si l'équation (17) existe, elle est nécessairement de la forme:

$$\int_a^b f(x, a, b)\, dx = \int_a^b f(x, x, x)\, dx, \tag{18}$$

et, en vérité les cas d'existence de la formule (17), que nous avons trouvés (7), (15) rentrent dans la formule (18).

En changeant dans (17) les lettres $a$, $b$ l'une dans l'autre, et multipliant ensuite les deux membres par $-1$, nous aurons:

$$\int_a^b f(x, b, a)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

et, en comparant avec (17):

$$\int_a^b f(x, a, b)\, dx = \int_a^b f(x, b, a)\, dx,$$

c'est à dire, que: si l'équation (17) est possible, on pourra transposer les lettres $a$, $b$ sous le signe d'intégration, sans changer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x, a, b)\, dx$.

# On a surface of the eighth order.

By A. Cayley.

---

I reproduce in an altered form, so as to exhibit the application thereto of the theory of the six coordinates of a line, the analysis by which Dr. Hierholzer obtained the equation of the surface of the eighth order, the locus of the vertex of a quadricone which touches six given lines.

I call to mind that if $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ are the coordinates of any two points on a line, then that the quantities $(a, b, c, f, g, h)$ which denote respectively

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma,\ \gamma\alpha' - \gamma'\alpha,\ \alpha\beta' - \alpha'\beta,\ \alpha\delta' - \alpha'\delta,\ \beta\delta' - \beta'\delta,\ \gamma\delta' - \gamma'\delta),$$

and which are such that $af + bg + ch = 0$, are the six coordinates of the line.*)

Consider the given point $(x, y, z, w)$ and the given line $(a, b, c, f, g, h)$, and write for shortness

$$\begin{aligned} P &= \quad \cdot \quad hy - gz + aw, \\ Q &= -hx \quad \cdot \quad + fz + bw, \\ R &= \quad gx - fz \quad \cdot \quad + cw, \\ S &= -ax - by - cz \quad \cdot \end{aligned}$$

then taking $(X, Y, Z, W)$ as current coordinates, the equation of the plane thro' the given point and line is

$$PX + QY + RZ + SW = 0.$$

Considering in like manner the given point $(x, y, z, w)$ and the three given lines $(a_1, b_1, c_1, f_1, g_1, h_1)$, $(a_2, \ldots)$, $a_3, \ldots)$, then we have the three planes

$$\begin{aligned} P_1X + Q_1Y + R_1Z + S_1W &= 0, \\ P_2X + Q_2Y + R_2Z + S_2W &= 0, \\ P_3X + Q_3Y + R_3Z + S_3W &= 0, \end{aligned}$$

and if these planes have a common line, the point $(x, y, z, w)$ is

---

*) Cayley, On the six coordinates of a line. Camb. Phil. Trans. t. XI. (1869), p. 290—323.

in a line meeting each of the three given lines; that is the locus of the point is the hyperboloid thro' the three given lines. It follows that the equations

$$\left\| \begin{array}{cccc} P_1, & Q_1, & R_1, & S_1 \\ P_2, & Q_2, & R_2, & S_2 \\ P_3, & Q_3, & R_3, & S_3 \end{array} \right\| = 0$$

reduce themselves to a single equation, that of the hyperboloid in question.

I write for shortness

$$\begin{aligned}(000) = (agh)\,x^2 + (bhf)\,y^2 + (cfg)\,z^2 + (abc)\,w^2 \\ + [(abg) - (cah)]\,xw \\ + [(bch) - (abf)]\,yw \\ + [(caf) - (bcg)]\,zw \\ + [(bfg) + (chf)]\,yz \\ + [(cgh) + (afg)]\,zx \\ + [(ahf) + (bgh)]\,xy,\end{aligned}$$

viz. (123) will mean $(a_1\, g_2\, h_3)\, x^2 +$ etc. where $(a_1\, g_2\, h_3)$ etc. denote as usual the determinants

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1, & g_1, & h_1 \\ a_2, & g_2, & h_2 \\ a_3, & g_3, & h_3 \end{array} \right| \text{ etc.}$$

then the equations in question are found to be $x\,(123) = 0$, $y\,(123) = 0$, $z\,(123) = 0$, $w\,(123) = 0$, reducing themselves to the single equation $(123) = 0$, which is accordingly that of the hyperboloid thro' the three lines.*)

Proceeding now to the above mentioned problem, we have the point $(x, y, z, w)$, and the six lines $(a_1, b_1, c_1, f_1, g_1, h_1)$, $(a_2, \ldots)$ etc., say the lines 1, 2, 3, 4, 5, 6: the six planes

$$P_1 X + Q_1 Y + R_1 Z + S_1 W = 0, \text{ etc.}$$

must be tangents to the same quadricone; that is, considering the sections by the plane $W = 0$, the six lines

$$P_1 X + Q_1 Y + R_1 Z = 0, \text{ etc.}$$

must be tangents to the same conic, and the condition for this is

$$[1\,2\,3\,4\,5\,6] = 0$$

where the symbol stands for the determinant

$$\left| \begin{array}{cccccc} P_1^2, & Q_1^2, & R_1^2, & Q_1 R_1, & R_1 P_1, & P_1 Q_1 \\ P_2^2 \ldots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array} \right|$$

*) This equation is given in the paper above referred to, p. 111.

But as well known this equation may be written

$$(*)\qquad (126)\,(346)\,(145)\,(235) - (146)\,(236)\,(125)\,(345) = 0$$

where (126) etc. denote the determinants

$$\begin{vmatrix} P_1, & Q_1, & R_1 \\ P_2, & Q_2, & R_2 \\ P_3, & Q_3, & R_3 \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

or what is the same thing they denote the functions above represented by the like symbols $(126) = (a_1\, g_2\, h_6)\, x^2 +$ etc. The equation (*) just obtained is Hierholzer's equation for the surface of the eighth order, the locus of the vertex of a quadricone which touches six given lines.

I remark that in my Memoir on Quartic surfaces Proc. Lond. Math. Soc. vol. III. (1870), p. 19—69. I obtained the equation of the surface under the fore going form $[1\,2\,3\,4\,5\,6] = 0$ or say $[(P,\ Q,\ R)^2] = 0$, noticing that there was a factor $w^4$, so that the order of the surface was $= 8$; and further that the equation might be written

$$w^8 \exp. \frac{1}{w} \left\{x(g\partial_c - h\partial_b) + y(h\partial_a - f\partial_c) + z(f\partial_b - g\partial_a)\right\} [(a,\ b,\ c)^2] = 0$$

where exp. $\Theta$ (read exponential) denotes $e^{\Theta}$, and $[(a,\ b,\ c)^2]$ denotes

$$\begin{vmatrix} a_1^2, & b_1^2, & c_1^2, & b_1c_1, & c_1a_1, & a_1b_1 \\ a_2^2, & \ldots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix}.$$

Also that the equation contains the four terms

$$x^8\,[(a,\ -h,\ g)^2] + y^8\,[(h,\ b,\ -f)^2] + z^8\,[(-g,\ f,\ c)^2] + w^8\,[a,\ b,\ c)^2] = 0.$$

Cambridge, 12. Sept. 1871.

# Ueber die Ausartungen einer Curve dritter Ordnung.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

---

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den verschiedenen Singularitäten, die bei einer ebenen Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung auftreten können. Es werden nicht nur die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen für das Stattfinden der verschiedenen Fälle, sondern namentlich auch Methoden entwickelt werden, um die singulären Punkte und deren Verbindungslinien zu bestimmen.

Die Behandlung dieser Art von Aufgaben bietet die grössten Schwierigkeiten dar und wird sogar sehr oft unmöglich, so lange man bloss Covarianten und zugehörige Formen als analytische Hilfsmittel einführt. Es ergeben sich jedoch mit Leichtigkeit übersichtliche Resultate, sobald man Zwischenformen in den Kreis der Betrachtungen zieht, d. h. sobald man die besondern Punkte und die durch sie gelegten Geraden *gleichzeitig* zu berechnen sucht. Es tritt dies am auffallendsten hervor, wenn die Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung in ein Dreieck zerfällt. Während die Covarianten und Contravarianten gar keinen Ansatz zur Erledigung dieses Falles bieten, gewährt die Einführung der Zwischenformen $u_x$, $\Theta$ und $B = \Sigma \pm \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} u_3$ eine Lösung, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt.

Den Inhalt dieses Aufsatzes hatte ich bereits Mitte April dieses Jahres gefunden und zum grössten Theil meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Clebsch, schriftlich mitgetheilt, als die Note Gordans „über Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit zwei Doppelpunkten" (Band III dieser Annalen, Schluss) erschien. Die Gerade, welche die beiden Doppelpunkte verbindet, wird dort vermittelst der Covarianten $f$ und $\Delta$ berechnet. Eine etwas einfachere Bestimmung dieser Linie, sowie der beiden Doppelpunkte selbst, werden wir hier vermittelst der Zwischenformen $\mathsf{K}$ und $\Theta$ geben.

## I.

### Curven 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Dieser Fall ist bereits vollständig von Aronhold erledigt worden. Die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass die Curve 3ter Ordnung:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = \cdots = 0$$

einen Doppelpunkt besitze, ist:

$$S^3 - T^2 = 0,$$

und die Coordinaten des Doppelpunktes bestimmen sich durch die laufende Proportion:

$$x_1^3 : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_3 : \cdots : x_1 x_2 x_3 = p_{111} : p_{112} : p_{113} : \cdots : p_{123} \text{*)}.$$

## II.

### Existenz eines Rückkehrpunktes.

Soll die Curve $f$ einen Rückkehrpunkt haben, so muss bekanntlich:

$$S = 0 \quad \text{und} \quad T = 0$$

sein. Dieses wohl zuerst von Salmon aufgestellte Resultat ergiebt sich auf folgende Weise. Sind $x_i$ die Coordinaten des Rückkehrpunktes und $v_i$ die Coordinaten der Rückkehrtangente, so bestehen die Gleichungen:

(1) $$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

(2) $$\frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik} = v_i v_k \quad ; \quad i \text{ und } k = 1, 2, 3.$$

Durch Combination dieser Gleichungen folgt fürs erste ganz wie im Falle I:

(3) $$S^3 - T^2 = 0.$$

Eine zweite Bedingung bekommt man durch Elimination der $x_i$ und $u_i$ aus dem System (2). Um das Eliminationsresultat zu erhalten, erinnern wir an die bekannte Formel:

$$S u_x^2 = \Sigma\Sigma \Theta_{\varkappa\lambda} (f, f)^{\varkappa\lambda} \text{ **)},$$

---

*) Die Formen von $f$, mit passenden numerischen Factoren versehen, werden wir ganz nach der Abhandlung in Bd. IV. dieser Annalen, S. 141 ff. benennen.

**) Es ist:

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x = \sum_\varkappa \sum_\lambda \Theta_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

$$(f, f)^{11} = 2(f_{22} f_{33} - f_{23}^2) \quad , \quad (f, f)^{23} = 2(f_{12} f_{13} - f_{11} f_{23}) \text{ u. s. w.}$$

worin die $u_i$ und $x_i$ völlig willkührlich sind. Wenn speciell die $x_i$ dem Systeme (2) genügen, wird die rechte Seite der letzten Relation identisch Null und daher muss auch:

$$S = 0$$

sein. Diese Gleichung, sowie die (3) ziehen als nothwendige Bedingungen für einen Rückkehrpunkt:

$$S = 0 \quad \text{und} \quad T = 0 \tag{4}$$

nach sich. Dass dieselben auch hinreichend sind, werden wir auf eine Art erhärten, die uns gleichzeitig die Coordinaten des Rückkehrpunktes finden lehrt.

Zunächst ist $T_f$ ein vollständiger Cubus. Es wird nämlich am Schlusse dieser Arbeit bewiesen werden, dass eine ternäre cubische Form die dritte Potenz eines linearen Ausdrucks ist, wenn ihre Zwischenform $\Theta$ identisch verschwindet. Nun ist aber (Band IV. dieser Annalen S. 159):

$$\Theta_{T_f} = S^2\Theta + 4TH - SK,$$

d. h. beim Bestehen von (4) gleich Null. Man kann daher:

$$T_f = (u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3)^3 = u_t^3$$

setzen, in welcher Formel die $t_i$ nicht bloss symbolische, sondern wirkliche Werthe und zwar gerade die Coordinaten des Rückkehrpunktes (bis auf einen unbestimmten Factor) bedeuten. Zu dem Zwecke ist zu zeigen, dass die Gleichungen:

$$a_x^3 = 0 \quad \text{und} \quad (abu)^2 a_x b_x = 0$$

durch die Werthe $x_i = t_i$ für beliebige $u_i$ befriedigt werden, oder mit andern Worten, dass:

$$a_t^3 = 0 \quad \text{und} \quad (abu)^2\, a_t b_t = 0\,.$$

Die erste dieser Gleichungen drückt aus, dass $T$ verschwindet. Die zweite wird gleichzeitig mit dieser anderen:

$$(abu)^2\, a_t b_t \,.\, u_t = 0$$

erwiesen sein, da im allgemeinen $T_f$ *) und also auch $u_t$ von Null verschieden ist.

Bekanntlich aber ist (s. Gordan in Bd. I. dieser Annalen p. 110 oben):

$$(abu)^2\, a_t b_t u_t = S\,.\,S_f\,,$$

somit im vorliegenden Falle Null. Als das Resultat unserer Untersuchung haben wir also:

*Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die Curve $f = 0$ einen Rückkehrpunkt besitze, sind $S = 0$ und $T = 0$.*

---

*) Man zeigt diess leicht an einem speciellen Beispiele.

*Die Coordinaten des Rückkehrpunktes bestimmen sich durch die laufende Proportion:*

$$x_1^3 : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_3 : \cdots : x_1 x_2 x_3 = t_{111} : t_{112} : t_{113} : \cdots : t_{123}.$$

## III.

### Vorhandensein zweier Doppelpunkte *).

Die meisten zur Discutirung dieses Falles nöthigen Formeln hat bereits Gordan in der oben citirten Note gegeben.

Sind:

$$s_x^2 = s_x'^2 = s_x''^2 = \cdots = 0 \quad \text{und} \quad r_x = 0$$

die Gleichungen des Kegelschnitts und der Geraden, in welche die Curve 3ter Ordnung zerfällt, so wird:

$$(1) \qquad f = a_x^3 = r_x \,.\, s_x^2.$$

Durch Differentiation erhält man hieraus unmittelbar die für alle Werthe der $x_i$, $y_i$ und $z_i$ bestehenden Formeln:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 3a_x a_y^2 &= 2r_y s_y s_x + r_x s_y^2, \\ 3a_x a_y a_z &= r_x s_y s_z + s_x(r_z s_y + r_y s_z). \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $b_x$ und ersetzt überdiess die $y_i$ durch die Unterdeterminanten $b_2 u_3 - b_3 u_2$, $b_3 u_1 - b_1 u_3$ etc., so folgt:

$$3(abu)^2 a_x b_x = 2(rbu)(sbu) s_x b_x + r_x b_x (sbu)^2.$$

Indem man in dieser Relation die Glieder rechter Hand vermittelst des Systems (2) berechnet, erhält man nach einer kleinen Reduction:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 9\Theta = 9(abu)^2 a_x b_x &= 4r_x^2 (ss'u)^2 - 2s_x^2 (s'ru)^2 \\ &+ u_x^2 (rss')^2 - 4u_x r_x (rss')(ss'u). \end{aligned}$$

Nimmt man in diesem Ausdruck $u_i u_k = c_i c_k$ an und multiplicirt mit $c_x$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 9(abc)^2 a_x b_x c_x = 4r_x^2 (ss'c)^2 c_x &- 2s_x c_x (src)^2 + c_x^3 (rss')^2 \\ &- 4c_x^2 r_x (rss')(css'), \end{aligned}$$

eine Formel, welche, der Kürze wegen

$$(4) \qquad i = (rs's'')^2$$

gesetzt, unter Anwendung von (2) übergeht in:

$$(5) \qquad 27(abc)^2 a_x b_x c_x = 27\Delta = 27 a_x^3 = 4r_x^3 \,.\, (ss's'')^2 - 3if.$$

---

*) Die Ergebnisse dieser Nummer konnten rascher durch Anwendung der canonischen Form:

$$f = ax_1^3 + 6bx_1 x_2 x_3$$

abgeleitet werden. Wir ziehen jedoch die im Texte gegebene Methode als eleganter vor, wie dies auch Gordan gethan hat.

Durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir die für beliebige Werthe der $y_i$ und $x_i$ geltende Relation:

(6) $$27\, a_y^2 a_x = 4 r_y^2 r_x (s s' s'')^2 - 3 i a_y^2 a_x .$$

Indem wir hierin die $y_i$ durch die Unterdeterminanten $b_2 u_3 - b_3 u_2$, $b_3 u_1 - b_1 u_3$ etc. ersetzen und mit $b_x$ multipliciren, folgt:

(7) $$81 \mathsf{H} = 81 (a \alpha u)^2\, a_x \alpha_x = 4 r_x^2 (s r u)^2 (s s' s'')^2 - 9 i \Theta .$$

Nimmt man dagegen in (6) die $y_i$ gleich den Unterdeterminanten $\beta_2 u_3 - \beta_3 u_2$, $\beta_3 u_1 - \beta_1 u_3$ u. s. w. an und multiplicirt mit $\beta_x$, so ergiebt sich:

(8) $$9^3 \mathsf{K} = 9^3 (\alpha \beta u)^2\, \alpha_x \beta_x = 9 i^2 \Theta - 8 i (s s' s'')^2 (r s u)^2 r_x^2 .$$

Um $S_f$ zu finden, leiten wir aus dem Ausdrucke von $\Theta$ durch Differentiation der $u_i$ die Formel ab:

$$18 (a b u)(a b v)\, a_x b_x = 8 r_x^2 (s s' u)(s s' v) - 4 s_x^2 . (s' r u)(s' r v)$$
$$+ 2 u_x . v_x (r s s')^2 - 4 v_x . r_x (r s s')(u s s') - 4 u_x r_x (r s s') . (v s s') .$$

Ersetzt man hierin die $v_i$ durch die symbolischen Buchstaben $c_i$ und die $x_i$ durch die Unterdeterminanten $c_2 u_3 - c_3 u_2$ etc., so hat man sofort

(9) $$S_f = (a b c)(a b u)(a c u)(b c u) = \frac{2}{9} (r s'' u)^2 (s s' u)(r s s') .$$

Indem wir dasselbe Verfahren auf $\mathsf{H}$ anwenden, bekommen wir:

(10) $$T_f = (a b \alpha)(a \alpha u)(b \alpha u)(a b u) = -\frac{1}{9} i S_f .$$

Die Annahmen $u_\varkappa u_\lambda u_\mu = d_\varkappa d_\lambda d_\mu$ in den zwei letzten Gleichungen liefern die Werthe der beiden Invarianten:

(11) $$81 S = i^2 .$$

(12) $$-9^3 T = i^3 .$$

Die nunmehr aufgestellten Formeln reichen vollständig zur Erledigung des vorliegenden Falles aus.

Die Bestimmung der beiden Doppelpunkte und der sie verbindenden Geraden liefert die Gleichung (8), welche sich auch in der Form schreiben lässt:

(13) $$\mathsf{K} - S \Theta = -\frac{8}{9^3} i . (s s' s'')^2 (r s u)^2 r_x^2 .$$

Will man das Produkt der Doppelpunktgleichungen für sich haben, so braucht man in (13) bloss $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ anzunehmen, und indem man den sich so ergebenden Ausdruck zweiten Grades in den $u_i$ von $\mathsf{K} - S\Theta$ absondert, bekommt man $r_x^2$ (natürlich abgesehen von constanten Factoren).

Aus den Gleichungen (9)—(12) leitet man als nothwendige Bedingung für das Vorhandensein zweier Doppelpunkte:

(14) $$P_f = T S_f - S T_f = 0$$

ab. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend.

Die Formel:

$$\mathsf{K} + S\Theta = \frac{2}{9}\,\Sigma \frac{\partial T_f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - 2Tu_x^2$$

(vergl. Band IV. dieser Annalen, S. 151, Gleichungen (5) und (7)) geht nämlich durch Multiplication mit $S$ beim Bestehen von (14) über in:

$$S(\mathsf{K} + S\Theta) = 2T\left(\frac{1}{9}\,\Sigma \frac{\partial S_f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - Su_x^2\right) = 2T\mathsf{H}$$

oder in:

$$S\mathsf{K} - 2T\mathsf{H} + S^2\Theta = 0.$$

Multiplicirt man diese Relation wieder mit $S$ und erinnert sich, dass:

$$S_p = -4(S^3 - T^2)^3,$$

dass also wegen (14) $S^3$ gleich $T^2$ ist, so bekommt man:

$$S^2\mathsf{K} - 2ST\mathsf{H} + T^2\Theta = 0. \tag{15}$$

Die letzte Gleichung stimmt in ihrer linken Seite vollständig mit $\Theta_{Tf - S\Delta}$ überein und sagt demnach nichts anderes aus, als dass $Tf - S\Delta$ ein vollständiger Cubus ist und dass daher:

$$Tf - S\Delta = (r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3)^3 = r_x^3 \tag{16}$$

gesetzt werden kann. Nach dieser Formel muss die Gerade $r_x = 0$ durch jeden der 9 Schnittpunkte von $f$ und $\Delta$ gehen, was nur möglich ist, wenn $r_x$ sowohl in $f$ als auch in $\Delta$ als Factor enthalten ist.

## III^a^.

### Die Curve besteht aus einem Kegelschnitt und einer denselben berührenden Geraden.

In den Formeln des vorhergehenden Falles sei jetzt:

$$i = (ss'r)^2 = 0,$$

d. h. die Gerade $r_x$ berühre den Kegelschnitt $s_x^2$. Die Relationen (5) und (9) in III zeigen, dass alsdann:

$$\Delta = \alpha_{111}x_1^3 + 3\alpha_{112}x_1^2x_2 + \cdots\cdots + 6\alpha_{123}x_1x_2x_3$$

der dritten Potenz von $r_x^3$ proportional und dass $S_f = 0$ den Cubus der Gleichung des Berührungspunktes darstellt. Ueberdiess wird der Ausdruck von $T_f$ gleich Null. Umgekehrt drückt das identische Verschwinden von $T_f$ stets aus, dass die Curve 3^ter^ Ordnung einen Kegelschnitt und eine ihn berührende Gerade darstellt.

Wenn nämlich für alle Werthe der $u_i$:

$$T_f = \frac{\partial T}{\partial a_{111}}u_1^3 + \frac{\partial T}{\partial a_{112}}u_1^2u_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial a_{123}}u_1u_2u_3 = 0,$$

so sind die Invarianten:

$$\frac{\partial T}{\partial a_{111}} a_{111} + \frac{\partial T}{\partial a_{112}} a_{112} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial a_{123}} a_{123} = 6T$$

und:

$$\frac{\partial T}{\partial a_{111}} \alpha_{111} + \frac{\partial T}{\partial a_{112}} \alpha_{112} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial a_{123}} \alpha_{123} = \delta T = 6S^2$$

ebenfalls Null. Nach der Formel für $\mathsf{K} + S\Theta$ in III verschwindet daher auch $\mathsf{K}$, d. h. $\Delta$ ist die dritte Potenz eines linearen Ausdrucks. Gemäss der bekannten Salmon'schen Identität muss aber dieser in $f$ einfach enthalten sein, und es liegt somit der vorhergehende Fall vor, mit der Besonderheit, dass:

$$S = \frac{1}{81} i^2 = 0$$

oder dass:

$$(ss'r)^2 = 0\,.$$

In Worten:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung $f = 0$ aus einem Kegelschnitt und einer ihn berührenden Geraden bestehe, ist $T_f \equiv 0$. Die Coordinaten $x_i$ des Berührungspunktes bestimmen sich aus der laufenden Proportion:*

$$x_1^3 : x_1^2 x_2 : x_1^2 x_3 : \ldots : x_1 x_2 x_3 = s_{111} : s_{112} : s_{113} : \ldots : s_{123}\,^{*}),$$

*die Coordinaten $u_i$ der Tangente dagegen aus:*

$$u_1^3 : u_1^2 u_2 : u_1^2 u_3 : \ldots : u_1 u_2 u_3 = \alpha_{111} : \alpha_{112} : \alpha_{113} : \ldots : \alpha_{123}\,.$$

## IV.

### Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung mit drei Doppelpunkten.

Zerfällt der Kegelschnitt der Nummer III $s_x^2$ in 2 Gerade, d. h. ist:

$$s_x^2 = p_x \cdot q_x\,,$$

so besteht die Curve $f$ aus 3 Geraden. Es wird dann:

$$\begin{aligned}
(ss'u)^2 &= -\tfrac{1}{2}\,(pqu)^2 \\
(s'ru)^2 &= -(rpu)\,(qru) \\
(rss')\,(ss'u) &= -\tfrac{1}{2}\,(pqr)\,(pqu) \\
i = \quad (ss'r)^2 &= -\tfrac{1}{2}\,(pqr)^2 \\
(ss's'')^2 &= \quad 0,
\end{aligned}$$

und für die Formen von $f$ hat man folgende Ausdrücke:

---

*) Wenn die $s_{\varkappa\lambda\mu}$ sämmtlich gleich Null, d. h. wenn $S_f$ identisch verschwindet, ist $f$ die Summe zweier Cuben. Dieser Fall, sowie mehrere andere, die keine rechte geometrische, sondern nur eine algebraische Deutung zulassen, werden wir später behandeln.

(1) $$f = p_x q_x r_x .$$

$$9\Theta = -2r_x^2(pqu)^2 + 2p_x q_x . (rpu)(qru) - \frac{1}{2} u_x^2 (pqr)^2 + 2u_x r_x (pqu)(pqr),$$

oder, wenn man auf das letzte Glied rechts die bekannte Identität:

(2) $$(pqr)u_x = (pqu)r_x + (qru)p_x + (rpu)q_x$$

anwendet:

(3) $$\frac{9}{2}\Theta + \frac{1}{4}(pqr)^2 u_x^2 = (pqu)r_x . (qru)p_x + (qru)p_x . (rpu)q_x + (rpu)q_x . (pqu)r_x .$$

(4) $$18\Delta = (pqr)^2 f.$$

$$9S_f = (pqr)(pqu)(qru)(rpu).$$

(5) $$162\,T_f = -18\,i S_f = (pqr)^3 (pqu)(qru)(rpu).$$

$$4 . 81 S = (pqr)^4.$$

$$9^3 . 2^3 T = (pqr)^6.$$

(6) $$-\frac{9}{2} B = -\frac{9}{2}\left(\Sigma \pm \frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} u_3\right)$$

$$= \big((pqu)r_x - (qru)p_x\big)\big((qru)p_x - (rpu)q_x\big)\big((rpu)q_x - (pqu)r_x\big).$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2), (3) und (5) beziehungsweise mit $(pqr)^3$, mit $(pqr)^6$ und $(pqr)^6 . f$ und setzt:

(7) $$y_1 = (pqr)^3 (qru)p_x\ ,\ y_2 = (pqr)^3 (rpu)q_x\ ,\ y_3 = (pqr)^3 (pqu)r_x,$$

so findet man mit Rücksicht auf die Werthe von $S$ und $T$ unmittelbar die Beziehungen:

$$4 . 81 . S u_x = y_1 + y_2 + y_3,$$

(8) $$9^4 . 4 . (T\Theta + S^2 u_x^2) = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1,$$

$$9^5 . 2^4\, T . T_f . f = y_1 y_2 y_3,$$

welchen noch die weitere:

(9) $$2^7 . 9^{11} T^3 B^2 = (y_1 - y_2)^2 (y_2 - y_3)^2 (y_3 - y_1)^2$$

hinzugefügt werden kann, indem man (6) quadrirt und mit $(pqr)^{18}$ multiplicirt.

Die Relationen (8) zeigen, dass die $y_i$ die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\frac{1}{27} y^3 - 3 . 4 S u_x^2 . y^2 + 3 . 4 . 81 (T\Theta + S^2 u_x^2)\, y - 9^3 . 3 . 2^4\, T T_f f = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich in bekannter Weise auflösen. (Vergl. z. B. Band III. dieser Annalen, S. 272.)

Nennen wir die vollständigen Cuben:

$$4\,T(6 f T_f - 2 T u_x^3 - 18 S \Theta u_x + 9^3 \sqrt{-6T}\, B) \text{ und}$$

$$4\,T(6 f T_f - 2 T u_x^3 - 18 S \Theta u_x - 9^3 \sqrt{-6T}\, B)$$

beziehungsweise $M^3$ und $N^3$, bezeichnen wir ferner mit $\varepsilon$ eine beliebige der beiden imaginären Cubikwurzeln der positiven Einheit, so hat man mit Rücksicht auf den Ausdruck der Discriminante in (9):

$$(10)\qquad y_i = 27[4Su_x + \varepsilon^i M + \varepsilon^{-i} N]^{*)};\ i = 1, 2, 3.$$

In diesem Werthe von $y^i$ ist es gleichgiltig, welche der 3 Cubikwurzeln man für $M$ nimmt, während $N$ durch die Beziehung bestimmt ist:

$$(11)\qquad MN = 4(S^2u_x^2 - 3T\Theta).$$

Aus den Ausdrücken von $f$ und $\Delta$ in (1) und (4) ersieht man, dass:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = 0.$$

Umgekehrt muss die Curve $f$ in 3 Gerade zerfallen, wenn diese Zwischenform für alle Werthe der $x_i$ und $u_i$ verschwindet. Es ist dann offenbar $f$ mit $\Delta$ proportional, d. h. die Hessiane der Curve 3ter Ordnung fällt mit dieser zusammen; was nur möglich ist, wenn $f$ aus 3 Geraden besteht.

Dass im Falle der Proportionalität von $f$ mit $\Delta$ die Curve 3ter Ordnung in ein Dreieck ausartet, lässt sich auch folgendermassen zeigen. Setzen wir:

$$(12)\qquad \Delta = \alpha_x^3 = \varrho f,$$

so gehen die Gleichungen:

$$(ab\alpha)^2\, a_x b_x \alpha_x = S \,.\, f$$

$$(abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha) = 6T$$

$$(abu)\,(ab\alpha)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u) = T_f$$

unmittelbar in die folgenden über:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varrho^2 &= S \\ \varrho^3 &= T \\ T_f &= \varrho S_f. \end{aligned}$$

Durch Combination dieser Formeln erhält man:

$$TS_f - ST_f = 0,$$

so dass man:

$$(14)\qquad f = r_x s_x^2$$

---

*) Mit diesen Entwicklungen ist gleichzeitig eine neue Bestimmung der Wendepunkte einer allgemeinen Curve 3ter Ordnung gegeben. Dieselbe enthält nicht so hohe Irrationalitäten, als die von Clebsch in Band II. dieser Annalen, S. 382 mitgetheilte.

annehmen kann. Der Kegelschnitt $s_x^2$ muss aber nothwendigerweise in ein Geradenpaar zerfallen. Aus (14) folgt nämlich nach der Nummer III:

$$Tf - S\Delta = \frac{4}{27} S(ss's'')^2 r_x^3,$$

während aus den Relationen (12) und (13):

$$Tf - S\Delta = 0$$

hervorgeht. Es muss also das Produkt $S \,.\, (ss's'')^2$ gleich Null sein. Schliessen wir den Fall aus, dass $\Delta$ selbst identisch verschwindet, so kann $\varrho$ und daher $S$ nicht Null werden, sondern man hat:

$$(ss's'')^2 = 0,$$

wie zu beweisen war.

## V.

## Existenz eines dreifachen Punktes.

Die Curve ist jetzt ein System von 3 Geraden, die sich in einem Punkt schneiden. Daher hat man in den Formeln der vorhergehenden Nummer $(pqr) = 0$ und:

$$(1) \qquad -9\Theta = (p_x^2 + q_x^2 + r_x^2)\,(pru)^2,$$

anzunehmen, welche Relation zur Berechnung der Coordinaten $(a_i)$ des dreifachen Punktes $(a)$ dient. Diese letzteren liefern ihrerseits die Bestimmung der 3 Geraden, aus denen die Curve besteht, in folgender Weise. Sind $b_i$ und $c_i$ völlig willkührliche Grössen, so führen wir durch die Gleichungen:

$$(2) \quad x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 \quad x_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 \quad x_1 = a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3$$

ein neues Coordinatendreieck ein, dessen Seiten $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$ sich in dem Punkte $a$ schneiden. Die Relation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ geht durch diese Transformation in eine homogene Gleichung zwischen $y_2$ und $y_3$ über, da $y_1$ ganz herausfallen muss. Zerlegt man diese Gleichung dritten Grades in 3 Factoren und ersetzt darin $y_2$ und $y_3$ durch ihre Ausdrücke in den $x_i$, so hat man die 3 Geraden einzeln dargestellt. Diese Lösung stimmt völlig überein mit derjenigen, die Hesse im 56. Bde. des Borchardt'schen Journals für eine beliebige Anzahl von Variabeln gegeben hat. Durch die dortigen allgemeinen Untersuchungen ist auch erwiesen, dass $\Delta = 0$ die hinreichende und nothwendige Bedingung für das Zerfallen einer Curve 3ter Ordnung in ein Büschel von 3 Geraden bedeutet.

## VI.

### Die Curve besteht aus einer doppelt und einer einfach zu rechnenden Geraden.

Wofern die beiden Geraden $p_x$ und $q_x$ in der vorhergehenden Nummer zusammenfallen, wofern also:

(1) $$f = q_x^2 r_x ,$$

findet man:

(2) $$-\frac{9}{2}\,\Theta = q_x^2\,(q r u)^2.$$

Aus dieser Gleichung findet man gleichzeitig die Doppelgerade $q_x$ und den Schnittpunkt von $q_x$ mit $r_x$. Die hinreichende und nothwendige Bedingung für diesen Fall ist offenbar $F \equiv 0$. Die reciproke Form $F$ gleich Null gesetzt, repräsentirt nämlich die Bedingung für die Coordinaten einer geraden Linie, die $f$ in 2 zusammenfallenden Punkten schneidet. Wenn die Curve $f$ aus einer doppelt und einer einfach zu nehmenden Geraden besteht, wird sie von jeder Geraden in 2 zusammenfallenden Punkten geschnitten, d. h. $F$ muss identisch verschwinden. Umgekehrt, wenn $F$ für alle Werthe der $u_i$ gleich Null, wird $f$ von jeder Geraden in 2 zusammenfallenden Punkten geschnitten. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $f$ das System einer Doppel- und einer einfachen Geraden ist; wie man auch analytisch leicht zeigen könnte.

Stimmen endlich $q_x$ und $r_x$ gleichfalls mit einander überein, d. h. ist:

## VII.

### Die Curve eine dreifach zu nehmende Gerade.

Alsdann wird:

(1) $$\Theta = (a b u)^2\, a_x b_x \equiv 0 .$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend. In der Theorie der Kegelschnitte wird nämlich gezeigt, dass beim Bestehen von (1) der Ausdruck $a_x a_y^2$ in Bezug auf die $y_i$ ein vollständiges Quadrat ist, d. h. dass:

$$a_x a_y^2 = \varrho(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^2$$

gesetzt werden kann, worin $\varrho$ *und* die $u_i$ noch von den $x_i$ abhängig sein können. Indem wir in der letzten Gleichung der Reihe nach:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

annehmen, bekommen wir Formeln von der Gestalt:

$$\begin{aligned} &a_{111} : a_{112} : a_{122} : a_{113} : a_{123} : a_{133} = u_1^2 : u_1 u_2 : u_2^2 : u_1 u_3 : u_2 u_3 : u_3^2 \\ (2)\quad &a_{211} : a_{212} : a_{222} : a_{213} : a_{223} : a_{233} = v_1^2 : v_1 v_2 : v_2^2 : v_1 v_3 : v_2 v_3 : v_3^2 \\ &a_{311} : a_{312} : a_{322} : a_{313} : a_{323} : a_{333} = w_1^2 : w_1 w_2 : w_2^2 : w_1 w_3 : w_2 w_3 : w_3^2. \end{aligned}$$

Aus dén beiden ersten dieser Proportionengleichungen zieht man:

$$a_{112} : a_{122} : a_{123} = u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3 ,$$

so dass man in der zweiten Formel des Systems (2) die $u_i$ an Stelle der $v_i$ schreiben kann. In ganz derselben Weise lassen sich auch in der dritten die $w_i$ durch die $u_i$ ersetzen, und man kann die Relationen (2) jetzt in die eine zusammenfassen:

$$a_{111} : a_{112} : a_{113} : \ldots : a_{123} = u_1^3 : u_1^2 u_2 : u_1^2 u_3 : \ldots : u_1 u_2 u_3 ,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Tübingen, Ende August 1871.

# Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*)

Von Felix Klein in Göttingen.

---

Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie von Gauss, Lobatschefsky, Bolyai und die verwandten Betrachtungen, welche Riemann und Helmholtz über die Grundlagen unserer geometrischen Vorstellungen angestellt haben. Sie sollen indess nicht etwa die philosophischen Speculationen weiter verfolgen, welche zu den genannten Arbeiten hingeleitet haben, vielmehr ist ihr Zweck, *die mathematischen Resultate dieser Arbeiten, soweit sie sich auf Parallelentheorie beziehen, in einer neuen anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen.*

Der Weg hierzu führt durch die projectivische Geometrie. Man kann nämlich, nach dem Vorgange von Cayley **), eine projectivische Massbestimmung im Raume construiren, welche eine beliebig anzunehmende Fläche 2ten Grades als sogenannte fundamentale Fläche benutzt. Je nach der Art der von ihr benutzten Fläche 2ten Grades ist nun diese Massbestimmung ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorieen. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sie deckt geradezu, wie sich zeigen wird, deren inneres Wesen auf.

Ich beginne damit, die in Rede stehenden Parallelentheorieen kurz auseinander zu setzen (§ 1.). Sodann wende ich mich der Cayley'schen Massbestimmung zu, die ich im Zusammenhange entwickele, so zwar, dass fortwährend auf die verschiedenartigen Parallelentheorieen Bezug genommen wird. Ich bin dabei um so lieber in ausführlichere Erörterungen eingegangen, als die bez. Cayley'schen Untersuchungen nicht hinlänglich bekannt geworden zu sein scheinen, dann aber auch

---

*) Vergl. eine unter demselben Titel mitgetheilte Note in den Gött. Nachrichten. 1871. Nr. 17.

**) Im Sixth Memoir upon Quantics. Phil. Transactions. t. 149. 1859. Vergl. die Fiedler'sche Uebersetzung von Salmon's Kegelschnitten. 2. Aufl. (Leipzig 1866), oder auch Fiedler: Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen (Leipzig 1862).

bei ihnen der leitende Gesichtspunkt ein anderer ist, als der hier vorliegende. Bei Cayley handelt es sich darum, nachzuweisen, dass die gewöhnliche (Euklidische) Massgeometrie als ein besonderer Theil der projectivischen Geometrie aufgefasst werden kann. Zu diesem Zwecke stellt er die allgemeine projectivische Massbestimmung auf und zeigt sodann, dass aus ihren Formeln die Formeln der gewöhnlichen Massgeometrie hervorgehen, wenn die fundamentale Fläche in einen bestimmten Kegelschnitt, den unendlich fernen imaginären Kreis, degenerirt. Hier dagegen handelt es sich darum, den *geometrischen Inhalt* der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung möglichst deutlich darzulegen und zu erkennen, nicht nur, wie sie durch eine geeignete Particularisation die Euklidische Massgeometrie ergiebt, sondern wesentlich, dass sie in ganz derselben Beziehung zu den verschiedenen Massgeometrieen steht, die sich den genannten Parallelentheorieen anschliessen.

Bei diesen Auseinandersetzungen ergeben sich einige neue Betrachtungen. Ich rechne dahin, abgesehen von den Detailausführungen, namentlich die Art und Weise, wie die Cayley'sche Massbestimmung durch Betrachtung wiederholter räumlicher Transformationen begründet wird. Sodann hebe ich noch die Form hervor, unter welcher in § 7. und § 14. der Begriff des Krümmungsmasses auftritt.

Es ist übrigens die Definition, welche ich für die projectivische Massbestimmung aufstelle, etwas allgemeiner, als die von Cayley selbst gegebene. Um die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, denke ich mir dieselben durch eine gerade Linie verbunden. Dieselbe schneidet die Fundamentalfläche in 2 weiteren Punkten, welche mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss besitzen. *Den mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Constante c multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichne ich als die Entfernung der beiden Punkte.* Um den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen, lege ich durch deren Durchschnittslinie die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bilden mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhältniss. *Als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichne ich sodann den mit einer anderen willkürlichen, aber fest gewählten Constanten c' multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses.* Die hiermit aufgestellten geometrischen Definitionen stimmen mit den analytischen, von Cayley gegebenen überein, sobald man noch $c$ und $c'$ particuläre Werthe ertheilt, nämlich beide gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzt.*) Es ist aber für das Folgende wesentlich, die

*) Gelegentlich bezeichnet Cayley auch den „Quadranten" als Einheit. Dies kommt darauf hinaus, $c$ und $c'$ gleich $\frac{\sqrt{-1}}{\pi}$ zu nehmen.

Constanten $c$ und $c'$ beizubehalten, da z. B. $c$ gerade der in der Nicht-Euklidischen Geometrie vorkommenden charakteristischen Constanten entspricht (vergl. auch § 4.).

## § 1.

## Die verschiedenen Parallelentheorieen.

Das 11[te] Axiom des Euklides ist, wie bekannt, mit dem Satze gleichbedeutend, dass die Summe der Winkel im Dreiecke gleich zwei Rechten ist. Nun gelang es Legendre, zu beweisen*), dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht grösser sein kann, als 2 Rechte; er zeigte ferner, dass, wenn in einem Dreiecke die Winkelsumme 2 Rechte beträgt, dass dann ein Gleiches bei jedem Dreiecke der Fall ist. Aber er vermochte nicht zu zeigen, dass die Winkelsumme nicht möglicherweise kleiner ist, als 2 Rechte.

Eine ähnliche Ueberlegung scheint den Ausgangspunkt von Gauss' Untersuchungen über diesen Gegenstand gebildet zu haben. Gauss war der Auffassung, dass es in der That unmöglich sei, den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme mit 2 Rechten zu beweisen, dass man vielmehr auf Grund der vorangehenden Axiome eine in sich consequente Geometrie construiren könne, bei der die Winkelsumme kleiner ausfällt. Gauss bezeichnete diese Geometrie als Nicht-Euklidische**); er hat sich mit ihr viel beschäftigt, leider aber, von einigen Andeutungen abgesehen, nichts über dieselbe veröffentlicht. In dieser Nicht-Euklidischen Geometrie kommt eine gewisse, für die räumliche Massbestimmung charakteristische Constante vor. Ertheilt man derselben einen unendlichen Werth, so erhält man die gewöhnliche Euklidische Geometrie. Hat aber die Constante einen endlichen Werth, so hat man eine abweichende Geometrie, für welche unter Anderem folgende Gesetze gelten:

Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner, als 2 Rechte, und zwar um so mehr, je grösser die Fläche des Dreiecks ist. Für ein Dreieck, dessen Ecken unendlich weit entfernt sind, ist die Winkelsumme gleich Null. — Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden kann man 2 Parallele zu der Geraden ziehen, d. h. Linien, welche die Gerade auf der einen oder anderen Seite in einem unendlich fernen Punkte schneiden. Die durch den Punkt gehenden Geraden, welche zwischen den beiden Parallelen verlaufen, schneiden die gegebene Gerade gar nicht.

---

*) Dieser Beweis, sowie der sich auf den nämlichen Gegenstand beziehende Beweis von Lobatschefsky setzt die unendliche Länge der Geraden voraus. Lässt man diese Annahme fallen (vergl. den weiteren Text), so fallen auch die Beweise, wie man daraus deutlich übersehen mag, dass dieselben sonst in gleicher Weise für die Geometrie auf der Kugel gelten müssten.

**) Vergl. Sartorius v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, p. 81. Sodann einige Briefe in dem Briefwechsel von Gauss und Schumacher.

Auf eben diese Nicht-Euklidische Geometrie ist Lobatchefsky*), Professor der Mathematik an der Universität zu Kasan, und, einige Jahre später, der ungarische Mathematiker J. Bolyai**) geführt worden, und haben dieselben den Gegenstand in ausführlichen Veröffentlichungen behandelt. Indess blieben diese Arbeiten ziemlich unbekannt, bis man durch die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher, die 1862 erfolgte, auf dieselben aufmerksam gemacht wurde. Seitdem verbreitete sich die Auffassung, dass nunmehr die Parallelentheorie in ihrer realen Unbestimmtheit erkannt sei.

Aber diese Auffassung muss wohl einer wesentlichen Modification unterliegen, seit im Jahre 1867 nach Riemann's Tode dessen Habilitationsvorlesung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" erschienen ist und bald darauf Helmholtz in den Göttinger Nachrichten (1868. Nr. 6.) seine Untersuchungen: „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", veröffentlichte.

In Riemann's Schrift ist darauf hingewiesen, wie die Unbegränztheit des Raumes nicht auch nothwendig dessen Unendlichkeit mit sich führt. Es wäre vielmehr denkbar und würde unserer Anschauung, die sich immer nur auf einen endlichen Theil des Raumes bezieht, nicht widersprechen, dass der Raum endlich wäre und in sich zurückkehrte: die Geometrie unseres Raumes würde sich dann gestalten, wie die Geometrie auf einer in einer Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen gelegenen Kugel von 3 Dimensionen. — Diese Vorstellung, die sich auch bei Helmholtz findet, würde mit sich bringen, dass die Winkelsumme im Dreiecke (wie beim gewöhnlichen sphärischen Dreiecke) grösser***) ist, als 2 Rechte, und zwar in dem Masse grösser, als das Dreieck einen grösseren Inhalt hat. Die gerade Linie würde alsdann keine unendlich fernen Punkte haben, und man könnte durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden überhaupt keine Parallele ziehen.

Eine auf diese Vorstellungen gegründete Geometrie würde sich in ganz gleicher Weise neben die gewöhnliche Euklidische Geometrie

---

*) Im Kasan'schen Boten 1829. — Schriften der Universität Kasan, 1836—38. — Crelle's Journal, t. XVII. 1837. (Géométrie imaginaire.) — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. — Pangéométrie. Kasan 1855. (Die Pangéométrie findet sich in italienischer Uebersetzung im t. V. des Giornale di Matematiche. 1867.)

**) In einem Appendix zu W. Bolyai's Werke: Tentamen juventutem .... Maros Vasarhely. 1832. Cf. eine italienische Uebersetzung desselben im t. VI. des Giornale di Matematiche. 1868.

***) Die entgegenstehenden Beweise von Legendre und Lobatchefsky setzen, wie bereits bemerkt, die Unendlichkeit des Raumes voraus.

stellen, wie die soeben erwähnte Geometrie von Gauss, Lobatchefsky, Bolyai. Während letztere der Geraden 2 unendlich ferne Punkte ertheilt, giebt diese der Geraden überhaupt keine (d. h. 2 imaginäre) unendlich ferne Punkte. Zwischen beiden steht die Euklidische Geometrie als Uebergangsfall; sie legt der Geraden 2 zusammenfallende unendlich ferne Punkte bei.

Einem in der neueren Geometrie gewöhnlichen Sprachgebrauche*) folgend, sollen diese 3 Geometrieen bezüglich als *hyperbolische*, als *elliptische* und als *parabolische* Geometrie im Nachstehenden bezeichnet werden, je nachdem die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.

Diese dreierlei Geometrieen werden sich nun im Folgenden als besondere Fälle der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung erweisen. Zu der parabolischen (der gewöhnlichen) Geometrie wird man geführt, wenn man die Fundamentalfläche der Cayley'schen Massbestimmung in einen imaginären Kegelschnitt degeneriren lässt. Nimmt man für die Fundamentalfläche eine eigentliche Fläche 2ten Grades, die aber imaginär ist, so erhält man die elliptische Geometrie. Die hyperbolische Geometrie endlich erhält man, wenn man für die Fundamentalfläche eine reelle, aber nicht geradlinige Fläche 2ten Grades nimmt und auf die Punkte in deren Innerem achtet.

Ich wende mich jetzt zu der Aufstellung der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung, zunächst für die Grundgebilde erster Stufe. Dabei erörtere ich jedesmal, wie sich unter die projectivischen Vorstellungen die Vorstellungen der elliptischen und hyperbolischen Geometrie subsumiren.

Es mag hier übrigens noch des Zusammenhangs gedacht werden, in welchem sich die in Rede stehenden geometrischen Dinge mit den Betrachtungen befinden, die sich auf Massbestimmung in beliebig ausgedehnten analytischen Mannigfaltigkeiten beziehen.

Herr Beltrami hat zuerst gezeigt**), wie der planimetrische Theil der hyperbolischen (Nicht-Euklidischen) Geometrie seine Interpretation in der gewöhnlichen Metrik der Flächen mit constantem negativem Krümmungsmasse findet. In der hyperbolischen Geometrie ist also die Ebene wie eine Mannigfaltigeit von 2 Dimensionen mit constantem negativem Krümmungsmasse. Als darauf die bez. Rie-

---

*) Man bezeichnet z. B. die Punkte einer Fläche als hyperbolische oder elliptische oder parabolische, je nachdem die Haupttangenten reell oder imaginär sind oder zusammenfallen. Steiner nennt die Involutionen hyperbolisch oder elliptisch oder parabolisch, je nachdem die Doppelelemente reell oder imaginär sind oder zusammenfallen u. s. f.

**) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche. 1868.

mann'sche Arbeit erschien, in der zum ersten Male der Begriff des Krümmungsmasses auch für höhere Mannigfaltigkeiten aufgestellt wurde, dehnte Beltrami seine Untersuchungen auf Räume mit beliebig vielen Dimensionen aus.*) Insbesondere zeigte er, dass bei der hyperbolischen Geometrie dem gewöhnlichen Raume (von 3 Dimensionen) auch wieder ein constantes negatives Krümmungsmass beigelegt wird, dass geradezu die Annahme eines constanten negativen Krümmungsmasses sich mit der Annahme der hyperbolischen Geometrie deckt. Die elliptische Geometrie dagegen, oder, wie er sie bezeichnet, die sphärische**) (denn die gewöhnliche sphärische Geometrie gehört hierher), würde dem Raume ein constantes positives Krümmungsmass beilegen. Bei der parabolischen Geometrie endlich würde das Krümmungsmass auch constant, aber gleich Null sein.

Da nun, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung im Raume von 3 Dimensionen gerade die hyperbolische, elliptische und parabolische Geometrie umfasst, sich also mit der Annahme eines constanten Krümmungsmasses deckt, so wird man zu der Vermuthung geleitet, dass auch bei beliebig vielen Dimensionen die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung und die Annahme eines constanten Krümmungsmasses überein kommen. Dieses ist, wie indess nicht weiter gezeigt werden soll, in der That der Fall. Man wird also für Räume mit constantem Krümmungsmasse ohne Weiteres die Formeln benutzen können, die im Folgenden unter Annahme von 2 und 3 Dimensionen aufgestellt werden. Es schliesst dies ein, dass in solchen Räumen die kürzesten Linien wie gerade Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden können***); dass die unendlich fernen Elemente eine Fläche 2ten Grades bilden u. s. w. Es sind dies Resultate, welche bereits Beltrami, von anderen Betrachtungen ausgehend, nachgewiesen hat†); auch ist, um von den Formeln von Beltrami zu denen von Cayley zu gelangen, kaum noch ein Schritt zu thun.

Zugleich mag hiermit der Zusammenhang angedeutet sein, der zwischen dem Nachstehenden und den allgemeinen Untersuchungen

---

*) Teoria fundamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica. Serie II. t. II. 1868/69.

**) Dem gegenüber bezeichnet er die hyperbolische Geometrie als „pseudosphärische".

***) Insbesondere also wird für Räume mit constanter Krümmung die projectivische Geometrie gelten. Vergl. § 17. des Textes.

†) Zunächst für Flächen von constantem Krümmungsmasse in einem Aufsatze: Risolutione del problema di riportare i punti di una superficie etc. Annali di Matematica. Serie I. t. VII. 1866. Sodann allgemein in der genannten Abhandlung: Teoria generale etc.

der Herren **Christoffel***) und **Lipschitz****) über Differentialausdrücke besteht.

## § 2.

## Allgemeines über räumliche Massbestimmung.

Alle räumlichen Massbestimmungen lassen sich bekanntlich auf 2 fundamentale Aufgaben zurückführen: auf die Bestimmung *der Entfernung zweier Punkte* und auf die Bestimmung *der Neigung zweier sich schneidender Geraden*; wie denn die Instrumente, mit denen der praktische Geometer arbeitet, im Allgemeinen *Strecken* oder *Winkel* messen; alle übrigen zu bestimmenden Dinge können aus diesen berechnet werden.

Im Sinne der projectivischen Geometrie wird man diese beiden Grundaufgaben als *das Problem der Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe* bezeichnen können. Das Messen der Entfernung zweier Punkte entspricht der Massbestimmung auf der geraden Punktreihe; das Messen der Neigung zweier sich schneidender Geraden der Massbestimmung im ebenen Strahlbüschel. Die Massbestimmung im Ebenenbüschel endlich ist von der im ebenen Strahlbüschel nicht verschieden, da als Neigung zweier Ebenen die Neigung solcher zwei sich schneidender Linien anzusehen ist, in welchen die beiden Ebenen durch eine auf ihrer Durchschnittslinie senkrechte Ebene geschnitten werden. Es bleiben sonach nur zu betrachten die Massbestimmung auf der geraden Punktreihe und die Massbestimmung im ebenen Strahlbüschel, und von ihnen soll hier zunächst gehandelt werden.

Sofern man die gerade Punktreihe und das ebene Strahlbüschel als in der Ebene gelegen betrachtet, sind sie durch das Princip der Dualität verknüpft. Nicht so die für dieselben geltenden Massbestimmungen, die im Gegentheil wesentlich verschieden sind, z. B.:

Die Entfernung zweier Punkte ist eine algebraische, der Winkel zweier Geraden eine transscendente (cyclometrische) Function der Coordinaten.

Die Länge einer unbegränzten geraden Punktreihe ist unendlich gross; dagegen ist die Summe der Winkel im Strahlbüschel endlich.

Eine Strecke ist (bis aufs Vorzeichen) eindeutig bestimmt, ein Winkel nur bis auf Multipla einer Periode. Entsprechend kann die Strecke auf einfache Weise in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden; nicht so der Winkel, bei dem im Allgemeinen nur die Zweitheilung gelingt etc.

---

*) Borchardt's Journal. t. 70. p. 46.

**) Borchardt's Journal. t. 70. p. 71; t. 72. p. 1.

Trotz dieser Unterschiede haben beide Arten von Massbestimmungen etwas Gemeinsames, und dieser Umstand wird gestatten, beide als besondere Fälle unter eine allgemeinere Massbestimmung zu subsumiren. Dieses Gemeinsame ist zweierlei Art.

*Erstens* gilt für beide Massbestimmungen das Gesetz, dass sich die Massunterschiede addiren*), d. h. dass der Massunterschied $\overline{12}$, vermehrt um den Massunterschied $\overline{23}$, gleich ist dem Massunterschiede $\overline{13}$, in Zeichen $\overline{12}+\overline{23}=\overline{13}$. Diese *Addirbarkeit der Massunterschiede* ist ein allgemeines Gesetz, welches bei allen Massbestimmungen in Mannigfaltigkeiten einer Dimension von vorn herein gegeben ist.**) Dasselbe hat für die Bestimmung derjenigen Function der Coordinaten, welche den Massunterschied darstellen soll, den Werth einer Functionalgleichung. — Mit dieser Addirbarkeit der Massunterschiede können wir gleich die weitere Eigenschaft verknüpfen, die ebenfalls bei allen Massbestimmungen in Mannigfaltigkeiten einer Dimension hervortritt, nämlich die, dass die Entferung eines Elementes von sich selbst gleich Null ist: $\overline{11}=0$. Hieraus und aus der eben genannten Eigenschaft folgt noch insbesondere: $\overline{12}=-\overline{21}$.

*Zweitens* haben die hier zu betrachtenden Massbestimmungen noch eine zweite Eigenschaft, welche sie eben geeignet macht, zur Messung im Raume angewandt zu werden. Diese Eigenschaft ist die, *durch eine Bewegung im Raume nicht geändert zu werden.* Der Winkel zweier Geraden eines Büschels ändert sich inbesondere nicht, wenn man das Büschel in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt eine Rotation ausführen lässt; ebenso wenig die Entfernung zweier Punkte einer Geraden, wenn man die Gerade in sich verschiebt.

Die genannten beiden Eigenschaften reichen hin, um beide Massbestimmungen zu charakterisiren; sie treten auch in deutlichster Weise hervor bei der Art, wie wirkliche Messungen ausgeführt werden. Man bedient sich dazu, sowohl beim Winkel- als beim Streckenmessen, *einer Scala äquidistanter Elemente*, die man beliebig an den zu messenden Gegenstand anlegt.***) Die Zahl der Scalentheile, welche

---

*) Bei der Winkelmessung gilt dies natürlich nur so weit, als man nicht, was man immer kann, den Winkeln $\overline{12}$ etc. unabhängig von einander Multipla von $2\pi$ zufügt.

**) Dasselbe gilt z. B., wenn wir die Zeit oder Gewichte oder Intensitäten messen.

***) Beim Streckenmessen bedient man sich, in Uebereinstimmung mit dem im Texte Gesagten, einer Scala äquidistanter, auf einer Geraden gelegener Punkte, eines *Massstabs*. Dagegen wendet man beim Winkelmessen nicht eine Winkelscala, sondern einen *getheilten Kreis* an, der eine Winkelscala vertritt. Im Texte soll aber an der Vorstellung einer Winkelscala festgehalten werden, weil ein Kreis nicht im Sinne der projectivischen Geometrie ein Grundgebilde ist.

zwischen den beiden Elementen liegen, deren Massunterschied zu bestimmen ist, ergiebt geradezu den gesuchten Massunterschied. Dabei soll nicht weiter discutirt werden, wie die Zahl dieser Scalentheile im Allgemeinen keine ganze und nicht einmal eine rationale ist, wie man damit zusammenhängend auch den Massunterschied zweier Elemente nie genau, sondern nur innerhalb gewisser Fehlergränzen wird bestimmen können. — Dagegen mögen wir des Näheren betrachten, wie die genannten beiden Eigenschaften der Massbestimmung in der hier mit geschilderten Operation des Messens zu Tage treten. Die erste Eigenschaft, die Addirbarkeit der Massunterschiede, ist unmittelbar darin ausgesprochen, dass wir als Massunterschied zweier Elemente schlechthin die Zahl der zwischen ihnen befindlichen Scalentheile nehmen. Die zweite Eigenschaft tritt namentlich darin hervor, dass wir für den Massunterschied dieselbe Zahl finden, unabhängig von der Art und Weise, wie wir die Scala an das zu Messende anlegen. Zu diesem Zwecke muss die Scala die Eigenschaft haben, sich selbst zu decken, wenn man sie an sich selbst beliebig anlegt. Oder, mit anderen Worten: Uebt man auf die Scala eine Bewegung aus, bei der die gerade Punktreihe bez. das Strahlbüschel, welche ihre Träger sind, unverändert bleiben, bei der ferner ein Scalentheil in den nächstfolgenden übergeht, so geht jeder Scalentheil in den nächstfolgenden über.

Diese letztere Eigenschaft der Scala gestattet es, *dieselbe durch eine wiederholte Bewegung anzufertigen.*

Insbesondere, um eine Scala auf der geraden Punktreihe zu construiren, nehme man zwei Punkte (1) und (2) als Gränzpunkte eines ersten Scalentheils an. Sodann verschiebe man die Gerade in sich, bis (1) in (2) fällt. So ist (2) in einen Punkt (3) gerückt, welcher der dritte Scalentheilpunkt sein soll. Verschiebt man noch einmal um ein gleiches Stück, so rückt wieder (1) in (2), (2) in (3), endlich (3) in einen neuen Scalentheilpunkt (4) u. s. w.

Ebenso, will man eine Scala auf dem ebenen Strahlbüschel construiren, so nehme man zuvörderst 2 Strahlen (1) und (2) an als Gränzstrahlen eines ersten Scalentheils*). Eine Drehung des Büschels in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt bringe (1) in die Lage von (2), so hat (2) eine Lage (3) angenommen, welches der dritte Theilstrahl ist u. s. f.

Verschiebung einer Punktreihe oder Drehung eines Strahlbüschels in sich fallen nun beide vom Standpunkte der projectivischen Geometrie aus unter den allgemeineren Begriff *einer linearen Transformation,*

---

*) In praxi wird man für den Scalentheil einen solchen Winkel nehmen, dass der rechte Winkel durch eine ganze Anzahl Scalentheile ausgedrückt wird, was hier nicht in Betracht kommt.

*welche das betreffende Grundgebilde in sich überführt.* Hiernach wird man sofort *eine allgemeinere Construction einer Scala* für die gerade Punktreihe oder das Strahlbüschel und damit *eine allgemeinere Massbestimmung* auf diesen Grundgebilden concipiren, die dann die wirklich angewandten Constructionen und Massbestimmungen als besondere Fälle umfasst. Man wird sich nämlich dadurch, sei es für die Punktreihe oder für das Strahlbüschel, eine Scala construiren, dass man auf ein Element des betreffenden Gebildes eine beliebig anzunehmende lineare Transformation, durch welche das Gebilde in sich übergeht, wiederholt anwendet. Das anfänglich gewählte Element erzeugt dabei eine Elementenreihe, welche eben die Scala ist. Als Massunterschied zweier Elemente gilt die Zahl der zwischen den beiden Elementen befindlichen Scalentheile.*) Ist hiernach zunächst nur der Massunterschied solcher Elemente definirt, welche gerade um eine ganze Anzahl von Scalentheilen von einander abstehen, so wird man durch fortgesetztes Unterabtheilen der Scalentheile (vergl. den folgenden Paragraphen) auch den Massunterschied zweier Elemente festlegen können, die um eine rationale Zahl von Scalentheilen unterschieden sind; man wird endlich, indem man den Begriff der irrationalen Gränze aufnimmt, von einem Massunterschiede zweier beliebiger Elemente reden können.

Diese allgemeinere Art der Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe soll in dem folgenden Paragraphen näher untersucht werden. Man wird dabei so viele wesentlich verschiedene Massbestimmungen erhalten, als es wesentlich verschiedene lineare Transformationen im Grundgebilde erster Stufe giebt. Nun giebt es aber solcher Transformationen nur zweierlei Arten:

1) Solche, bei denen zwei (reelle oder imaginäre) Elemente des Grundgebildes fest bleiben. (Allgemeiner Fall.)

2) Solche, bei denen nur ein (doppeltzählendes) Element des Grundgebildes ungeändert bleibt. (Specieller Fall.)

Entsprechend wird es auch nur zwei wesentlich verschiedene Arten projectivischer Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe geben: eine *allgemeine*, welche Transformationen erster Art, eine *specielle*, welche Transformationen zweiter Art benutzt.

Die gewöhnliche Massbestimmung im Strahlbüschel ist von der ersten Art. Denn bei einer Rotation des Büschels um seinen Mittelpunkt in seiner Ebene bleiben zwei getrennte Strahlen desselben, die-

*) Hierdurch wird die Art der zu benutzenden linearen Transformation beschränkt. In erster Linie muss die lineare Transformation eine reelle sein, welche ein reelles erstes Element in ein reelles zweites überführt. Sodann ist auch noch erforderlich, dass die Scalentheilelemente in der Reihenfolge ihrer Entstehung aufeinander folgen, und nicht etwa das erste und zweite Element durch das dritte und vierte getrennt werden. Vergl. den weiteren Text.

jenigen, welche nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten hingehen, ungeändert.

Dagegen ist die gewöhnliche Massbestimmung auf der Geraden von der zweiten Art. Denn bei einer Verschiebung einer Geraden in sich selbst bleibt nach der Annahme der gewöhnlichen parabolischen Geometrie nur ein Punkt derselben, der unendlich ferne Punkt, ungeändert. —

Hiermit ist denn bereits angedeutet, wie nach der Annahme der hyperbolischen bez. der elliptischen Geometrie die Massbestimmung auf der Geraden den speciellen Charakter verliert, den ihr die parabolische Geometrie beilegt. Die hyperbolische Geometrie ertheilt der Geraden zwei reelle, die elliptische zwei imaginäre unendlich ferne Punkte. Sie hat dementsprechend eine Verschiebung einer Geraden in sich als eine allgemeine lineare Transformation aufzufassen, welche zwei getrennte Punkte, die beiden unendlich fernen Punkte, ungeändert lässt. Es wird dies im Folgenden noch näher erörtert werden.

## § 3.

## Die allgemeine projectivische Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe.

Wir wollen hier zunächst nur den allgemeinen Fall der eben aufgestellten projectivischen Massbestimmung ins Auge fassen, dass nämlich zwei getrennte Elemente bei der die Scala erzeugenden linearen Transformation vorhanden sind. Dieselben mögen als die beiden *Fundamentalelemente* bezeichnet werden. In sie verlegen wir die beiden Grundelemente einer Coordinatenbestimmung, welche jedes weitere Element durch das Verhältniss zweier homogener Veränderlichen $x_1 : x_2$ festlegt. Den Werth dieses Verhältnisses mögen wir kurz durch $z$ bezeichnen, sodass also $z = 0$ und $z = \infty$ die beiden Fundamentalelemente vorstellt. Alsdann ist die lineare Transformation, von der wir bei der Construction der Scala ausgehen wollen, durch eine Gleichung von der folgenden Form gegeben:

$$z' = \lambda z,$$

wo $\lambda$ eine die Transformation bestimmende Constante ist.*) — Wenden

---

*) Dieses $\lambda$ darf nach einer oben gemachten Bemerkung nicht ganz beliebig sein, weil wir bei der Construction der Scala nur reelle Elemente des Grundgebildes ins Auge fassen. Es muss $\lambda$ zunächst der Beschränkung genügen, dass durch die Transformation $z' = \lambda z$ reelle Elemente in reelle übergehen (unabhängig davon, ob die beiden Fundamentalelemente $z = 0$, $z = \infty$ reell oder imaginär sind). Sodann muss $\lambda$ (vergl. den weiteren Text) bei reellen Fundamentalelementen positiv sein.

wir nun diese Transformation wiederholt auf ein willkürlich angenommenes Element $z = z_1$ an, so erhalten wir eine Elementenreihe:

$$z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1, \ldots .$$

*und diese Elementenreihe ist unsere Scala.* Dieselbe geht, wie a priori ersichtlich, durch die erzeugende Transformation in sich über.

Bezeichnen wir nun *den Scalentheil als Einheit der Entfernung*, so wird die Entfernung der Elemente $z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1, \ldots$ von dem Elemente $z_1$ bez. gleich 0, 1, 2, 3, ....

Jetzt werden wir, um auch die Entfernung anderer Elemente von dem Elemente $z_1$ messen zu können, die Scalentheile unterabtheilen, etwa zunächst in $n$ (gleiche) Theile. Man erreicht dies, indem man auf das eine Gränzelement eines Scalentheils diejenige lineare Transformation $(n-1)$ mal anwendet, welche nach $n$maliger Wiederholung die Transformation $z' = \lambda z$ ergiebt, d. h. also die Transformation:

$$z' = \lambda^{\frac{1}{n}} . z .$$

Dabei wird man die $n^{\text{te}}$ Wurzel des Näheren so wählen*), dass das Element $\lambda^{\frac{1}{n}} z$ zwischen die Elemente $z$ und $\lambda z$ zu liegen kommt.

Ist diese Unterabtheilung ausgeführt, so kann man nunmehr die Entfernung aller Elemente von $z_1$ angeben, deren Coordinate $z$ sich auf die folgende Form bringen lässt:

$$z = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{n}} . z_1 ,$$

wo $\alpha$, $\beta$ ganze Zahlen sind. Diese Entfernung wird geradezu gleich dem Exponenten $\alpha + \frac{\beta}{n}$.

Indem man sich nun die Untertheilung der Scala unbegränzt fortgesetzt denkt, ist ersichtlich, dass überhaupt als Entfernung eines Elementes $z$ von dem Elemente $z_1$ derjenige Exponent $\alpha$ anzusehen ist, zu welchem $\lambda$ erhoben werden muss, damit $\lambda^\alpha z_1 = z$ ist. Es ist dabei $\alpha$ irgend eine rationale oder irrationale Zahl.

---

*) Warum gerade diese Bestimmung, übersieht man am besten an dem Beispiele der Kreistheilung. Soll bei einem Kreise ein Scalentheil, etwa ein Grad, untergetheilt werden, so ist das zunächst noch eine unbestimmte Aufgabe, weil der gegebene Scalentheil nur bis auf Multipla der Periode $2\pi$ gegeben ist. Diese Unbestimmtheit wird durch die Festsetzung im Texte aufgehoben. — Bei reellen Fundamentalelementen genügt es, $\lambda^{\frac{1}{n}}$ einfach als die reelle $n^{\text{te}}$ Wurzel von $\lambda$ zu definiren. Damit es aber eine solche giebt, muss $\lambda$ positiv sein, was schon oben angegeben wurde. Bei negativem $\lambda$ würde man für die Scala eine Elementenreihe erhalten, deren Elemente nicht in der Reihenfolge ihrer Entstehung aufeinander folgten.

Wir können dies, da offenbar $\alpha = \log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ ist, auch so aussprechen:

*Die Entfernung eines Elementes $z$ von dem Elemente $z_1$ ist gleich dem Logarithmus des Quotienten $\frac{z}{z_1}$, dividirt durch die Constante $\log \lambda$.*

Das Element $z_1$ ist dabei nur zufällig als Anfangselement der Scala gewählt, aber nicht weiter ausgezeichnet gewesen; man kann dasselbe durch eine lineare Transformation, welche die beiden Fundamentalelemente und also die ganze Massbestimmung nicht ändert, überall hinbringen. Man hat also:

*Die Entfernung zweier beliebiger Elemente $z$ und $z'$ ist gleich $\log \frac{z}{z'} : \log \lambda$,* wie man noch verificiren mag, indem man die Entfernungen der beiden Elemente $z$ und $z'$ von $z_1$, nämlich $\log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ und $\log \frac{z'}{z_1} : \log \lambda$ von einander subtrahirt.

Statt der Constanten $\frac{1}{\log \lambda}$ wollen wir jetzt kürzer $c$ schreiben *), eine Bezeichnung, die im Folgenden immer angewendet werden soll.

*Dann ist also die Entfernung zweier beliebiger Elemente $z$ und $z'$ gleich $c \cdot \log \frac{z}{z'}$.*

An diesem Ausdrucke für den Massunterschied zweier Elemente verificirt man leicht das Vorhandensein derjenigen Eigenschaften, durch deren Forderung wir ihn construirt haben. Zunächst findet die Addirbarkeit der Massunterschiede statt:

$$c \log \frac{z}{z''} = c \log \frac{z}{z'} + c \log \frac{z'}{z''}.$$

Es ist ferner die Entfernung eines Elementes von sich selbst gleich Null:

$$c \,.\, \log \frac{z}{z} = 0.$$

Endlich bleibt die Entfernung zweier Elemente:

$$c \log \frac{z}{z'}$$

ungeändert, wenn man auf $z$ und $z'$ gleichzeitig eine lineare Transformation anwendet, bei der die beiden Fundamentalelemente:

$$z = 0, \quad z = \infty$$

---

*) Entsprechend den Beschränkungen, die der Constanten $\lambda$ aufgelegt waren, wird man Beschränkungen für die Constante $c$ erhalten. Dieselben gehen dahin, dass $c$ reell oder rein imaginär sein muss, je nachdem die Fundamentalelemente reell oder imaginär sind. Wählte man $c$ anders, so würde man noch immer den hier gewonnenen analytischen Ausdruck als Massunterschied bezeichnen können, aber der Massunterschied zweier consecutiver reeller Elemente wäre dann imaginär.

ungeändert bleiben, also eine Transformation, welche $z$ und $z'$ gleichzeitig in Multipla ihrer selbst überführt. —

Der hiermit für die Massbestimmung gewonnene analytische Ausdruck lässt sich einfach geometrisch interpretiren. Der Quotient $\frac{z}{z'}$ hat, wie bekannt, die Bedeutung des Doppelverhältnisses der Elemente $z$, $z'$ zu den beiden Fundamentalelementen $z = 0$, $z = \infty$.

*Es wird also bei unserer Massbestimmung die Entfernung zweier Elemente des Grundgebildes gleich dem mit einer gewissen Constanten multiplicirten Logarithmus des von denselben mit den beiden Fundamentalelementen gebildeten Doppelverhältnisses.*

Die fragliche Constante $c$ ist dabei unbestimmt und willkürlich anzunehmen.

## § 4.

## Uebergang zu complexen Elementen. Verallgemeinerung der Coordinatenbestimmung.

Wir haben bei der Construction der Scala und also bei der Definition des Massunterschiedes zweier Elemente seither nur reelle Elemente des Grundgebildes betrachtet. Nun wir aber den analytischen Ausdruck für den Massunterschied zweier Elemente gewonnen haben:

$$c \log \frac{z}{z'},$$

so können wir auch unmittelbar von einem Massunterschiede zweier complexen Elemente des Grundgebildes sprechen. Dabei tritt dann in Allgemeinheit eine Erscheinung auf, die wir beim Winkel kennen und die, wie im nächsten Paragraphen weiter erörtert werden soll, bei reellen Elementen immer dann in Evidenz tritt, wenn die Fundamentalelemente imaginär sind. Es ist dies, *dass der Massunterschied zweier Elemente keine eindeutig bestimmte, vielmehr eine unendlich vielwerthige Function mit einem Periodicitätsmodul ist.*

Dieser Periodicitätsmodul beträgt, da die Function des Logarithmus die Periode $2\pi i$ hat, $2c\pi i$.

Da ferner der Logarithmus unendlich gross wird, wenn sein Argument 0 oder $\infty$ beträgt, so sind offenbar solche Elemente unendlich weit von einander entfernt, für welche $\frac{z}{z'} = 0$ oder $= \infty$ wird. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn eines der beiden Elemente mit einem der beiden Fundamentalelemente ($z = 0$, $z = \infty$) zusammenfällt. Also:

*Bei unserer Massbestimmung erhält das Grundgebilde zwei (reelle oder imaginäre) unendlich ferne Elemente: die beiden Fundamentalelemente.*

Die Entfernung dieser Elemente von einem beliebigen anderen ist in derselben Weise unendlich gross, wie log 0 oder log $\infty$.

*Die beiden Fundamentalelemente sind logarithmisch unendlich weit.*

Wir mögen nun auch die beschränkende Annahme fallen lassen, welche wir seither hinsichtlich der Coordinatenbestimmung gemacht hatten. Die beiden Fundamentalelemente mögen nicht mehr mit den Grundelementen der Coordinatenbestimmung zusammenfallen, sondern sollen durch eine allgemeine Gleichung 2ten Grades gegeben sein:

$$\Omega = az^2 + 2bz + c = 0,$$

oder, homogen geschrieben:

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0.$$

Um den Massunterschied zweier Elemente mit den homogenen Coordinaten $x_1$, $x_2$ und $y_1$, $y_2$ anzugeben, hat man nur das Doppelverhältniss derselben zu den beiden Elementen $\Omega = 0$ zu bilden. Dieses letztere wird aber nach bekannten Regeln:

$$= \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

wo $\Omega_{xx}$, $\Omega_{yy}$, $\Omega_{xy}$ die folgenden Ausdrücke bedeuten. Es ist $\Omega_{xx}$, $\Omega_{yy}$ dasjenige, was aus $\Omega$ entsteht, wenn man statt der Variabeln bez. $x_1$, $x_2$ und $y_1$, $y_2$ einsetzt, also:

$$\Omega_{xx} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \qquad \Omega_{yy} = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2.$$

Sodann $\Omega_{xy}$ bedeutet den Ausdruck:

$$\Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Bei Anwendung dieser Bezeichnung wird jetzt der Massunterschied zweier Elemente gleich:

$$c \cdot \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

*und dies ist der allgemeine analytische Ausdruck für den Massunterschied.*

Gelegentlich werden wir statt des Logarithmus einen Arcus Cosinus einführen. Es ist bekanntlich:

$$c \log a = 2ic \cdot \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}.$$

Also auch unser Massunterschied:

$$= 2ic \cdot \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}.$$

Dies ist diejenige Form des analytischen Ausdrucks, welche bei Cayley vorkommt; Cayley hat nur, wie bereits erwähnt, der Constanten $c$ den particulären Werth $-\frac{i}{2}$ beigelegt, sodass bei ihm der Massunterschied geradezu gleich wird dem betreffenden Arcus Cosinus.

## § 5.

## Besondere Betrachtung der reellen Elemente des Grundgebildes.

Wir wollen nunmehr betrachten, wie sich die in den vorigen beiden Paragraphen entwickelte Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe des Näheren für die reellen Elemente des Gebildes gestaltet. Dabei werden die beiden Fälle zu unterscheiden sein, dass die Fundamentalelemente reell oder dass sie imaginär sind. Der bestimmteren Vorstellung wegen wollen wir dabei insbesondere die Massbestimmung auf der geraden Punktreihe ins Auge fassen; für das Strahlbüschel gelten selbstverständlich die nämlichen Dinge.

Es mögen *erstens* auf der Geraden zwei reelle Fundamentalpunhte $o$, $o'$ gegeben sein.

Sind dann $x$ und $y$ reelle Punkte der Geraden, so haben $x$, $y$ zu $o$, $o'$ ein negatives oder positives Doppelverhältniss, je nachdem die Strecke $xy$ von der Strecke $oo'$ getrennt wird oder nicht. Im ersten Falle ist also der Logarithmus des Doppelverhältnisses rein imaginär, im zweiten (bis auf imaginäre Perioden) reell. Stellen wir also die Forderung, dass die Entfernung zweier aufeinander folgender Punkte der Geraden reell sei, so müssen wir die den Logarithmus multiplicirende Constante $c$ ebenfalls reell nehmen. Dann gilt der Satz:

*Die Entfernung zweier Punkte $x$, $y$ ist eine imaginäre oder eine reelle Grösse, je nachdem die Strecke $xy$ von der Strecke $oo'$ getrennt wird oder nicht.*

Man könnte natürlich $c$ (wie dies bei Cayley geschieht) einen rein imaginären Werth beilegen; dann würden sich in dem vorstehenden Satze die Worte reell und imaginär vertauschen. Von vornherein ist dies gerade so zulässig, wie die andere Annahme. Nur würde dadurch die Massbestimmung einen ganz anderen Charakter für reelle Punkte bekommen, als die von uns gewöhnlich angewandte ist. Wollten wir z. B. eine Scala solcher Punkte construiren, 1, 2, 3 ..., die jedesmal um die Einheit der Entfernung von einander abstehen, so würde 2 von 1 und 3 durch $oo'$ getrennt sein und die Entfernung $\overline{13}$ nur insofern gleich zwei Einheiten sein, als man von 1 zuerst zu 2, von 2 sodann zu 3 geht, während $\overline{13}$ unmittelbar gemessen einen imaginären Werth ergiebt u. s. f. Desshalb soll die Annahme eines imaginären $c$ hier ausgeschlossen sein.

Bei reellem $c$ haben wir zunächst den eben angegebenen Satz. Wir werden uns dementsprechend auf die Betrachtung der einen der beiden Strecken beschränken, in welche die Gerade durch die beiden Fundamentalpunkte zerlegt wird. Jede dieser beiden Strecken ist unendlich lang, insofern ihre beiden Gränzpunkte, die Fundamentalpunkte, von allen anderen Punkten unendlich fern sind.

Man stelle sich nun vor, dass man in einen Punkt der Strecke $o\,o'$, die wir gerade betrachten, gesetzt wäre und dass man sich nicht anders auf der Geraden fortbewegen könne, als vermöge solcher linearer Transformationen, welche die Punkte $o$, $o'$ und also die Massbestimmung ungeändert lassen. Wir wollen dann auch von einer Geschwindigkeit der Bewegung sprechen, indem wir darunter das Verhältniss des durchlaufenen Raumes (gemessen in unserer Massbestimmung) zu der gebrauchten Zeit verstehen. Wenn man sich dann mit constanter Geschwindigkeit in dem einen oder dem anderen Sinne auf der Geraden bewegt, so wird man sich dem Punkte $o$ oder $o'$ beständig nähern, man wird ihn aber, da er unendlich fern ist, nie erreichen. *In die zweite Strecke $o'o$ aber, auf der man sich gerade nicht befindet, wird man nie gelangen, sodass man sich von ihrem Vorhandensein nicht wird überzeugen können.*

Dies ist nun gerade diejenige Vorstellung, welche man sich in der *hyperbolischen* Geometrie von dem Messen auf der geraden Linie bildet. Die hyperbolische Geometrie ertheilt der Geraden zwei unendlich ferne Punkte. Ob jenseits der beiden unendlich fernen Punkte noch ein Stück der Geraden existirt, welches das im Endlichen gelegene Stück zu einer geschlossenen Curve ergänzt, ist nicht zu sagen, da uns unsere Bewegungen nie an die unendlich fernen Punkte hinan, geschweige denn über dieselben hinausführen. Jedenfalls wird man aber ein solches Stück als ein gedachtes, ideales der geraden Linie hinzufügen können.

Wir wollen nun *zweitens* annehmen, die beiden der Massbestimmung auf der Geraden zu Grunde zu legenden Fundamentalpunkte seien (conjugirt) imaginär. Dann ist das Doppelverhältniss der beiden Fundamentalpunkte zu zwei beliebigen reellen Punkten $x$, $y$ negativ, der Logarithmus also rein imaginär. Wir müssen also $c$ einen rein imaginären Werth $c_1 i$ ertheilen, damit die Entfernung reeller Punkte reell sein kann. Dann aber ist zugleich die gegenseitige Entfernung aller reeller Punkte reell. Unendlich ferne reelle Punkte giebt es nicht. Die Linie kehrt wie eine geschlossene Curve in sich zurück. Die reelle Entfernung zweier Punkte ist nicht vollständig bestimmt, sondern nur bis auf Multipla einer reellen Periode, welche die Gesammtlänge der Geraden vorstellt. Dieselbe beträgt $2\,i\pi c = -\,2\,\pi c_1$. Die Massbestimmung auf der Geraden ist dann ganz so, wie die gewöhnliche Massbestimmung auf einem Kreise mit dem Radius $c_1$.

Die hiermit geschilderte Massbestimmung auf der Geraden ist gerade diejenige, welche die *elliptische* Geometrie anzunehmen hat. —

Was wir jetzt für die gerade Punktreihe ausgeführt haben, können wir genau in derselben Weise für das *Strahlbüschel* aussprechen. Sind die beiden der Massbestimmung im Strahlbüschel zu Grunde

liegenden Fundamentalstrahlen reell, so hat der Büschel zwei reelle Strahlen, welche einen unendlich grossen Winkel mit allen übrigen einschliessen. Eine Rotation eines Strahles im Büschel — entsprechend definirt, wie eben die Bewegung eines Punktes auf der Geraden — führt den Strahl nie an diese beiden Gränzstrahlen hinan oder gar über dieselben hinaus. Eine solche Massbestimmung liegt unserer gewöhnlichen Winkelbestimmung gewiss nicht zu Grunde, da eine fortgesetzte Rotation eines Strahles um einen auf ihm gelegenen Punkt den Strahl nach endlicher Zeit in seine Anfangslage zurückführt. Vielmehr verlangt diese Thatsache imaginäre Fundamentalstrahlen. Und in der That erkannten wir bereits in § 2., dass die gewöhnliche Winkelbestimmung zwei imaginäre Fundamentalstrahlen benutzt, nämlich diejenigen beiden Strahlen des Büschels, welche durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte durchgehen. Bei der hyperbolischen und elliptischen Geometrie bleibt die Winkelbestimmung im Strahlbüschel ganz die gewöhnliche; die beiden Fundamentalstrahlen werden nur nicht mehr als diejenigen beiden Strahlen definirt, welche durch die Kreispunkte hindurchgehen, sondern als diejenigen, welche einen bestimmten Kegelschnitt, den in diesen Geometrieen vorkommenden unendlich fernen Kreis (vergl. § 8.) berühren.

Die in der allgemeinen Formel des § 4. unbestimmt bleibende Constante $c$ ist, damit dieselbe für die gewöhnliche Winkelbestimmung gilt, gleich $\pm \frac{\sqrt{-1}}{2}$ zu setzen. Zunächst muss sie, nach den vorstehend bei der geraden Punktreihe ausgeführten Betrachtungen, rein imaginär $= \pm c_1 i$ sein. Alsdann wird die Summe der Winkel im Strahlbüschel gleich $2\pi c_1$, und da dieselbe bei der gewöhnlichen Bestimmung gleich $\pi$ gesetzt wird*), so ist $c_1 = \frac{1}{2}$ zu nehmen. Unter dieser Annahme ergiebt die Formel des § 4. in der That die gewöhnlich bei der Winkelbestimmung benutzte Formel. Seien $x$ und $y$ rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Der Mittelpunkt des Strahlbüschels, welches wir betrachten, soll in den Coordinatenanfangspunkt fallen. So sind die beiden nach den Kreispunkten gehenden Strahlen:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Mögen sodann zwei Strahlen durch die homogenen Coordinaten $x$, $y$ und $x'$, $y'$ festgelegt sein. So wird, nach der Formel des § 4., indem wir noch $c = \frac{i}{2}$ setzen, ihr Winkel

*) Unter der Summe der Winkel im Strahlbüschel ist hier derjenige Winkel zu verstehen, den ein sich um einen seiner Punkte drehender Strahl durchlaufen muss, um zum ersten Male wieder mit seiner anfänglichen Lage zusammen zu fallen. Es ist dies die Hälfte desjenigen Winkels, den ein Punkt auf der Peripherie eines Kreises durchlaufen muss, um zur Anfangslage zurück zu gelangen.

$$= \text{arc cos} \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

und dieses ist ersichtlich die gewöhnliche Winkelbestimmung.

Der Winkel zweier Geraden ist also im Sinne der projectivischen Geometrie zu definiren, *als der mit* $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ *multiplicirte Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, welches die beiden Geraden mit den von ihrem Schnittpunkte nach den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten gehenden Linien bilden.*

Gerade Linien bilden mit einander insbesondere einen rechten Winkel, wenn dieses Doppelverhältniss ein harmonisches ist. Die Bezeichnung eines solchen Winkels (oder auch einer entsprechenden Strecke) als eines Rechten werden wir in der Folge gelegentlich auch bei der allgemeinen Massbestimmung anwenden.

## § 6.

## Die specielle Massbestimmung bei zusammenfallenden Grundelementen.

Bisher hatten wir den besonderen Fall noch nicht in Betracht gezogen, der bei dem Zusammenfallen der beiden Fundamentalelemente der Massbestimmung eintritt. Unsere allgemeine Formel

$$2ic \text{ arc cos} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

ergiebt dann, unabhängig von den Werthen, die man $x$ und $y$ beilegen mag, als Entfernung der beiden Elemente Null. Aber eine Massbestimmung bleibt nach wie vor möglich, da die Art, wie die Entfernungen verschiedener Elemente beim Zusammenfallen der Fundamentalelemente Null werden, eine ganz bestimmte ist. Es ist offenbar:

$$\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \cdot \Delta,$$

wo $\Delta$ die Discriminante $(ac - b^2)$ der quadratischen Form $\Omega$ ist. Deshalb können wir die allgemeine Formel für die Massbestimmung auch so schreiben:

$$2ic \,.\, \text{arc sin} \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}.$$

Fallen jetzt die beiden Fundamentalelemente zusammen, so wird $\Omega$ ein vollständiges Quadrat eines linearen Ausdruckes $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_x$ und $\Delta$ verschwindet. Wir können deshalb zunächst den arc sin dem sinus selbst gleich setzen, also die Entfernung schreiben:

$$2ic\sqrt{\Delta} \cdot \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

oder, wenn wir für $\Omega_{xx}$, $\Omega_{yy}$ noch bez. $p_x^2$ und $p_y^2$ einführen:

$$2\,ic\,\Delta\,\frac{x_1y_2-y_1x_2}{(p_1x_1+p_2x_2)\,(p_1y_1+p_2y_2)}.$$

Den verschwindenden Factor $\Delta$ vereinigen wir mit dem $2\,ic$, dem wir einen beliebig grossen Werth beilegen können, zu einer neuen Constanten $k$. *So erhalten wir denn für den Massunterschied die Formel*)*:

$$k\cdot\frac{x_1y_2-y_1x_2}{(p_1x_1+p_2x_2)\,(p_1y_1+p_2y_2)},$$

wo $p=0$ das doppeltzählende Fundamentalelement vorstellt.

Dass dieser Ausdruck, den wir durch einen Gränzübergang gefunden haben, in der That den Forderungen genügt, die wir nach § 2. an ihn zu stellen haben, ist leicht zu verificiren.

Wir wollen ihn zu dem Zwecke in der etwas anderen Form schreiben:

$$\frac{q_1x_1+q_2x_2}{p_1x_1+p_2x_2}-\frac{q_1y_1+q_2y_2}{p_1y_1+p_2y_2},$$

wo $q_1$, $q_2$ im Uebrigen beliebige Grössen sind, welche die Bedingung befriedigen:

$$q_1p_2-p_1q_2=k.$$

An dieser Form tritt zuvörderst die Addirbarkeit der Massunterschiede ohne Weiteres in Evidenz.

Sodann aber auch die Unveränderlichkeit derselben durch diejenigen speciellen linearen Transformationen, welche das Fundamentalelement $p=0$ doppeltzählend ungeändert lassen. Diese Transformationen führen $p$ in ein Multiplum seiner selbst über; jeden anderen linearen Ausdruck, also auch $q$, in dasselbe Multiplum seiner selbst, vermehrt um ein Vielfaches von $p$:

$$p'=\varrho p$$
$$q'=\varrho q+\sigma p.$$

Der Quotient $\frac{q}{p}$ ändert sich dabei also um die Constante $\sigma$, und der Massunterschied zweier Elemente, der die Differenz zweier solcher Quotienten ist, bleibt völlig ungeändert, w. z. b.

Geometrisch definirt sich die hiermit gefundene Massbestimmung folgendermassen. Der Quotient $\frac{p_x}{q_x}$ stellt, wie bekannt, das Doppelverhältniss des Punktes $x$ und desjenigen Punktes, für welchen $\frac{p}{q}$ den Werth 1 annimmt, zu den beiden Punkten $p=0$, $q=0$ dar, also zu dem gegebenen doppeltzählenden Fundamentalelemente und einem beliebig gewählten hinzutretenden Elemente. *Die Differenz der Werthe*

*) Cayley leitet diese Formel in ganz ähnlicher Weise ab.

*dieses Doppelverhältnisses, gebildet für zwei Elemente, stellt den Massunterschied der beiden Elemente dar.*

Diese Massbestimmung, die sich als ein Gränzfall der allgemeinen ergab, soll der letzteren gegenüber fortan als *specielle Massbestimmung* bezeichnet werden. Dieselbe besitzt im Gegensatze zu der allgemeinen besonders die folgenden beiden Eigenschaften:

Sie ist nicht mehr mehrdeutig, sondern eindeutig definirt.

Sie besitzt nicht zwei logarithmisch unendlich ferne Elemente, sondern nur ein algebraisch unendlich weites (das doppeltzählende Fundamentalelement).

Unter diese specielle Massbestimmung subsumirt sich insbesondere, wie bereits in § 2. angedeutet, die gewöhnliche (Euklidische, parabolische) Massbestimmung auf der geraden Linie. Desshalb hat die Gerade bei der gewöhnlichen Anschauung auch nur einen unendlich fernen Punkt. Diesem Punkte kann man sich auf der einen oder der anderen Seite unausgesetzt nähern, ohne ihn allerdings zu erreichen. Die gerade Linie ist bei der parabolischen Geometrie, im Gegensatze zu der elliptischen, unendlich lang. Aber ein ideales Stück, wie bei der hyperbolischen Geometrie, besitzt sie nicht mehr; sie hängt im Unendlichen zusammen.

## § 7.

## Specielle Massbestimmung, welche eine allgemeine in einem Elemente berührt. Krümmung der letzteren.

Wir wollen uns jetzt auf einem Grundgebilde erster Stufe zwei Massbestimmungen denken, eine allgemeine und eine specielle. Dieselben sollen in einer besonderen gegenseitigen Beziehung stehen, die als *Berührung der beiden Massbestimmungen in einem Elemente* bezeichnet werden wird. Welcher Art diese Beziehung ist, wird man am besten an einem Beispiele erkennen.

Auf einer geraden Linie sei eine gewöhnliche Massbestimmung gegeben, die den unendlich fernen Punkt der Geraden als Doppelelement benutzt. Die Punkte der Geraden seien durch eine nicht homogene Coordinate $z$ vorgestellt, wo $z$ geradezu den Abstand vom Coordinatenanfangspunkte bedeuten mag.

Sodann construire man auf der Geraden in der folgenden Weise eine allgemeine Massbestimmung. In dem Abstande 1 von der gegebenen Geraden und auf der im Coordinatenanfangspunkte errichteten Senkrechten sei der Mittelpunkt eines Strahlbüschels gelegen. Für dieses Strahlbüschel sei wiederum die gewöhnliche Massbestimmung, d. h. jetzt die für das Strahlbüschel gewöhnliche Winkelbestimmung,

gegeben. Diese Massbestimmung kann man auf die gegebene Gerade übertragen, indem man als Massunterschied zweier Punkte der Geraden den Winkel definirt, den die durch sie hindurchgehenden Strahlen des Büschels bilden. Sei $z$ die Coordinate eines der Punkte, so ist der Winkel, den der hindurchgehende Strahl des Büschels mit dem durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden bildet, gleich arc tang $z$; überhaupt wird also bei dieser Massbestimmung der Massunterschied zweier Elemente $z$ und $z'$:

$$= \text{arc tang } z - \text{arc tang } z'.$$

Die Fundamentalelemente dieser Massbestimmung sind imaginär und des Näheren bestimmt durch $z = \pm i$.

Zwischen der angenommenen speciellen Massbestimmung und der jetzt hinzutretenden allgemeinen besteht nun die Beziehung, dass sie für Werthe von $z$, die sehr wenig von $z = 0$ abweichen, nahezu übereinstimmen, da ja für sehr kleine Winkel der Unterschied zwischen Winkel und trigonometrischer Tangente verschwindet.

Am deutlichsten tritt dies hervor, wenn wir für den arc tang $z$ seine Reihenentwickelung setzen: $= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots$ *Beide Massbestimmungen sind also in der Nähe von $z = 0$ bis auf Grössen höherer Ordnung identisch.* Diese Beziehung der beiden Massbestimmungen ist es, welche als *Berührung* derselben bezeichnet sein soll.

Wenn sich, wie im Vorstehenden, eine allgemeine und eine specielle Massbestimmung berühren, so ist augenscheinlich der Berührungspunkt der vierte harmonische Punkt zu den beiden Fundamentalpunkten der allgemeinen und dem doppeltzählenden Fundamentalpunkte der speciellen Massbestimmung. Will man also, wenn auf einem Grundgebilde eine allgemeine Massbestimmung gegeben ist, eine specielle Massbestimmung construiren, welche die gegebene in einem bestimmten Elemente berührt, so suche man zuerst zu diesem und zu den beiden Fundamentalelementen der allgemeinen Massbestimmung das vierte harmonische. Dieses ist als Doppelelement der gesuchten Massbestimmung zu benutzen. Es sind dann nur noch die absoluten Werthe der in der letzteren vorkommenden Constanten so zu bestimmen, dass in der Nähe des gegebenen Elementes zwischen beiden Massbestimmungen Uebereinstimmung stattfindet. Diese Uebereinstimmung ist dann wegen der besonderen Lage des doppeltzählenden Fundamentalelementes sofort eine innigere, eine Berührung.

Nun findet ein charakteristischer Unterschied statt zwischen der allgemeinen Massbestimmung mit imaginären und der allgemeinen Massbestimmung mit reellen Fundamentalelementen.

Sind die beiden Fundamentalelemente imaginär, so eilt die in einem Punkte berührende specielle Massbestimmung der allgemeinen

voran. Das heisst, für das eben gebrauchte Beispiel, der Abstand eines Punktes $z$ vom Nullpunkte, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung, ist immer grösser, als der Abstand derselben beiden Elemente, gemessen in der gegebenen allgemeinen Massbestimmung. Man übersieht dies deutlich, wenn man bedenkt, dass die ganze Linie, gemessen in der speciellen Massbestimmung, eine unendliche Länge hat, während sie in der gegebenen allgemeinen Massbestimmung von endlicher Länge ist. Nur für Punkte, die unendlich nahe an dem Berührungspunkte ($z = 0$) gelegen sind, stimmen beide Massbestimmungen überein.

Sind dagegen die beiden Fundamentalelemente der gegebenen allgemeinen Massbestimmung reell, so bleibt umgekehrt die in einem Punkte berührende specielle Massbestimmung hinter der gegebenen zurück. In der That, die von den beiden Fundamentalelementen begrenzte Strecke ist in der gegebenen allgemeinen Massbestimmung bereits unendlich gross, während sie für die berührende Massbestimmung noch endlich ist.

Dieses Zurückbleiben resp. Voraneilen der allgemeinen Massbestimmung, gegenüber der speciellen tangirenden, bezeichne ich als die *Krümmung der allgemeinen Massbestimmung*, zunächst im Berührungselemente. Die Krümmung soll *positiv* heissen, wenn die Fundamentalelemente imaginär, *negativ*, wenn sie reell sind. Als *Mass der Krümmung* bezeichne ich, schlechthin ausgesprochen, die Grösse des Zurückbleibens resp. Voraneilens. Dieses Krümmungsmass erhält, wie ich jetzt zeigen will, für alle Elemente des Gebildes denselben Werth. Für denselben kann $-\frac{1}{4c^2}$ genommen werden, wo $c$ die charakteristische Constante der allgemeinen Massbestimmung ist.

Die beiden Fundamentalelemente der allgemeinen Massbestimmung mögen, wie oben in dem Beispiele, harmonisch zu $z = 0$ und zu $z = \infty$ gelegen sein, und zwar seien sie durch:

$$z^2 = a$$

bestimmt. Ist dann $c$, wie immer, die charakteristische Constante der Massbestimmung, so findet man für den Abstand eines Elementes $z$ vom Coordinatenanfangselemente:

$$2ci \operatorname{arc} \operatorname{tg} \cdot \frac{z}{\sqrt{a}},$$

oder, in eine Reihe entwickelt:

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}} \cdot z - \frac{2ci}{3\sqrt{a^3}} \cdot z^3 + \frac{2ci}{5\sqrt{a^5}} \cdot z^5 - + \cdots.$$

Die im Elemente $z = 0$ tangirende specielle Massbestimmung ist diejenige, welche als Entfernung des Elementes $z$ vom Elemente $z = 0$ das erste Glied der Reihenentwicklung, also den Ausdruck:

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}}\cdot z$$

benutzt. Als Abweichung der allgemeinen Massbestimmung von der tangirenden speciellen, oder als Krümmungsmass der ersteren, kann man dann definiren: das negativ genommene zweite Glied der Reihenentwicklung, dividirt durch die dritte Potenz des ersten Gliedes. Dies aber ergiebt den eben angegebenen Ausdruck $-\frac{1}{4c^2}$.

Dieser Ausdruck für das Krümmungsmass hat auch das oben festgesetzte Vorzeichen. Bei reellen Fundamentalelementen muss man (§ 4.) $c$ ein positives Vorzeichen ertheilen, das Krümmungsmass wird also negativ; bei imaginären Fundamentalelementen dagegen ist $c$ rein imaginär zu nehmen, somit das Krümmungsmass positiv. Das Krümmungsmass einer speciellen Massbestimmung wird Null. Denn wir mussten im vorigen Paragraphen, um durch einen Grenzübergang zu der speciellen Massbestimmung zu gelangen, $c$ einen unendlich grossen Werth ertheilen.

Endlich ist auch die Krümmung in allen Elementen dieselbe, insofern $c$ für alle Elemente dieselbe Bedeutung hat.

Das hiermit aufgestellte Krümmungsmass einer allgemeinen Massbestimmung kann noch in der folgenden Weise definirt werden.

In § 5. wurde gezeigt, dass die Länge der ganzen Linie bei imaginären Fundamentalelementen und der Constanten $c_1 i$ gleich $2c_1\pi$ wird. Der mit $\pi^2$ multiplicirte reciproke Werth des Quadrats dieses Ausdruckes ist aber das Krümmungsmass. Das Krümmungsmass ist gleich der Fläche eines Kreises, der einen Radius gleich dem reciproken Werthe der scheinbaren Länge der ganzen Geraden hat.

Bei reellen Fundamentalelementen kann man folgende Betrachtung machen. Der gegenseitige Abstand der beiden Fundamentalelemente $z = \pm\sqrt{a}$, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung, ist gleich $4c$. Das Krümmungsmass wird also gleich dem mit $-4$ multiplicirten reciproken Quadrate des in der tangirenden speciellen Massbestimmung gemessenen Abstandes der beiden Fundamentalelemente.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die dreierlei Massbestimmungen, welche die elliptische, die hyperbolische und die parabolische Geometrie auf der geraden Linie annehmen, zu einander in dem Verhältnisse der Berührung stehen. Die Berührung findet jedesmal in demjenigen Punkte Statt, den wir gerade ins Auge fassen, von dem aus wir im Sinne der hyperbolischen oder der elliptischen oder der parabolischen Geometrie messen. Die Massbestimmung der parabolischen Geometrie ist die specielle Massbestimmung, welche die allgemeine Massbestimmung der elliptischen bez. der hyperbolischen Geometrie tangirt. Sie kann

desswegen die letzteren für alle Punkte ersetzen, welche von dem Punkte, den wir gerade betrachten, wenig entfernt sind.

## § 8.

## Die allgemeine projectivische Massbestimmung in der Ebene.

Nachdem nunmehr die projectivische Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe auseinandergesetzt worden ist, können wir, fast unmittelbar, zu den projectivischen Massbestimmungen auf den Grundgebilden zweiter und sodann beliebiger Dimension übergehen. Wir finden sodann eine allgemeinere Massbestimmung, welche die von uns bei diesen Grundgebilden gewöhnlich in Anwendung gebrachten Massbestimmungen, andererseits aber auch die Massbestimmungen, welche die elliptische und die hyperbolische Geometrie für die betreffenden Gebilde aufstellt, als specielle Fälle umfasst. Es soll dieselbe hier zunächst für die Ebene auseinandergesetzt werden. Für den Punkt (als Strahlen- und Ebenenbündel im Raume) gestaltet sich dieselbe ganz in gleicher Weise, wie in § 10. noch näher erörtert werden soll.

So wie man bei der projectivischen Massbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe zwei Elemente derselben als Fundamentalelemente benutzt, so legt man der projectivischen Massbestimmung in der Ebene einen Kegelschnitt zu Grunde, welcher *der fundamentale Kegelschnitt* heissen soll (bei Cayley „the absolute"). An diesen fundamentalen Kegelschnitt knüpft sich zunächst die Massbestimmung auf allen Grundgebilden erster Stufe, welche der Ebene angehören, d. h. die Massbestimmung auf den Geraden und in den Strahlbüscheln der Ebene. Jede gerade Linie schneidet den fundamentalen Kegelschnitt in zwei (reellen oder imaginären oder zusammenfallenden) Punkten. Diese sollen die Fundamentalpunkte für die auf ihr zu treffende Massbestimmung sein. Unter den Linien jedes Büschels finden sich zwei (reelle oder imaginäre oder zusammenfallende) Tangenten des Kegelschnitts. Dieselben sollen als Fundamentalstrahlen für die Massbestimmung im Strahlbüschel genommen werden. — Sodann wollen wir noch eine Festsetzung hinsichtlich der Constanten $c$ machen, die in Anwendung zu bringen sind. Zur Massbestimmung auf allen geraden Punktreihen wollen wir dieselbe, übrigens willkürlich gewählte Constante $c$ benutzen; ebenso zur Massbestimmung in allen Strahlbüscheln ein und dieselbe, übrigens beliebig angenommene Constante $c'$.

Für die hiermit eingeführte Massbestimmung wollen wir nunmehr den analytischen Ausdruck aufstellen.

Die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in Punktcoordinaten mag sein:
$$\Omega = 0.$$

Sodann seien durch:

$$\Omega_{xx} \quad , \quad \Omega_{yy}$$

diejenigen Ausdrücke bezeichnet, welche entstehen, wenn man in $\Omega$ die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ eines Punktes $(x)$, resp. die Coordinaten $y_1$, $y_2$, $y_3$ eines Punktes $(y)$ einsetzt. Endlich bedeute:

$$\Omega_{xy}$$

das Resultat der Einsetzung der Coordinaten $y$ in die Polare von $(x)$, oder, was dasselbe ist, der Coordinaten $x$ in die Polare von $(y)$. Dann ist das Doppelverhältniss der beiden Punkte $(x)$ und $(y)$ zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungsgeraden mit dem fundamentalen Kegelschnitt durch den Quotienten der Wurzeln der folgenden in $\lambda$ quadratischen Gleichung gegeben:

$$\lambda^2\Omega_{xx} + 2\lambda\Omega_{xy} + \Omega_{yy} = 0.$$

Das Doppelverhältniss ist also gleich:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

und *die Entfernung der beiden Punkte wird:*

$$= c \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

*oder auch, was dasselbe ist:*

$$= 2ic \,.\, \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}.$$

Es sind dies also, bei der hier gebrauchten Bezeichnung, genau dieselben Ausdrücke, welche bei den Grundgebilden erster Stufe auftraten.

Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich der Winkel zweier Geraden mit den Coordinaten $u_1$, $u_2$, $u_3$ und $v_1$, $v_2$, $v_3$, wenn:

$$\Phi = 0$$

die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes in Liniencoordinaten ist, durch die folgende Formel. *Der Winkel der beiden Geraden ist:*

$$= c' \log \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi^2_{uv} - \Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}},$$

*oder, was dasselbe ist:*

$$= 2ic' \arccos \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}\,\Phi_{vv}}}.$$

Es entsteht nun zunächst die Frage: Wo liegen diejenigen Punkte $(y)$, welche von einem Punkte $(x)$ gleich weit abstehen? Da die Entfernung $\overline{xy}$ nur von:

$$\frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{yy}}}$$

abhängt, so erhalten wir die Gleichung des geometrischen Ortes für $(y)$, indem wir diesen Ausdruck gleich einer Constanten $k$, oder, was dasselbe ist, wenn wir:

$$\Omega^2_{xy} = k^2 \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}$$

setzen. Dies ist aber ein Kegelschnitt, welcher den fundamentalen Kegelschnitt $\Omega_{yy} = 0$ in den beiden Durchschnittspunkten mit $\Omega_{xy} = 0$, der Polare von $(x)$ in Bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt, berührt.

*Von dem Punkte* $(x)$ *stehen alle diejenigen Punkte gleich weit ab, die demselben Kegelschnitte angehören, welcher den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnitten mit der Polare des Punktes* $(x)$ *berührt.*

Diese Kegelschnitte also sind es, die wir, gewöhnlichem Sprachgebrauche folgend, bei unserer Massbestimmung als *Kreise* zu bezeichnen haben. Der Punkt $(x)$ ist das gemeinsame *Centrum* der Kreise. Unter dem *Radius* des Kreises haben wir die Entfernung eines beliebigen seiner Punkte $(y)$ vom Mittelpunkte $(x)$, das heisst den Ausdruck:

$$2ic \text{ arc cos } k$$

zu verstehen.

Unter diesen um das Centrum $(x)$ beschriebenen Kreisen findet sich insbesondere, $k=0$ und also einem Radius gleich $\pi ic$ entsprechend, die Polare des Punktes $(x)$. Es findet sich ferner unter ihnen (für $k = 1$) ein Kreis mit dem Radius Null. Derselbe besteht aus dem Paare der von $(x)$ an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten. Der Abstand zweier auf einer solchen Tangente gelegenen Punkte ist in der That immer Null, weil sie mit den Durchschnittspunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitt das Doppelverhältniss $+1$ bilden. Man müsste denn der Constanten $c$ einen unendlich grossen Werth ertheilen, was hier nicht angeht, da sonst die Entfernung aller nicht auf einer Tangente des Kegelschnitts gelegener Punkte unendlich gross würde. Es bleibt natürlich unbenommen, zur Massbestimmung auf den Tangenten des Kegelschnitts dem $c$ einen besonderen unendlich grossen Werth beizulegen. Diese Massbestimmung ist dann aber nicht mehr mit der allgemeinen vergleichbar. — Es giebt endlich unter den in Rede stehenden concentrischen Kreisen, $k = \infty$ entsprechend, einen mit unendlich grossem Radius. Dies ist der fundamentale Kegelschnitt selbst; wie denn auf jeder durch $(x)$ hindurchgehenden Geraden die beiden Durchschnittspunkte mit dem fundamentalen Kegelschnitte die beiden unendlich fernen Punkte sind: *Der Fundamentalkegelschnitt ist der Ort derjenigen Punkte, welche von einem beliebigen Punkte unendlich abstehen.*

Ganz entsprechende Betrachtungen, wie vorstehend für die Punkte

der Ebene, kann man ohne Weiteres für die Geraden derselben anstellen:

*Diejenigen Geraden, welche mit einer festen Geraden* ($u$) *den nämlichen Winkel einschliessen, umhüllen Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnittspunkten mit* ($u$) *berühren, unter denen sich also insbesondere der Pol von* ($u$) (*als Strahlbüschel gedacht*) *befindet. — Diejenigen Geraden, welche durch einen der Durchschnittspunkte des Fundamentalkegelschnitts mit* ($u$) *hindurchgehen, schliessen mit* ($u$) *einen Winkel Null ein. — Die Tangenten des fundamentalen Kegelschnitts bilden mit* ($u$) *einen unendlich grossen Winkel.*

Diejenigen Kegelschnitte also, welche den Fundamentalkegelschnitt zweimal berühren, sind gleichzeitig Ort derjenigen Punkte, welche von einem festen Punkte, dem Pole der Berührungssehne, gleich weit abstehen, und werden umhüllt von denjenigen Geraden, welche eine feste Gerade, die Berührungssehne, unter constantem Winkel schneiden. Man bemerke ferner noch dies. Als *parallele* Linien wird man solche Linien bezeichnen, die sich unendlich weit, d. h. auf dem Fundamentalkegelschnitte schneiden. Der Winkel zweier paralleler Linien ist gleich Null. Aber es steht nichts im Wege, für ein Büschel paralleler Linien, indem man $c$ einen unendlich grossen Werth beilegt, eine *specielle* Massbestimmung einzuführen. Auf die Einführung einer solchen speciellen Massbestimmung kommt es hinaus, wenn wir in der gewöhnlichen, parabolischen Geometrie von einem Abstande*) zweier Parallelen reden.

## § 9.

## Ueber diejenigen linearen Transformationen der Ebene, welche an Stelle der Bewegungen treten.

Ein Kegelschnitt hat die Eigenschaft, durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen der Ebene in sich überzugehen. Denn es giebt achtfach unendlich viele lineare Transformationen in der Ebene und nur fünffach unendlich viele Kegelschnitte, so dass jeder Kegelschnitt in jeden anderen, und also auch in sich selbst, durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen übergeführt werden kann.

Bei einer solchen linearen Transformation der Ebene vertauschen sich die Punkte des Kegelschnittes unter sich, gerade so, wie bei einer linearen Transformation eines Grundgebildes erster Stufe, dessen Elemente unter einander vertauscht werden. Man wird hieraus schliessen, dass bei jeder solchen linearen Transformation zwei Punkte des Kegel-

*) Es ist dabei eine Besonderheit der parabolischen Geometrie, wenn der Abstand zweier Parallelen gleich ist dem Minimalabstande zweier auf ihnen beweglicher Punkte.

schnitts ungeändert bleiben. In der That, man betrachte die beiden Strahlbüschel $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ und $o(p_1', p_2', p_3' \ldots)$, welche von einem festen Punkte $o$ des Kegelschnitts nach beliebig gegebenen Punkten $p_1, p_2, p_3 \ldots$ desselben und nach denjenigen Punkten $p_1', p_2', p_3' \ldots$ hingehen, die aus letzteren vermöge einer linearen Transformation der Ebene, die den Kegelschnitt ungeändert lässt, entspringen. Die beiden Büschel sind projectivisch, denn $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ ist projectivisch mit $o'(p_1', p_2', p_3', \ldots)$, wo $o'$ den Punkt bezeichnet, in welchen $o$ bei der Transformation übergeht. Dieser Punkt $o'$ ist aber, wie $o$, ein Punkt des gegebenen Kegelschnittes, also ist $o'(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ projectivisch zu $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ und also letzteres auch zu $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$, w. z. b. Sind aber die beiden Büschel $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ und $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ projectivisch, so haben sie zwei Strahlen $o\pi_1$ und $o\pi_2$ entsprechend gemein, mithin giebt es zwei Punkte $\pi_1$, $\pi_2$ des Kegelschnittes, welche bei der Transformation ungeändert bleiben.

Bleiben aber zwei Punkte des Fundamentalkegelschnitts ungeändert, so auch deren Verbindungslinie, die Tangenten in ihnen und deren Durchschnitt, überhaupt also das von der Verbindungslinie und den Tangenten gebildete Dreieck. Unter Zugrundelegung dieses Dreiecks als Coordinatendreieck ist die Gleichung des Kegelschnittes von der Form:

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0 .$$

Die lineare Transformation, durch welche er in sich selbst übergeht, muss, da sie das Dreieck ungeändert lässt, von der Form sein:

$$x_1 = \alpha_1 y_1 \quad , \quad x_2 = \alpha_2 y_2 \quad , \quad x_3 = \alpha_3 y_3 .$$

Als Bedingung dafür, dass durch sie der Kegelschnitt ungeändert bleibt, kommt:

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = 0 ,$$

und da dies nur eine Bedingung für die drei homogenen $\alpha$ ist, so giebt es einfach unendlich viele lineare Transformationen, die das Dreieck und den Kegelschnitt ungeändert lassen.

Durch diese Transformationen bleibt der Quotient $\frac{x_1 x_2}{x_3^2}$ unabhängig von seinem Werthe ungeändert. Es gehen also durch die nämlichen Transformationen alle Kegelschnitte von der Form:

$$x_1 x_2 - k x_3^2 = 0$$

in sich über*).

Die hiermit näher bestimmten linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, zerfallen nun, sofern

---

*) Beiläufig bemerkt, sieht man hieraus: Nicht jede lineare Transformation führt einen Kegelschnitt in sich selbst über; steht aber die Transformation zu *einem* Kegelschnitte in dieser Beziehung, so gleich zu unendlich vielen.

sie reell sind, in zwei Gruppen. *Die Transformationen der ersten Gruppe können durch Wiederholung einer reellen, unendlich kleinen Transformation derselben Art erzeugt werden, die der zweiten nicht.*

Ist beispielsweise der Fundamentalkegelschnitt reell, ebenso die beiden festbleibenden auf ihm befindlichen Punkte $\pi_1$ und $\pi_2$, so hat man eine Transformation der ersten oder zweiten Gruppe, jenachdem $\alpha_3 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ oder $\alpha_3 = -\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. Im letzteren Falle wird die Strecke $\pi_1 \pi_2$ von je zwei entsprechenden Punkten des Kegelschnitts getrennt, im ersteren nicht.

Die Transformationen der ersten Gruppe, durch die der Fundamentalkegelschnitt ungeändert bleibt, sind es nun, welche als *Bewegungen* der Ebene bezeichnet sein sollen. Dieselben gehen nämlich in den Cyclus der wirklichen Bewegungen der Ebene über, wenn wir den Fundamentalkegelschnitt in der Art passend particularisiren, dass die auf ihn gegründete Massbestimmung in die wirklich angewandte übergeht*).

Bei dieser Definition können wir den eben bewiesenen Satz, dass durch jede lineare Transformation, durch die der gegebene Kegelschnitt in sich übergeht, unendliche viele Kegelschnitte ungeändert bleiben, so aussprechen:

*Bei einer Bewegung der Ebene geht nicht nur der Fundamentalkegelschnitt, sondern jeder Kegelschnitt (jeder Kreis) in sich über, welcher ihn in den beiden fest bleibenden Punkten berührt.*

Unter diesen Kegelschnitten findet sich namentlich auch der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, der gemeinsames Centrum der Kreise ist. Wir wollen die Bewegung als eine *Rotation der Ebene um dieses Centrum* bezeichnen.

Dann haben wir den Satz:

*Jede Bewegung der Ebene besteht in einer Rotation um einen Punkt. Alle anderen Punkte beschreiben um diesen Punkt als Centrum herumgelegte Kreise.*

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass bei der Bewegung die Polare des Rotationscentrums dualistisch dieselbe Rolle spielt, wie das Centrum, dass also bei unserer Massbestimmung Bewegung ein sich selbst dualistischer Begriff ist. Diese Dualität wird erst aufgehoben, wenn wir, um zur parabolischen Geometrie zu gelangen, den fundamentalen Kegelschnitt undualistisch particularisiren.

---

**) Die andere Classe von Transformationen des Kegelschnittes in sich selbst liefert bei diesem Uebergange diejenigen Transformationen der Ebene, welche aus ebenen Figuren beliebig gelegene, invers congruente machen.

Unter den Bewegungen der Ebene giebt es noch einen ausgezeichneten Fall, der dann eintritt, wenn das Centrum der Rotation unendlich weit, d. h. auf den Fundamentalkegelschnitt rückt.

Die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Ebene beschrieben werden, sind dann Kegelschnitte, die den fundamentalen Kegelschnitt im Centrum vierpunktig berühren. Diejenige Art der Bewegung, welche dieser Annahme bei der gewöhnlichen Massbestimmung entspricht, bezeichnet man als *Translation* *).

Es ist nun ersichtlich, dass, wenn man Bewegungen der Ebene so definirt, wie vorstehend geschehen, dann der Satz gilt:

*Bei den Bewegungen der Ebene bleiben die Massverhältnisse ungeändert.*

Denn da bei einer Bewegung der Fundamentalkegelschnitt in sich übergeht, so wird bei derselben das Doppelverhältniss zweier Punkte zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitte erhalten. Also auch der mit einer Constanten multiplicirte Logarithmus des Doppelverhältnisses, d. h. die Entfernung der beiden Punkte. Aehnlich ist es mit dem Winkel zweier Geraden.

Es gilt dies nicht nur für die Bewegungen der Ebene, sondern auch, und aus demselben Grunde, bei den Transformationen zweiter Art, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen.

Es gilt ferner etwas Aehnliches bei denjenigen reciproken (dualistischen) Transformationen, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen, namentlich für die durch denselben begründete Polar-Reciprocität. Denn zwei Punkten und den Durchschnittspunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitt, die ein gewisses Doppelverhältniss besitzen, entsprechen bei diesen Transformationen zwei Linien und die beiden von deren Durchschnittspunkte an den Fundamentalkegelschnitt gehenden Tangenten, welche dasselbe Doppelverhältniss mit einander bilden. Nehmen wir also die beiden Constanten $c$ und $c'$ (§ 8.) der beiden Massbestimmungen gleich, so haben wir den Satz:

*Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel der ihnen entsprechenden Geraden, und umgekehrt;*
insbesondere:

*Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel ihrer Polaren.*

---

*) Eine durch die Particularisation des Fundamentalkegelschnitts herbeigeführte Besonderheit ist er, wenn bei der parabolischen Geometrie die Translationen ein geschlossenes System bilden und je zwei Translationen vertauschbar sind.

Wir werden hier diese Sätze nicht weiter benutzen, und nur noch im folgenden Paragraphen auf den letzten derselben zurückkommen. Unter ihn subsumirt sich nämlich der Satz aus der Geometrie der Kugel: dass sich die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks beim Uebergange zum Polardreiecke vertauschen*).

## § 10.

## Die allgemeine projectivische Massbestimmung im Strahlen- und Ebenenbüschel.

In ganz ähnlicher Weise, wie in den beiden vorigen Paragraphen eine allgemeine projectivische Massbestimmung für die Ebene aufgestellt wurde, wird man eine solche für das andere Grundgebilde zweiter Stufe, den Punkt (aufgefasst als Ebenen- und Strahlenbündel), aufstellen können. Bei derselben wird man statt des fundamentalen Kegelschnittes einen *fundamentalen Kegel zweiten Grades* benutzen. Als Winkel zweier Geraden, die sich im Mittelpunkte des Kegels schneiden, ist der mit einer Constanten $c$ multiplicirte Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses anzusehen, welches die beiden Geraden mit den beiden Erzeugenden des Kegels bilden, die mit ihnen in einer Ebene liegen; als Winkel zweier durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen der mit einer (anderen) Constanten $c'$ multiplicirte Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden Ebenen zu denjenigen beiden Tangentenebenen des fundamentalen Kegels, welche durch ihren Durchschnitt gehen.

Der analytische Ausdruck dieser Massbestimmung ist genau derselbe, wie derjenige, der oben für die Massbestimmung in der Ebene aufgestellt wurde. Man hat nur den Coordinaten $(x)$, $(y)$ bez. $(u)$, $(v)$ in der Ebene die Bedeutung von Strahlen- und Ebenencoordinaten im Punkte zu geben. Auch alle anderen für die Ebene ausgeführten Entwickelungen lassen sich ohne Weiteres auf den Punkt übertragen, welche Andeutung hier genügen soll.

Es ist nun leicht zu sehen, dass sich die gewöhnliche Massbestimmung im Punkte**), d. h. die gewöhnliche Art und Weise, Winkel von Geraden oder Ebenen, die durch einen Punkt gehen, zu messen, als specieller Fall unter diese allgemeine Massbestimmung subsumirt. *Dieselbe benutzt als fundamentalen Kegel zweiten Grades den Kegel,*

---

*) Vergl. Cayley, l. c.

**) Man spricht gewöhnlich nicht von der Massbestimmung im Punkte, sondern von der Massbestimmung auf einer um ihn als Centrum herumgelegten Kugel (vom Radius 1). Im Texte ist die erstere Ausdrucksweise vorzuziehen, da der Punkt

*der vom Punkte sich nach dem unendlich weit entfernten imaginären Kreise*) erstreckt; sie setzt überdies die beiden Constanten c und c' gleich* $\frac{\sqrt{-1}}{2}$**).

Denn auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, ist der Kegel, welcher von dem Punkte nach dem unendlich fernen imaginären Kreise hingeht, dargestellt durch:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

oder in Ebenencoordinaten durch:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Für den Winkel, den zwei gerade Linien mit den Coordinaten $(x, y, z)$, $(x', y', z')$ bez. zwei Ebenen $(u, v, w)$, $(u', v', w')$ mit einander bilden, erhalten wir also nach den Formeln des § 8., indem wir noch $c = c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzen, bez.:

$$\text{arc cos} \cdot \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

und:

$$\text{arc cos} \cdot \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

und dies ist die gewöhnliche Winkelbestimmung. — Die Polare einer durch den Punkt gehenden Ebene mit Bezug auf den fundamentalen Kegel ist deren Senkrechte. Der letzte Satz des vorigen § geht also jetzt in den Satz über: Der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel ihrer Normalen. Auf diesem Satze beruht das in der sphärischen Geometrie angewandte Princip, nach welchem in einem sphärischen Dreiecke und seinem Polardreiecke die Massverhältnisse dualistisch dieselben sind, d. h. dieselben sind, wenn man die Seiten mit den Winkeln vertauscht.

---

das einfache Grundgebilde ist, mit dem die projectivische Geometrie operirt. Dabei ist ein Unterschied nicht zu übersehen, der auch schon auftritt, wenn man statt von der Massbestimmung im Strahlbüschel von der Massbestimmung auf dem Kreise spricht. Jeder durch den Punkt hindurchgehenden Geraden (jedem Strahle des Büschels) entsprechen *zwei* Punkte der Kugel (des Kreises). Dadurch wird für die Massbestimmung auf der Kugel (dem Kreise) noch ein Unterschied geschaffen, der hier nur unnöthigerweise compliciren würde.

*) Bei der elliptischen und hyperbolischen Geometrie muss statt dessen gesetzt werden: den Tangentenkegel, der sich von dem Punkte nach der unendlich fernen Fläche zweiten Grades erstreckt.

**) Dies ist diejenige Annahme der Constanten, welche Cayley immer in Anwendung bringt.

## § 11.

## Die Massbestimmung in der Ebene bei imaginärem Fundamentalkegelschnitte. Die elliptische Geometrie.

Die gewöhnliche Massbestimmung im Punkte ist ein Bild dafür, wie sich überhaupt die projectivische Massbestimmung in Punkt und Ebene stellt, wenn der fundamentale Kegel, resp. der fundamentale Kegelschnitt imaginär ist. Die einzige bei der gewöhnlichen Massbestimmung im Punkte hinzutretende Particularisation ist, dass die beiden Constanten $c$ und $c'$ gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ gesetzt werden. Hätten wir sie allgemeiner gleich $c_1\sqrt{-1}$ und $c_1'\sqrt{-1}$ gesetzt, so würden die Massunterschiede nur um Factoren $2c_1$, $2c_1'$ gewachsen sein:

$$2c_1 \, . \, \text{arc cos} \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \, . \, \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

und

$$2c_1' . \, \text{arc cos} \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2} \, . \, \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}},$$

Ausdrücke, an welche man ohne Weiteres dieselben Entwickelungen anknüpfen kann, wie an die ursprünglichen.

Ist also in der Ebene ein imaginärer Fundamentalkegelschnitt gegeben, so ist die Länge jeder reellen Linie endlich, ebenso die Summe der Winkel im Strahlbüschel. Behalten wir die Bezeichnung $c_1$ und $c_1'$ für die durch $i$ dividirten Constanten $c$ und $c'$ bei*), so ist die Länge der geraden Linie gleich $2c_1\pi$, die Summe der Winkel im Büschel gleich $2c_1'\pi$.

Es giebt weder reelle unendlich ferne Punkte, noch reelle Linien, welche mit anderen unendlich grosse Winkel bilden. Sodann werden sich auch alle Relationen zwischen den Winkeln von Linien und von Ebenen, die durch einen Punkt gehen, auf die Abstände von Punkten und die Winkel von Geraden in der Ebene übertragen, wenn man nur vorher die Abstände durch $2c_1$, die Winkel durch $2c_1'$ dividirt. *Die ebene Trigonometrie unter Zugrundelegung dieser Massbestimmung wird also sein wie die sphärische Trigonometrie*, nur mit dem Unterschiede, dass man statt der Seiten der Dreiecke und ihrer Winkel die durch $2c_1$ dividirten Seiten und die durch $2c_1'$ dividirten Winkel in die Formeln einzuführen hat.

---

*) $c$ und $c'$ sind in der That rein imaginär zu nehmen, aus demselben Grunde, aus dem in § 5. die Constante $c$ bei imaginären Fundamentalelementen imaginär gesetzt wurde.

Die hiermit geschilderte Massbestimmung in der Ebene ist nun gerade diejenige, welche die *elliptische* Geometrie anzunehmen hat. Man wird bei ihr noch insbesondere, damit die Winkelsumme im Büschel gleich $\pi$ sind, die Constante $c_1'$, wie bei der gewöhnlichen Massbestimmung im Punkte, gleich $\frac{1}{2}$ setzen. Die Winkelsumme im ebenen Dreiecke ist dann, wie beim sphärischen Dreiecke, grösser als $2\pi$, und wird nur gleich $2\pi$ beim unendlich kleinen Dreiecke u. s. f.

Man hat hiernach ein Bild für den planimetrischen Theil der elliptischen Geometrie, wenn man sich in der Ebene einen imaginären Kegelschnitt willkürlich gegeben denkt und auf ihn eine projectivische Massbestimmung gründet. Beispielsweise wähle man für den Kegelschnitt denjenigen, in welchem die Ebene von dem Kegel geschnitten wird, der von einem bestimmten Punkte des Raumes nach dem unendlich fernen imaginären Kreise hingeht. Sodann setze man $c$ und $c'$ gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$. So ist die Entfernung zweier Punkte oder der Winkel zweier Geraden der Ebene gleich dem Winkel, unter welchem die beiden Punkte, bez. die beiden Geraden von dem gewählten Punkte aus erscheinen. — Andererseits: ist die uns thatsächlich gegebene Massgeometrie die elliptische, so bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene einen imaginären Kegelschnitt, und die elliptische Geometrie fällt mit der auf diesen Kegelschnitt gegründeten projectivischen Massbestimmung zusammen.

## § 12.

### Die Massbestimmung in der Ebene bei reellem Fundamentalkegelschnitt. Die hyperbolische Geometrie.

Wir wollen uns jetzt in der Ebene einen reellen Fundamentalkegelschnitt gegeben denken. Es wird dies zu einer Massbestimmung führen, die für die Punkte innerhalb des Fundamentalkegelschnittes mit den Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie übereinkommt.

Ist der fundamentale Kegelschnitt reell, so zerfallen die reellen Punkte und Geraden der Ebene, jede für sich, in zwei Classen. Es giebt Punkte, von denen aus sich zwei reelle, und solche, von denen aus sich keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt legen lassen. Die ersteren bezeichnet man als die Punkte ausserhalb, die letzteren als die Punkte innerhalb des Kegelschnittes. Analog zerfallen die Geraden in zwei Gruppen, in solche, welche den Kegelschnitt in zwei reellen, und in solche, welche ihn in zwei imaginären Punkten schneiden.

Des Zusammenhangs mit der hyperbolischen Geometrie wegen wollen wir uns auf die Betrachtung der Punkte innerhalb des Kegelschnittes und der durch sie hindurchgehenden Geraden beschränken.

Keins der Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in den von uns betrachteten Raum fallen, hat reelle unendlich ferne Elemente. Desswegen soll die Constante $c'$ rein imaginär, $= c_1' i$, genommen werden. Die Winkelsumme in einem beliebigen Büschel, dessen Mittelpunkt innerhalb des fundamentalen Kegelschnittes liegt, ist dann $2 c_1' \pi$.

Dagegen hat jede Gerade, welche das von uns betrachtete Gebiet durchsetzt, zwei reelle (logarithmisch) unendlich ferne Punkte: ihre Durchschnittspunkte mit dem Fundamentalkegelschnitt. Desshalb werden wir der Constanten $c$ einen reellen Werth beilegen.

Bei dieser Festsetzung der Constanten $c$ und $c'$ haben alle Punkte, welche innerhalb des Kegelschnittes liegen, einen reellen Abstand; ebenso bilden alle Geraden, die sich innerhalb des Kegelschnittes schneiden, mit einander einen reellen Winkel. Aber der Abstand zweier Punkte, die durch den Fundamentalkegelschnitt getrennt werden, ist imaginär. Der Fundamentalkegelschnitt ist der Ort der unendlich fernen Punkte. Zwei Gerade, die durch das Innere des Kegelschnittes verlaufen, aber sich ausserhalb desselben schneiden, bilden einen imaginären Winkel. Zwischen ihnen und den Geraden, die sich innerhalb schneiden, bilden diejenigen den Uebergang, deren Schnittpunkt auf den fundamentalen Kegelschnitt, also unendlich weit fällt, d. h. diejenigen Linien, welche parallel (§ 8.) sind. Ihr Winkel ist gleich Null.

Wir wollen uns jetzt denken, dass wir uns an irgend einer Stelle im Inneren des Fundamentalkegelschnittes befänden und dass wir uns auf der Ebene nur vermöge derjenigen linearen Transformationen bewegen könnten, die den fundamentalen Kegelschnitt ungeändert lassen, (vergl. § 5., § 9.). Wir werden uns dann, wie bei unserer gewöhnlichen Massbestimmung, um uns selbst drehen können und nach endlicher Drehung in die Anfangslage zurückkommen, wir werden ebenfalls, wie bei der gewöhnlichen Massbestimmung, auf der geraden Linie nach der einen oder anderen Seite unausgesetzt fortschreiten können. *Aber wir werden nie den fundamentalen Kegelschnitt erreichen, geschweige denn überschreiten.* Wir sind also in das Innere des Kegelschnittes festgebannt; der Kegelschnitt begrenzt für uns die Ebene; ob jenseits desselben noch ein Stück der Ebene vorhanden ist oder nicht, würden wir nicht sagen können. Ein Beobachter, der, mit der gewöhnlichen Massbestimmung ausgerüstet, uns auf den fundamentalen Kegelschnitt zuschreiten sähe, während wir die Bewegung gemäss der neuen Massbestimmung mit constanter Geschwindigkeit ausführen, würde bemerken, wie wir (von einer gewissen Stelle an) zusehens immer langsamer vorwärts kämen und die uns gegebene Grenze, den Fundamentalkegelschnitt, nie erreichten.

Die hiermit geschilderte Massgeometrie *entspricht nun durchaus*

*den Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie*, wenn wir noch die einstweilen unbestimmt gebliebene Constante $c_1'$ gleich $\frac{1}{2}$ setzen, damit die Winkelsumme im Strahlbüschel gleich $\pi$ wird. Betrachten wir, um uns davon zu überzeugen, einige der Propositionen der hyperbolischen Geometrie etwas näher (dieselben sollen in Anführungszeichen aufgeführt werden).

„Durch einen Punkt der Ebene giebt es zu einer gegebenen Geraden zwei Parallele, d. h. Linien, welche die gegebene Gerade in unendlich fernen Punkten schneiden.“ Es sind dies die beiden Verbindungslinien des Punktes mit den beiden Schnittpunkten der gegebenen Geraden und des Fundamentalkegelschnittes.

„Die Neigung der beiden Parallelen, die durch einen Punkt zu einer Geraden gezogen werden können, nimmt bei zunehmender Entfernung des Punktes von der Geraden zu. Rückt der Punkt unendlich weit, so wird dieselbe gleich $\pi$, d. h. in anderem Sinne gerechnet, die beiden Parallelen bilden einen Winkel gleich Null“. In der That, wenn der Punkt auf den Fundamentalkegelschnitt rückt, so schliessen die beiden Parallelen, wie überhaupt zwei Gerade, die sich auf dem Fundamentalkegelschnitt schneiden, einen Winkel gleich Null ein. Daher auch der Satz: „Der Winkel zwischen einer Geraden und jeder ihrer Parallelen ist gleich Null“. — Dass auch für nicht unendlich ferne Punkte der „Winkel des Parallelismus,“ den die hyperbolische Geometrie aufstellt, sich bei unserer projectivischen Massbestimmung wiederfindet, mag man daraus ersehen, dass, wie gleich gezeigt werden soll, überhaupt die trigonometrischen Formeln in beiden Fällen übereinstimmen.

„Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als $2\pi$; für ein Dreieck mit unendlich fernen Ecken ist die Winkelsumme gleich Null.“ Das letztere folgt daraus, dass diese Ecken des Dreiecks nothwendig auf dem Fundamentalkegelschnitt liegen, und je zwei Linien, die sich in einem Punkte des Fundamentalkegelschnittes schneiden, einen Winkel gleich Null einschliessen. Die allgemeine Giltigkeit des ersteren Satzes, der dadurch wahrscheinlich gemacht wird, dass für unendlich grosse Dreiecke die Winkelsumme 0, für unendlich kleine gleich $2\pi$ ist, folgt aus den noch näher anzugebenden trigonometrischen Formeln.

„Zwei Perpendikel, auf einer Geraden errichtet, schneiden sich nicht.“ Bei uns schneiden sie sich allerdings, nämlich in dem Pole der Geraden. Aber dieser liegt in dem Raume ausserhalb des Kegelschnittes, von dessen Existenz wir durch unsere Bewegungen nichts wissen können. Einen solchen Raum können wir uns aber — und das geschieht auch in der hyperbolischen Geometrie — als einen *idealen*

Raum *) adjungiren; ganz in demselben Sinne, wie man in der parabolischen Geometrie den wirklich vorhandenen Elementen der Ebene eine (uneigentliche) unendlich ferne Gerade hinzufügt. Ueber die Existenz des idealen Raumstückes wird damit gar nichts ausgesagt; wir gebrauchen den Ausdruck nur als einen in sich nicht widersprechenden und bequemen Terminus.

„Ein Kreis mit unendlich grossem Radius ist von einer Geraden verschieden." Ein Kreis mit unendlich grossem Radius bedeutet bei uns einen Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt vierpunktig berührt. Dagegen würde die Gerade, d. h. eine Gerade, die durch das von uns betrachtete Innere des Kegelschnittes geht, ein Kreis sein, dessen Centrum (der Pol der Geraden) in das ideale Gebiet der Ebene fällt, und dessen Radius einen imaginären Werth hat. —

Wir wollen uns noch eine Vorstellung davon machen, wie sich die Ebene in sich transformirt, wenn sie um einen unendlich fernen oder einen idealen Drehpunkt rotirt (§ 9.). Im ersteren Falle beschreiben alle Punkte Kegelschnitte, die sich in unendlicher Entfernung vierpunktig berühren. Im zweiten Falle beschreiben sie Kegelschnitte, welche den fundamentalen Kegelschnitt in zwei reellen Punkten berühren. Unter ihnen befindet sich eine im Endlichen gelegene Gerade, die Polare des idealen Drehpunktes. Diese Gerade verschiebt sich in sich; aber die übrigen Punkte beschreiben nicht etwa, entsprechend den Vorstellungen der parabolischen Geometrie, parallele Gerade, sondern (in der Nähe der Geraden flachgestreckte) Kegelschnitte, die den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnittspunkten mit der ausgezeichneten Geraden berühren.

Was nun endlich die *trigonometrischen Formeln* angeht, die bei unserer jetzigen Massbestimmung gelten, so erhält man dieselben unmittelbar durch die folgende Ueberlegung. In § 11. haben wir gesehen, dass, bei Zugrundelegung eines imaginären Kegelschnittes in der Ebene und bei der Annahme der Constanten $c = c_1 i$, $c' = c_1' i = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ für die Ebene eine Trigonometrie gilt, deren Formeln sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, wenn man statt der Seiten die Seiten, dividirt durch $2c_1$, einführt. Ein Gleiches wird nun auch gelten, wenn ein reeller Kegelschnitt zu Grunde gelegt wird. Denn die Geltung der Formeln der sphärischen Trigonometrie beruht doch auf analytischen Identitäten, die unabhängig sind von der Frage nach der Art des zu Grunde gelegten fundamentalen Kegelschnittes. Der einzige Unterschied, der nun, gegenüber

*) Man vergl. hierzu namentlich die Auseinandersetzungen, welche Herr Battaglini gegeben hat: *Sulla geometria imaginaria di Lobatchefsky.* Giornale di Matematiche. t. V. 1867.

dem früheren Falle, eintritt, ist, dass $c_1 = \frac{c}{i}$ nunmehr imaginär geworden ist.

*Die trigonometrischen Formeln, welche bei unserer jetzigen Massbestimmung gelten, ergeben sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man statt der Seiten die Seiten, dividirt durch* $\frac{c}{i}$, *einführt.*

Das ist aber dieselbe Regel, nach welcher man in der hyperbolischen Geometrie die trigonometrischen Formeln aufstellt. Die Constante $c$ ist die in der hyperbolischen Geometrie vorkommende charakteristische Constante. Man kann sagen, dass die Planimetrie sich nach der Annahme der hyperbolischen Geometrie so gestaltet, wie die Geometrie auf einer Kugel mit dem imaginären Radius $\frac{c}{i}$.

Für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie erhalten wir nach dem Vorstehenden sofort ein Bild, wenn wir einen beliebigen reellen Kegelschnitt hinzeichnen und auf ihn eine projectivische Massbestimmung gründen. Umgekehrt: ist die uns thatsächlich gegebene Massbestimmung von der Art, wie sie sich die hyperbolische Geometrie vorstellt, so bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene einen reellen uns umschliessenden Kegelschnitt, und ist die hyperbolische Geometrie nichts Anderes, als die auf diesen Kegelschnitt gegründete projectivische Massbestimmung.

## § 13.

## Die specielle Massbestimmung in der Ebene. Die parabolische Geometrie.

Die Massbestimmung der parabolischen Geometrie ist unter den bis jetzt betrachteten nicht mit enthalten, da sie keinen eigentlichen Kegelschnitt als fundamentales Gebilde benutzt. Vielmehr subsumirt sie sich unter einen Grenzfall der seither betrachteten allgemeinen Massbestimmung, der dann entsteht, wenn der fundamentale Kegelschnitt sich in ein Punktepaar auflöst. Dieses fundamentale Punktepaar ist bei der parabolischen Geometrie imaginär; *es sind die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte.*

Ein imaginäres Punktepaar kann, wie hier beiläufig auseinandergesetzt werden mag, als Uebergang eines reellen Kegelschnittes zu einem imaginären angesehen werden, und stellt sich desswegen auch die parabolische Geometrie als Uebergangsfall zwischen die hyperbolische und die elliptische. Sei beispielsweise eine Hyperbel gegeben, deren (imaginäre) Nebenaxe einen festen Werth hat, während die Hauptaxe von einer gegebenen Grösse an allmählich gegen Null ab-

nimmt und dann imaginär wird. An der Grenze Null fallen die beiden Aeste der Hyperbel in eine doppeltzählende Gerade, die Nebenaxe, zusammen. Diese Linie vertritt den Kegelschnitt, insofern er durch Punkte erzeugt war. Aber sofern er von Linien umhüllt war, ist er in zwei conjugirt imaginäre Punkte ausgeartet, welche im Abstande der constant gebliebenen Nebenaxe auf der doppelt zählenden Geraden liegen. Alle Tangenten des Kegelschnittes sind beim Grenzübergange imaginär geworden bis auf die eine Gerade, die jetzt den ganzen Kegelschnitt repräsentirt und die als Doppeltangente desselben aufzufassen ist. Wird sodann auch die Hauptaxe imaginär, so enthält der Kegelschnitt überhaupt keine reellen Elemente mehr.

Doch wir wollen zunächst allgemein eine solche Massbestimmung in der Ebene betrachten, die statt eines fundamentalen Kegelschnittes ein Punktepaar benutzt. Eine solche Massbestimmung soll eine *specielle* Massbestimmung heissen, im Gegensatze zu der bis jetzt betrachteten *allgemeinen*. Es versteht sich von selbst, dass man statt der Ausartung des Kegelschnittes in ein Punktepaar auch die Ausartung desselben in ein Linienpaar betrachten könnte; wenn wir uns hier auf die erste beschränken und ihr einen besonderen Namen geben, so geschieht dies, weil sie es ist, die unter sich die parabolische Geometrie begreift.

Wenn der fundamentale Kegelschnitt in ein Punktepaar ausartet, so bleibt die Bestimmung des Winkels ähnlich wie im allgemeinen Falle. Jedes Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt nicht gerade auf der Verbindungsgeraden der beiden Fundamentalpunkte, d. h. auf den fundamentalen Kegelschnitt fällt, hat zwei getrennte Fundamentalstrahlen, diejenigen beiden, welche durch die Fundamentalpunkte durchgehen. Dagegen wird die Bestimmung des Abstandes zweier Punkte jetzt wesentlich anders als in dem allgemeinen Falle. Da der Fundamentalkegelschnitt jetzt aus einer doppeltzählenden Geraden besteht, so schneiden ihn alle Geraden in zusammenfallenden Punktepaaren. Die auf ihnen zu messende Distanz wird also, so lange die Constante $c$ nicht einen unendlichen Werth bekommt, Null. Wir müssen, damit die Distanz endlich werde, $c$ einen unendlich grossen Werth ertheilen. Dann wird die Distanz gleichzeitig eine algebraische Function der Coordinaten. Aber die Vergleichbarkeit von Strecken und Winkeln, die bisher bestanden hatte, fällt fort; richtiger ausgesprochen: die Strecken sind nur noch unendlich kleinen Winkeln vergleichbar. Auch wenn wir $c$ einen unendlich grossen Werth ertheilen, bleibt die Entfernung solcher Punkte, deren Verbindungsgerade durch einen Fundamentalpunkt durchgeht, gleich Null. Denn diese Linien entsprechen den Tangenten des früheren Kegelschnittes. Einen Winkel gleich Null bilden solche Geraden, welche sich in einem Punkte der Verbindungsgeraden der beiden Fundamentalpunkte schneiden.

Als Kreise wird man diejenigen Kegelschnitte bezeichnen, welche durch die Fundamentalpunkte gehen; concentrische Kreise sind solche, die sich in den beiden Fundamentalpunkten berühren. Unter jedem Systeme concentrischer Kreise findet sich einer mit dem Radius $\infty$. Er ist in die doppeltzählende Verbindungsgerade der beiden Fundamentalpunkte ausgeartet. *Die unendlich fernen Punkte bilden also jetzt eine doppeltzählende Gerade.* Die Kreise haben nicht mehr, wie früher, eine sich selbst dualistische Bedeutung. Diejenigen Linien, welche eine gegebene Linie unter constantem Winkel schneiden, umhüllen nicht mehr einen eigentlichen Kreis, sondern einen unendlich fern liegendenden Punkt. Die Kreise mit unendlich fernem Centrum, welche den Fundamentalkegelschnitt im Centrum vierpunktig berührten, sind jetzt in die unendlich ferne Gerade und eine weitere Gerade zerfallen u. s. f. Alles das sind Dinge, die sich aus dem früher Aufgestellten durch Grenzübergang ohne Weiteres ergeben.

So wie wir nun unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes eine dreifach unendliche Schaar linearer Transformationen der Ebene als *Bewegungen* bezeichnen konnten, so auch hier. Nur genügt es nicht mehr, die Bewegungen als diejenigen linearen Transformationen (oder vielmehr als die eine Classe derselben) zu definiren, welche das fundamentale Gebilde ungeändert lassen. Denn ein Punktepaar geht nicht nur durch dreifach unendlich viele, sondern durch vierfach unendlich viele lineare Transformationen der Ebene in sich über. Unter ihnen aber sind dreifach unendlich viele dadurch ausgezeichnet, dass jede einzelne unter ihnen die Kreise eines concentrischen Büschels ungeändert lässt. Diese selbst zerfallen wieder in zwei dreifach unendliche Gruppen. Die eine Gruppe umfasst die Bewegungen, die andere diejenigen Transformationen der Ebene, welche ebene Figuren in invers congruente überführen. Die beiden Gruppen sind einfach dadurch zu trennen, dass die Bewegungen jeden einzelnen der beiden Fundamentalpunkte ungeändert lassen, während die anderen Transformationen die beiden Fundamentalpunkte unter einander vertauschen. Jede Bewegung der Ebene besteht in einer Rotation um einen Punkt. Wird die Bewegung eine Translation, d. h. rückt das Rotationscentrum unendlich weit, so beschreiben alle Punkte der Ebene parallele Gerade, d. h. Gerade, welche sich in demselben unendlich fernen Punkte schneiden. Es existirt jetzt der Begriff der *Richtung*; *parallele Gerade haben gleiche Richtung.* Die Bewegung hat den sich selbst dualistischen Charakter verloren, den sie im allgemeinen Falle besessen hatte. — Neben die Verwandtschaft der *Congruenz,* welche durch jede der dreifach unendlich vielen Bewegungen, und der *inversen Congruenz,* welche durch die dreifach unendlich vielen Transformationen der zweiten Gruppe entstand, stellt sich jetzt, dem vierfach unendlichen Cyclus

linearer Transformationen entsprechend, welche das Fundamentalgebilde zulässt, die Verwandtschaft *der directen und der inversen Aehnlichkeit.* Direct ist die Aehnlichkeit, wenn beide Fundamentalpunkte ungeändert bleiben, invers, wenn sich die beiden Punkte vertauschen. Bei der Aehnlichkeit bleiben alle Winkel ungeändert, während die Entfernungen in Multipla übergehen. Sei noch bemerkt, dass wir nunmehr durch die Bewegungen zu allen Punkten der Ebene hingelangen können, bis auf die Punkte der unendlich fernen Geraden. Ein ideales Gebiet, wie im Falle eines reellen Fundamentalkegelschnittes, giebt es nicht mehr, oder, wenn man will, es hat sich auf seine desswegen doppeltzählende Begrenzung zusammengezogen.

Die analytische Formel, welche jetzt die Entfernung zweier Punkte darstellt — und auf diese wollen wir uns beschränken — nimmt folgende Gestalt an. Sei $p_x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden, sei ferner $P_{xy} = 0$ die Bedingung, unter welcher die Verbindungslinie von $(x)$ und $(y)$ durch einen der beiden Fundamentalpunkte geht. So wird die Entfernung der beiden Punkte

$$= \frac{C\sqrt{P_{xy}}}{p_x \cdot p_y}.$$

*Die Entfernung zweier Punkte wird also eine algebraische Function ihrer Coordinaten.*

In der That wird man durch Grenzübergang von dem allgemeinen Ausdrucke der Entfernung zu dieser Formel geleitet. Der allgemeine Ausdruck lässt sich so schreiben:

$$2\,ic \text{ arc sin } \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}.$$

Zerfällt nun $\Omega = 0$ in ein Punktepaar, so wird $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}$ identisch Null, doch in der Art, dass es einen verschwindenden constanten Factor (die Discriminante) erhält. Sondert man diesen ab, so bleibt von $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}$ gerade noch $P_{xy}$ stehen, d. h. der Ausdruck, der, gleich Null gesetzt, die Bedingung ausdrückt, dass die Verbindungsgerade von $(x)$ und $(y)$ eine Tangente nunmehr des ausgearteten Kegelschnittes sei. Aber wegen des verschwindenden Factors können wir den Arcus Sinus dem Sinus selbst gleich setzen, und indem wir sodann den verschwindenden Factor mit $2\,ic$ zu einer neuen Constante $C$ vereinigen, endlich noch statt $\Omega_{xx}$, $\Omega_{yy}$ bez. $p_x^2$ und $p_y^2$ schreiben (da $p^2 = 0$ die Gleichung des ausgearteten Kegelschnittes in Punktcoordinaten ist), so kommt der vorstehend angegebene Ausdruck.

Aus ihm ergiebt sich der in der parabolischen Geometrie gewöhnliche Ausdruck der Entfernung zweier Punkte ohne Weiteres, wenn

man die beiden Fundamentalpunkte so bezeichnet, wie man gewöhnlich die beiden Kreispunkte darstellt. Die unendlich ferne Gerade hat bei der gewöhnlichen Bezeichnung die Gleichung: Constante $= 0$; es ist also $p_x = p_y$ gleich einer Constanten $k$. Die Kreispunkte auf ihr stellt man in rechtwinkligen Coordinaten als ihre Durchschnitte mit dem Linienpaare

$$x^2 + y^2 = 0$$

dar. Die Bedingung, dass zwei Punkte $(x, y)$ und $(x', y')$ so liegen, dass ihre Verbindungsgerade durch einen Kreispunkt geht, ist dann:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0 .$$

Folglich wird die Entfernung der beiden Punkte

$$= \frac{c}{k^2} \cdot \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Werden schliesslich statt der $x$ und $y$ solche Multipla derselben gesetzt, dass die Entfernung zweier Punkte auf der $x$-Axe bez. der $y$-Axe geradezu durch die Differenz der betr. Coordinaten vorgestellt ist, so kommt:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

der gewöhnliche Ausdruck für die Entfernung in rechtwinkligen Coordinaten.

Wir wollen hier nicht weiter erörtern, wie sich die Vorstellungen der parabolischen Geometrie mit ihren imaginären Grundpunkten in die vorhergegangenen allgemeinen Betrachtungen einordnen.*) Wir wollen nur hervorheben, dass bei imaginären Fundamentalpunkten die trigonometrischen Formeln in die betr. Formeln der parabolischen Geometrie übergehen, dass also die Winkelsumme im Dreiecke genau gleich $2\pi$ wird, während sie bei reellem Fundamentalkegelschnitt kleiner, bei imaginärem grösser war.

## § 14.

## Specielle Massbestimmung in der Ebene, welche eine allgemeine in einem Punkte berührt. Krümmung der letzteren.

So wie wir in § 7. eine specielle Massbestimmung auf der Geraden angeben konnten, welche mit einer gegebenen allgemeinen Massbestimmung in einem Punkte und in dessen Nähe übereinstimmte, welche, wie wir uns ausdrückten, die gegebene Massbestimmung in dem Punkte berührte, so werden wir auch in der Ebene von einer speciellen Massbestimmung reden können, welche eine allgemeine ge-

*) Vergl. Cayley, l. c.

gebene in einem Punkte berührt. Dieselbe wird (§ 7.) als unendlich ferne Gerade die Polare des gegebenen Punktes mit Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt der allgemeinen Massbestimmung benutzen, als Fundamentalpunkte die beiden Berührungspunkte der an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten. Dann stimmt für beide Massbestimmungen bei gehöriger Bestimmung der Constanten die Winkelbestimmung in dem gegebenen Punkte vollkommen überein, so wie, bis auf Grössen höherer Ordnung, die Bestimmung des gegenseitigen Abstandes aller von ihm unendlich wenig verschiedenen Punkte. Kreise, welche um den gegebenen Berührungspunkt in der allgemeinen Massbestimmung herumgelegt sind, d. h. also Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Fundamentalpunkten der tangirenden speciellen Massbestimmung berühren, sind auch Kreise mit Bezug auf letztere. Insbesondere wird der Fundamentalkegelschnitt selbst, der für die allgemeine Massbestimmung der Kreis mit unendlich grossem Radius ist, für die tangirende specielle Massbestimmung ein Kreis sein, aber ein Kreis mit endlichem Radius. Für die Grösse dieses Radius findet man die Constante $2c$. Denn auf jeder durch den gegebenen Berührungspunkt hindurchgehenden Geraden bestimmen die gegebene allgemeine und die tangirende specielle Massbestimmung zwei eben solche Massbestimmungen, die auch in dem Verhältnisse der Berührung stehen. Die Fundamentalpunkte der auf der Geraden getroffenen allgemeinen Massbestimmung sind aber die Durchschnitte der Geraden mit dem Fundamentalkegelschnitt. Deren Abstand, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung (§ 7.), ist aber gleich $4c$; deshalb der gesuchte Radius gleich $2c$.

Wir wollen nun insbesondere diejenigen beiden Fälle der allgemeinen Massbestimmung ins Auge fassen, die in § 11. und § 12. betrachtet wurden und die Bilder für die elliptische und hyperbolische Geometrie ergeben, dass nämlich entweder der Fundamentalkegelschnitt imaginär ist oder dass er reell ist und uns umschliesst.

Die in einem Punkte berührende specielle Massbestimmung hat in beiden Fällen imaginäre Fundamentalpunkte, da die Polare des Berührungspunktes den Fundamentalkegelschnitt nicht in reellen Punkten schneiden wird. Aber es findet dabei zwischen den beiden Arten allgemeiner Massbestimmung ein Unterschied statt, analog demjenigen, der in § 7. bei den betreffenden Massbestimmungen auf der geraden Linie eintrat. Ist der Fundamentalkegelschnitt imaginär, so eilt die specielle Massbestimmung der allgemeinen voran, d. h. die Entfernung eines Punktes vom Berührungspunkte, gemessen in der speciellen Massbestimmung, ist immer grösser als die Entfernung, gemessen in der gegebenen allgemeinen. Umgekehrt ist es bei reellem Fundamental-

kegelschnitt *): die specielle Massbestimmung bleibt hinter der allgemeinen zurück. Dieses Voraneilen, resp. Zurückbleiben der speciellen Massbestimmung soll als *Krümmung* der allgemeinen Massbestimmung bezeichnet werden, und zwar soll die Krümmung im ersten Falle eine *positive*, im zweiten eine *negative* genannt werden. Als *Mass der Krümmung* soll derselbe Ausdruck betrachtet werden, der nach § 7. die Krümmung der allgemeinen Massbestimmung auf einer durch den gegebenen Berührungspunkt laufenden Geraden angiebt, nämlich $-\frac{1}{4c^2}$. Dieser Ausdruck ist unabhängig von dem Berührungspunkte, den man ursprünglich gewählt hat, und von der Geraden, die man durch ihn hindurchgelegt hat. Wir haben also den Satz:

*Das Krümmungsmass der allgemeinen Massbestimmung ist in allen Punkten dasselbe, nämlich gleich* $-\frac{1}{4c^2}$.

*Dasselbe ist positiv bei imaginärem Fundamentalkegelschnitt (also bei der elliptischen Geometrie), es ist negativ bei reellem Fundamentalkegelschnitt (also bei der hyperbolischen Geometrie).*

Für den Uebergangsfall, dass der Fundamentalkegelschnitt in ein imaginäres Punktepaar ausartet (insonderheit für die parabolische Geometrie), wird das Krümmungsmass Null.

Es soll nun jetzt gezeigt werden, dass die hier aufgestellte Definition des Krümmungsmasses einer ebenen Massbestimmung mit derjenigen übereinstimmt, welche Gauss für das Krümmungsmass zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten aufgestellt hat. Es findet nur der Unterschied zwischen dem Begriffe des Krümmungsmasses, wie er hier und wie er bei Gauss auftritt, statt, dass bei Gauss das Krümmungsmass eine bleibende Eigenschaft des betreffenden geometrischen Gebildes ist, während es hier nur eine Eigenschaft der in dem gegebenen Gebilde, der Ebene, zufällig gewählten Massbestimmung ist.

Das Gauss'sche Krümmungsmass berechnet sich bekanntlich aus dem Ausdrucke für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Der betreffende Ausdruck ist hier zunächst aufzustellen. Sei $\Omega = 0$, wie immer, der Fundamentalkegelschnitt. $\Omega_{xx}$ habe die frühere Bedeutung. $\Omega_{x,dx}$, $\Omega_{dx,dx}$ sollen die Ausdrücke bezeichnen, die aus $\Omega_{x,y}$ und $\Omega_{yy}$ durch Einführung von Differentialien $dx$ an Stelle der $y$ entstehen. Nun war die Entfernung zweier Punkte $(x)$ und $(y)$

$$= 2ic \arcsin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

*) Dies gilt nur für die Punkte innerhalb des Fundamentalkegelschnittes; für die Punkte ausserhalb findet sowohl ein Voraneilen als ein Zurückbleiben statt, je nach der Richtung, in der man sich bewegt.

Setzt man $y_a = x_a + dx_a$, so wird dies unter Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung:

$$= 2\,ic \text{ arc sin } \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx,\,dx} - \Omega^2_{x,\,dx}}}{\Omega^2_{xx}},$$

oder, indem wir statt des Arcus Sinus des kleinen Argumentes den Sinus selbst setzen:

$$= 2\,ic\,\frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx,\,dx} - \Omega^2_{x,\,dx}}}{\Omega^2_{xx}}.$$

Das Quadrat des Bogenelementes wird also:

$$ds^2 = 4\,c^2 \cdot \frac{\Omega^2_{x,\,dx} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx,\,dx}}{\Omega^2_{xx}}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck durch eine besondere Coordinatenannahme auf eine einfachere Form bringen. Da nämlich der Fundamentalkegelschnitt für die berührende specielle Massbestimmung ein Kreis ist, da ferner in den hier betrachteten Fällen die Fundamentalpunkte der letzteren wie bei der gewöhnlichen parabolischen Massbestimmung imaginär sind, so wollen wir die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in der gewöhnlichen Form der Kreisgleichung schreiben:

$$x^2 + y^2 = 4\,c^2.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf Coordinaten $x$, $y$, die in der tangirenden speciellen Massbestimmung gemessen werden, denn der Radius des Fundamentalkreises, gemessen in der tangirenden speciellen Massbestimmung, ist, wie in der vorstehenden Gleichung angenommen, gleich $2\,c$.

Nunmehr wird:

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 - 4\,c^2, \qquad \Omega_{dx,\,dx} = dx^2 + dy^2,$$
$$\Omega_{x,\,dx} = x\,dx + y\,dy.$$

Also der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = 4\,c^2\,\frac{(x\,dx + y\,dy)^2 - (x^2 + y^2 - c^2)\,(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4\,c^2)^2}$$
$$= 4\,c^2\,\frac{-(y\,dx - x\,dy)^2 + 4\,c^2\,(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4\,c^2)^2}.$$

Führt man jetzt neue Veränderliche ein (Polarcoordinaten der speciellen Massbestimmung), indem man setzt:

$$x = r\,.\cos\varphi, \qquad y = r\,.\sin\varphi,$$

so wird:

$$ds^2 = \frac{16\,c^4\,dr^2}{(r^2 - 4\,c^2)^2} - \frac{4\,c^2 r^2\,d\varphi^2}{r^2 - 4\,c^2},$$

ein Ausdruck, der in den gewöhnlichen Ausdruck des Bogenelementes

in Polarcoordinaten übergeht, wenn $c$ unendlich gross wird.*) Vergleicht man ihn mit der von Gauss zu Grunde gelegten Formel:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dr + G\,dr^2,$$

so verschwindet $F$, und $E$ und $G$ hängen nur von der einen Veränderlichen, etwa von $u$, ab. Unter dieser Voraussetzung ist aber das Gauss'sche Krümmungsmass $K$:

$$4\,E^2\,G^2 \,.\, K = E\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + G \cdot \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2\,EG\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Setzt man hier für $E$, $G$ ihre Werthe:

$$E = \frac{16\,c^4}{(u^2 - 4\,c^2)^2}, \qquad G = -\frac{4\,c^2 u^2}{u^2 - 4\,c^2},$$

so kommt:

$$K = -\frac{1}{4\,c^2},$$

*also derselbe Werth, den wir vorhin aufgestellt hatten.*

Wir können jetzt, Krümmungsmass im Gauss'schen Sinne aufgefasst, den Satz aussprechen:

*Je nachdem wir die elliptische, hyperbolische oder parabolische Geometrie annehmen, ist die Ebene eine Fläche von constantem positiven, von constantem negativen, oder von verschwindendem Krümmungsmasse.*

Desshalb findet auch (wie in § 1. erwähnt), unter Zugrundelegung der parabolischen Massbestimmung, die elliptische Geometrie ihre Interpretation auf der Kugel oder den aus derselben durch Deformation

---

*) Setzt man $r$ constant, so kommt:

$$ds = \frac{2\,cr}{\sqrt{4\,c^2 - r^2}} \cdot d\varphi\,.$$

Es wird also die Peripherie eines Kreises mit dem Radius $r$ gleich $\dfrac{4\,cr\pi}{\sqrt{4\,c^2 - r^2}}$.
Aber dieses $r$ bedeutet nur den Radius des Kreises, gemessen in der im Mittelpunkte tangirenden speciellen Massbestimmung. Den in der allgemeinen Massbestimmung gemessenen Radius $\varrho$ erhält man aus der Formel des Textes, indem man statt $ds$ $d\varrho$ schreibt, und $d\varphi$ gleich Null setzt, also:

$$d\varrho = \frac{-4\,c^2\,dr}{r^2 - 4\,c^2}$$

oder:

$$r = 2\,c \cdot \frac{e^{\frac{\varrho}{c}} - 1}{e^{\frac{\varrho}{c}} + 1}.$$

Setzt man dies für $r$ ein, so erhält man die Peripherie des Kreises mit dem Radius $\varrho$ gleich:

$$2\,c\pi\left(e^{\frac{\varrho}{2c}} - e^{-\frac{\varrho}{2c}}\right),$$

eine Formel, welche Gauss in einem Briefe an Schumacher anführt. Die Constante $k$, welche er dort benutzt, entspricht geradezu der hier gebrauchten Constante $c$.

entspringenden Flächen, die hyperbolische Geometrie auf den Flächen von constantem negativen Krümmungsmasse.

## § 15.

## Das gegenseitige Verhältniss der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Geometrie in der Ebene.

In dem Vorstehenden haben wir gesehen, wie sowohl diejenige Massbestimmung, welche die parabolische, als diejenige, welche die elliptische oder hyperbolische Geometrie in der Ebene voraussetzt, in der allgemeinen projectivischen ebenen Massbestimmung als specielle Fälle enthalten sind. Die parabolische Geometrie benutzt als fundamentalen Kegelschnitt ein imaginäres Punktepaar, die sogenannten unendlich weiten*) imaginären Kreispunkte. Der Ort der unendlich fernen Punkte ist eine doppeltzählende Gerade. Die elliptische Geometrie bezieht sich auf einen eigentlichen Fundamentalkegelschnitt, der aber imaginär ist. Die hyperbolische Geometrie endlich hat gleich der elliptischen einen eigentlichen Fundamentalkegelschnitt, der aber reell ist (und uns umschliesst).

In der Nähe eines Punktes, den wir gerade betrachten, kommen alle drei Geometrieen, mag nun die thatsächlich vorhandene Massbestimmung parabolisch oder elliptisch oder hyperbolisch sein, miteinander überein. Sie berühren sich also in dem betreffenden Punkte; die parabolische Geometrie giebt die specielle tangirende Massbestimmung für die elliptische wie für die hyperbolische Geometrie.

Ist uns also die parabolische Geometrie thatsächlich gegeben, so können wir ohne Weiteres eine Geometrie construiren, die uns ein Bild für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie ist, indem wir eine allgemeine Massbestimmung mit reellem Fundamentalkegelschnitt construiren, welche die gegebene specielle in dem Punkte, den wir betrachten, berührt. Wir erreichen dies, indem wir um den Punkt, den wir gerade ins Auge fassen, einen Kreis mit dem Radius $2c$ beschreiben und auf ihn eine projectivische Massbestimmung mit der Constanten $c$ zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte und der Constanten $c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ zur Bestimmung des Winkels zweier Geraden gründen. Diese allgemeine Massbestimmung schliesst sich um so genauer an die gegebene parabolische an, je grösser $c$ ist; sie fällt mit ihr zusammen, wenn $c$ unendlich wird.

---

*) Diese Punkte unendlich weit zu nennen, ist eigentlich unberechtigt, da ihre Entfernung von einem beliebig im Endlichen gelegenen Punkte nicht unendlich, sondern unbestimmt ist, weil ja alle um einen solchen Punkt herum gelegten Kreise dieselben enthalten.

Auf ganz ähnliche Weise construiren wir eine Geometrie, die uns versinnlicht, wie sich die elliptische Geometrie des Näheren gestalten würde. Zu dem Zwecke ist nur dem $c$, welches wir eben benutzten, ein rein imaginärer Werth $= c_1 i$ beizulegen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir in der Entfernung $2c_1$ über dem Berührungspunkte einen Punkt festlegen, und als Entfernung zweier Punkte der Ebene den mit $c_1$ multiplicirten Winkel betrachten, unter welchem die beiden Punkte von dem festen Punkte aus erscheinen. Der Winkel zweier Geraden der Ebene ist geradezu gleich dem Winkel zu nehmen, unter dem sie von dem festen Punkte aus gesehen werden. Die so entstehende Massbestimmung schliesst sich wieder um so genauer an die gegebene parabolische an, je grösser $c_1$ ist, und geht, wenn $c_1$ unendlich wird, geradezu in die parabolische über.

Aber auch, wenn die elliptische oder die hyperbolische Geometrie die thatsächlich gegebenen wären, würde man auf diese Weise sich ein Bild davon machen können, welche Vorstellungen die parabolische oder bezüglich die hyperbolische und elliptische Geometrie mit sich führen.

Es bleibt uns nun nur noch übrig, die bis jetzt allein für die Grundgebilde erster und zweiter Stufe auseinander gesetzten Dinge auf den Raum zu übertragen, was noch in möglichster Kürze geschehen soll.

## § 16.

## Die projectivische Massbestimmung im Raume.

Der allgemeinen projectivischen Massbestimmung im Raume wird man eine beliebig anzunehmende *fundamentale Fläche zweiten Grades* zu Grunde legen.

Um dann die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, verbinde man sie durch eine gerade Linie. Dieselbe trifft die fundamentale Fläche in zwei neuen Punkten, die mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss bilden. *Der mit einer willkürlichen Constante $c$ multiplicirte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses ist es, der als Entfernung der beiden gegebenen Punkte zu bezeichnen ist.*

Auf ähnliche Weise bestimmt man den Winkel zweier gegebenen Ebenen. Man lege durch die Durchschnittsgerade derselben die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bestimmen mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältniss. *Der Winkel der beiden Ebenen ist gleich dem mit einer beliebig gewählten Constanten $c'$ multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses.*

Unter den *Bewegungen* des Raumes wird man einen Cyclus linearer Transformationen verstehen, welche die Fundamentalfläche unge-

ändert lassen. Eine Fläche zweiten Grades bleibt durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen ungeändert. Aber diese zerfallen in zwei Classen, von denen die eine ein geschlossenes System, die andere kein solches umfasst. Die beiden Classen lassen sich durch das Verhalten der Erzeugenden der Fläche ihren Transformationen gegenüber charakterisiren. Bei den Transformationen erster Classe — und diese bezeichnen wir als Bewegungen*) des Raumes — bleiben die beiden Systeme geradliniger Erzeugender als solche ungeändert; bei den Transformationen zweiter Classe vertauschen sich dieselben unter sich. Es giebt sechsfach unendlich viele Bewegungen; dieselben lassen die Massverhältnisse ungeändert.

Unter *Kugeln* hat man solche Flächen zweiten Grades zu verstehen, welche die fundamentale Fläche nach einer ebenen Curve berühren. Das Centrum der Kugel ist der Pol der Ebene, welche die Berührungscurve enthält. Die Fundamentalfläche selbst ist als eine um ein beliebiges Centrum herumgelegte Kugel mit dem Radius $\infty$ anzusehen etc.

Achtet man insbesondere auf die reellen Elemente des Raumes, so wird man unterscheiden, ob die Fundamentalfläche imaginär oder reell ist, und im letzteren Falle, ob sie geradlinig ist oder nicht.

Ist die Fundamentalfläche *imaginär*, so haben alle gerade Linien eine endliche Länge, alle Ebenenbüschel eine endliche Winkelsumme. Unter diesen Fall subsumirt sich die Massbestimmung der *elliptischen* Geometrie, wenn noch die Constante $c'$ der Winkelbestimmung gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ gesetzt wird, damit die Winkelsumme im Ebenenbüschel gleich $\pi$ ist.

Den Fall, dass die Fundamentalfläche *reell* und *geradlinig* ist, dass sie also ein einschaliges Hyperboloid ist, wollen wir hier nicht weiter betrachten, weil er zu den dreierlei Geometrieen, die wir hier betrachten, der elliptischen, hyperbolischen, parabolischen, in keiner Beziehung steht.

Ist endlich die Fundamentalfläche *reell* und *nicht geradlinig*, so werden wir für Punkte im Inneren eine Massbestimmung erhalten, die unter sich die Massbestimmung der *hyperbolischen* Geometrie begreift, wenn man die Constante $c'$ wieder gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzt.

---

*) Ich habe diese Verhältnisse bereits in einer früheren Arbeit: *Ueber die Mechanik starrer Körper*, diese Annalen, t. IV, 3 auseinander gesetzt. Hinzufügen muss ich, dass bereits Herr Schering in dem Aufsatze: *Die Schwerkraft im Gauss'schen Raume*, Gött. Nachrichten 1870. Nr. 15. die Bewegungen des Raumes im Sinne der hyperbolischen Geometrie betrachtet hat.

Die *parabolische* Geometrie subsumirt sich unter einen speciellen Fall der allgemeinen Massbestimmung, der eintritt, wenn die Fundamentalfläche sich in einen Kegelschnitt, insbesondere in einen imaginären Kegelschnitt, particularisirt. Der fundamentale Kegelschnitt der parabolischen Geometrie ist der sogenannte unendlich ferne, imaginäre Kreis. In dem undualistischen Charakter der Particularisation, welche die Fundamentalfläche erfahren hat, haben die undualistischen Eigenschaften der parabolischen Massbestimmung ihren Grund.

Man kann nun wieder von *Krümmung* einer allgemeinen Massbestimmung u. s. w. reden; doch sollen alle diese Dinge der Kürze wegen hier unerörtert bleiben.

## § 17.

## Die Unabhängigkeit der projectivischen Geometrie von der Parallelentheorie.

Man könnte gegen das gesammte Vorhergehende einen Einwand machen, der bei der seither eingehaltenen Darstellungsweise nicht unbegründet ist, der aber sofort weggeräumt werden kann.

Bei der Begründung der allgemeinen projectivischen Massbestimmung sind wir einmal geometrisch verfahren, indem wir Distanz zweier Punkte etc. als Logarithmen gewisser Doppelverhältnisse definirten, sodann analytisch, indem wir homogene Coordinaten in Anwendung brachten. Beide Dinge: die Doppelverhältnisse und die homogenen Coordinaten, setzen in ihrer gewöhnlichen Begründung die parabolische Massbestimmung voraus, wo denn Doppelverhältnisse wie homogene Coordinaten als gewisse Streckenverhältnisse definirt werden. Man würde also, wenn die thatsächlich gegebene Massbestimmung nicht parabolisch ist, zunächst von diesen Dingen nicht reden können, und alle vorhergehenden Auseinandersetzungen würden ihre Geltung verlieren.

Dem gegenüber hat man sich zu überzeugen, dass die projectivische Geometrie unabhängig von der Frage nach der Art der Massbestimmung gültig ist.

Der Beweis dafür kann in der Art geführt werden, dass man die projectivische Geometrie einmal unter Zugrundelegung der elliptischen, dann unter Zugrundelegung der hyperbolischen Massgeometrie aufbaut. Es ist dies nicht schwer zu leisten, wie man daraus übersehen mag, dass für den Punkt, als Strahlen- und Ebenenbündel im Raume, für den doch auch in der parabolischen Geometrie eine elliptische Massbestimmung angewandt wird, die projectivische Geometrie ungestört gilt.

Aber wesentlicher ist es wohl, zu bemerken, *dass die projectivische*

*Geometrie überhaupt vor Erledigung der Frage nach der Massbestimmung entwickelt werden kann.*

Denn um die Geltung der projectivischen Geometrie in einem beliebig gegebenen begränzten Raume zu erweisen, genügt es, in diesem Raume Constructionen zu machen, die nur sogenannte Lagenbeziehungen betreffen und die nicht über den Raum hinausführen. Die Doppelverhältnisse dürfen dabei natürlich nicht als Streckenverhältnisse definirt werden, da dies die Kenntniss einer Massbestimmung voraussetzen würde. In v. Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage*) sind aber die nöthigen Materialien gegeben, um ein Doppelverhältniss als eine reine Zahl zu definiren. Von den Doppelverhältnissen mögen wir sodann zu den homogenen Punkt- und Ebenencoordinaten aufsteigen, die ja auch nichts anderes sind, als die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse, wie dies v. Staudt ebenfalls gezeigt**) und noch neuerdings Herr Fiedler***) wieder aufgenommen hat. — Unentschieden bleibt dabei, ob sich zu sämmtlichen reellen Werthen der Coordinaten auch entsprechende Raumelemente finden lassen. Ist dies nicht der Fall, so steht nichts im Wege, den betreffenden Coordinatenwerthen entsprechend zu den wirklichen Raumelementen uneigentliche hinzuzufügen. Dies geschieht in der parabolischen Geometrie, wenn wir von der unendlich fernen Ebene reden. Unter Zugrundelegung der hyperbolischen Geometrie würde man ein ganzes Raumstück zu adjungiren haben. Dagegen würde bei der elliptischen Geometrie eine Adjunction uneigentlicher Elemente nicht nöthig sein.

## § 18.

## Ableitung der dreierlei Geometrieen: der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen aus der projectivischen.

Hat man, wie vorstehend auseinandergesetzt, die projectivische Geometrie begründet, so wird man die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung aufstellen können. Dieselbe bleibt durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen, die wir als Bewegungen des Raumes bezeichneten, ungeändert, und kann sie als geradezu durch den Cyclus dieser linearen Transformationen erzeugt angesehen werden (§§ 2., 3.).

Nunmehr wende man sich der Betrachtung der thatsächlichen Bewegungen im Raume und der durch sie begründeten Massbestim-

*) § 27. n. 393.

**) Beiträge. § 29. n. 411.

***) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XV, 2. (1871). — Die darstellende Geometrie von Fiedler. Leipzig 1871.

mung zu. Man übersieht, dass die sechsfach unendlich vielen Bewegungen ebenso viele lineare Transformationen sind. Dieselben lassen überdies eine Fläche, die Fläche der unendlich fernen Punkte, ungeändert. Es giebt aber, wie sich leicht beweisen lässt, keine anderen Flächen, welche durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, als die Flächen zweiten Grades und ihre Ausartungen. Die unendlich fernen Punkte bilden also eine Fläche zweiten Grades, und die Bewegungen des Raumes subsumiren sich unter die vorgenannten sechsfach unendlichen Cyclen linearer Transformationen, welche eine Fläche zweiten Grades ungeändert lassen. Desshalb subsumirt sich auch die durch die Bewegungen gegebene (thatsächliche) Massbestimmung unter die allgemeine projectivische. Während letztere sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades bezieht, ist diese Fläche bei ersterer ein für allemal gegeben.

Die Art dieser der thatsächlichen Massbestimmung zu Grunde liegenden Fläche zweiten Grades kann nun noch näher bestimmt werden. Man beachte, dass eine Ebene durch fortgesetzte Drehung um eine beliebig in ihr im Endlichen gelegene Axe in die Anfangslage zurückkommt. Es sagt dies aus, dass die beiden Tangentialebenen, welche man durch eine im Endlichen gelegene Gerade an die Fundamentalfläche legen kann, imaginär sind. Denn wären sie reell, so fänden sich in dem betreffenden Ebenenbüschel zwei reelle unendlich ferne Ebenen (d. h. Ebenen, welche mit allen anderen einen unendlich grossen Winkel bilden) und dann könnte keine in einem Sinne fortgesetzte Rotation eine Ebene des Büschels in die Anfangslage zurückführen.

Damit nun diese beiden Ebenen imaginär sind, oder, was dasselbe ist, damit der Tangentenkegel der Fundamentalfläche, der von einem beliebigen Punkte des (uns durch die Bewegungen zugänglichen) Raumes ausgeht, imaginär sei, sind drei und nur drei Fälle denkbar:

1. *Die Fundamentalfläche ist imaginär.* Dies ergiebt die elliptische Geometrie.

2. *Die Fundamentalfläche ist reell, nicht geradlinig und umschliesst uns.* Die Annahme der hyperbolischen Geometrie.

3. (Uebergangsfall.) *Die Fundamentalfläche ist in eine imaginäre ebene Curve ausgeartet.* Die Voraussetzung der gewöhnlichen parabolischen Geometrie.

So sind wir denn gerade zu den dreierlei Geometrieen hingeleitet, welche man, wie in § 1. berichtet, von ganz anderen Betrachtungen ausgehend, aufgestellt hat.

Düsseldorf, 19. August 1871.

# Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes.*)

Von E. Heine in Halle.

Es sollen hier einige Voraussetzungen und Schlüsse geprüft werden, auf denen, nach den vorliegenden Mittheilungen, der Beweis des Dirichlet'schen Principes in der Lehre vom Potentiale beruht.

1) *Die erste Voraussetzung besteht in Folgendem:* Die auf der Begrenzung des Raumes $t$, welche eine geschlossene Fläche bildet, gegebene continuirliche und einwerthige Function kann in das Innere und ebenso in den äusseren Raum, *wenigstens auf eine Art*, derartig fortgesetzt werden, dass die Fortsetzung dieselben Bedingungen der *Stetigkeit und Endlichkeit* erfüllt, wie das Potential der Vertheilung einer Masse auf der Oberfläche.

Die im Folgenden nicht erklärten Bezeichnungen sind dieselben wie bei Gauss in dem Werke: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte; ferner wird, wie üblich,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

durch $\Delta V$ bezeichnet.

Die Continuitätsbedingungen, welche, *wie man voraussetzt, wenigstens eine Fortsetzung* $V$ erfüllt, bestehen also darin, dass $V$ im ganzen Raume stetig ist, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ nur bis zur Grenzfläche, sowohl im äusseren als im inneren Raume. (Beweisen will man bekanntlich, dass es auch *eine* Fortsetzung $V_1$ giebt, für welche noch ausserdem $\Delta V_1 = 0$.)

Dirichlet selbst benutzt das Princip bei der Theorie des Potentiales zum Beweise desjenigen Satzes, mit dem Gauss seine oben genannte Arbeit krönt (Nr. 36.), nach welchem eine Massenvertheilung in einem *körperlichen* Raume sich durch eine Belegung der *Oberfläche*

*) Aus den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom 16. August 1871, mit Zusätzen des Verfassers.

mit Masse ersetzen lässt. Die an der Oberfläche gegebene Function ist bei diesem Beweise nicht völlig allgemein; sie ist nämlich gleich dem Werthe, welchen das Potential $\int \frac{k\,dt}{r}$ der gegebenen, im körperlichen Raume vertheilten Masse an der Oberfläche annimmt. Sie kann also wirklich, den Bedingungen gemäss, fortgesetzt werden, nämlich durch dieses Potential selbst.

Um dann nachzuweisen, dass die *gesammte* Masse zur Belegung verwandt werden kann, muss man die Fortsetzung auch noch für den Fall bilden, dass die für die Oberfläche gegebene Function constant, $= 1$ ist. Durch $V = 1$ lässt sich diese Function in den inneren Raum fortsetzen, aber nicht durch denselben Werth in den äusseren Raum, wegen der Bedingung der Endlichkeit ($xV$ soll endlich bleiben). Nach den Principien, welche ich am Schlusse einer brieflichen Mittheilung über Variationsrechnung in den mathematischen Annalen Bd. 1, S. 191 andeutete, finde ich diese Fortsetzung, indem ich um den Anfangspunkt als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius $\alpha$ beschreibe, welche den Raum $t$ ganz einschliesst. Bezeichnet $\varrho$ die Entfernung eines beliebigen Punktes im Raume vom Anfangspunkte, so kann man als Fortsetzung folgende Function $V$ betrachten: Von der Begrenzung des Körpers $t$ bis $\varrho = \alpha$ sei $V = 1$; von $\varrho = \alpha$ bis $\varrho = \infty$ sei:

$$V = 1 - \left(\frac{\varrho - \alpha}{\varrho}\right)^3.$$

Diese einwerthige Function genügt allen Bedingungen im äusseren Raume, wenngleich sie daselbst nicht im ganzen Verlaufe durch ein und dasselbe analytische Gesetz dargestellt wird. (Eine solche Forderung ist aber auch gar nicht gestellt.) In der That sind auch ihre Differentialquotienten bis zu den zweiten incl., nach $x$, $y$, $z$, ebenso wie die Function selbst, einwerthig und stetig, was man deutlich einsieht, wenn man an den Uebergangsstellen auf die Definition des Differentialquotienten zurückgeht.

Wegen der Wichtigkeit der von C. Neumann mit dem Namen der Green'schen belegten Function will ich noch zeigen, dass die in Rede stehende Vorbedingung der Existenz auch für sie erfüllt werden kann, *wie auch t beschaffen ist*, wenn nur die Begrenzung den Bedingungen der Nr. 16. bei Gauss genügt.

Sei dazu $A$ ein gegebener fester Punkt *innerhalb* $t$ oder *ausserhalb*: $P$ bezeichne die Punkte im Raume, $P_0$ an der begrenzenden Fläche; es sei $AP = r$, $AP_0 = r_0$. Es soll die Function, welche an der Oberfläche $\frac{1}{r_0}$ ist, unseren Bedingungen gemäss fortgesetzt werden. Dies hat nur für den *inneren* resp. *äusseren* Raum Schwierigkeiten,

da für die Punkte $P$ des äusseren resp. inneren Raumes $\frac{1}{r}$ eine brauchbare Fortsetzung ist. Legt man nun um $A$ als Mittelpunkt eine Kugel mit einem beliebigen Radius $\alpha$, die aber ganz innerhalb, resp. ganz ausserhalb des Raumes $t$ liegt, und bezeichnet mit $U$ im Inneren und auf der Kugel die Grösse 1, von der Kugeloberfläche bis zur Begrenzung von $t$ aber Null, so wird

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^6 - \alpha^6)^3}{r \,.\, \alpha^{18}} \cdot U$$

eine Fortsetzung in den inneren resp. den äusseren Raum, welche allen Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit genügt.

Abgesehen von den Fällen, in denen mehrere geschlossene Flächen auftreten, und die ich durch die gleichen Principien erledigen kann*), hat Dirichlet auch in den Anwendungen auf Elektrostatik nur solche Functionen wie die hier besprochenen von der Oberfläche ins Innere fortzusetzen. *Die Richtigkeit der ersten Annahme in den bei ihm vorkommenden Fällen ist daher nachgewiesen.*

2) *Es wird ferner vorausgesetzt, dass es mehr als eine, und daher unendlich viele*, den gleichen Bedingungen wie oben genügende *Fortsetzungen giebt.* Ist eine erste Fortsetzung $V$, so lässt sich offenbar jede andere als $V + Z$ darstellen, wo $Z$ alle, den gleichen Bedingungungen der Endlichkeit und Stetigkeit genügende Fortsetzungen der für die Oberfläche gegebenen Function Null bezeichnet.

Solcher $Z$ giebt es immer unendlich viele. Ist nämlich $\varphi(x, y, z) = 0$ irgend eine beliebige geschlossene algebraische Fläche, z. B. eine Kugel, die ganz innerhalb oder ganz ausserhalb $t$ liegt (es sei $\varphi$ eine ganze Function von $x$, $y$, $z$); ist ferner $U$ irgend eine mit ihren ersten beiden Differentialquotienten innerhalb des von $\varphi = 0$ umschlossenen Raumes einwerthige, stetige und endliche Function, ausserhalb desselben aber 0, so wird,

$$W = \varphi^3 U$$

gesetzt, $Z = W$ immer eine von den Functionen $Z$ sein. Es ist klar, dass unendlich viele $U$, selbst bei festgehaltenem $\varphi$, existiren; *eine* Function $U$ findet man schon, wenn man im Innern des durch $\varphi = 0$ begrenzten Raumes $U = 1$ setzt. Um noch andere zu erhalten, denke man sich z. B. diesen Körperraum irgendwie continuirlich und gleichartig mit Masse erfüllt, und kann dann für $U$ in jedem Punkte des Inneren das Potential dieser fingirten Masse in demselben Punkte nehmen.

---

*) Die weitere Ausführung habe ich diesem Abdrucke als Anhang hinzugefügt.

*Die zweite Voraussetzung ist daher in denselben Fällen wie die erste berechtigt.*

3) Es folgt nun bei Dirichlet eine Annahme, auf welche ich hier nicht näher eingehe, und auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen denke, dass es nämlich eine oder einige Fortsetzungen in den inneren Raum giebt — Aehnliches gilt für den äusseren Raum; hier wird der Kürze halber nur der innere betrachtet — welche

$$\int\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right)dt$$

zu einem Minimum machen. Aus dieser Annahme ergiebt sich, wenigstens eine von diesen Fortsetzungen, $V_1$, müsse so beschaffen sein, dass für jede Function $Z$ (m. s. Nr. 2.) das Integral

$$\int Z\,\Delta V_1\,dt$$

verschwindet. *Hieraus will man schliessen, im Raume t müsse* $\Delta V_1$ *im allgemeinen Null sein,* d. h. mit Ausnahme höchstens von Punkten, Linien und Flächen. *Dieser Schluss soll hier geprüft werden.*

Er ist, in Folge des Vorhergehenden, für jedes Stück des Raumes $t$ erlaubt, in dem die Function $\Delta V_1$ ihr Zeichen nicht unendlich oft ändert. Man kann dann nämlich die Stücke, in welchen $\Delta V_1$ das gleiche Zeichen behält, beliebig nahe durch Körper mit algebraischer Begrenzung $\varphi = 0$, z. B. mit Kugeln ausfüllen und für $Z$ eine Function $W$ aus Nr. 2. wählen, die in dem Raume, in welchem sie nicht verschwindet, ihr Zeichen nicht wechselt, sodass das Integral sich allein auf den Theil bezieht, der von einer Fläche $\varphi = 0$ eingeschlossen ist und in welchem daher $W\Delta V_1$ sein Zeichen nicht wechselt, woraus folgt, dass $\Delta V_1$ im Allgemeinen Null ist.

In allen Fällen, die in Nr. 1. erwähnt sind, kann man annehmen, dass $\Delta V_1$ sein Zeichen im Allgemeinen nicht unendlich oft ändert. Die eine Fortsetzung $V$ der an der Oberfläche gegebenen Function aus Nr. 1., die sich auf die Green'sche Function bezieht, nämlich

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^6-\alpha^6)^3}{r\,.\,\alpha^{18}}\cdot U,$$

besitzt diese Eigenschaft augenscheinlich, ebenso wie die andere Function, welche man dort findet, nämlich:

$$V = 1 - \left(\frac{\varrho-\alpha}{\varrho}\right)^3,$$

und ebenso wie das Körperpotential in Nr. 1.

$$V = \int\frac{k\,dt}{r},$$

vorausgesetzt, dass die Eigenschaft in dem letzteren Falle der Dichtigtigkeit $k$ der zu vertheilenden Masse, *wo diese unstetig sein sollte,* selbst zukommt. Die Masse darf daher z. B. keine magnetische sein, die aber bereits durch die Festsetzungen von Gauss über die Dichtigkeit in Nr. 9. ausgeschlossen ist und selbst nach Aufhebung einiger Beschränkungen in Nr. 11. noch ausgeschlossen bleibt. Man kann freilich die Betrachtung von Potentialen magnetischer Massen, nachdem man sie durch Zusammenfassen von je zwei Gliedern der *Summe* $\Sigma \frac{\mu}{r}$ (s. Nr. 2. bei Gauss) in ein *Integral* verwandelt hat, auf die der Potentiale von Massen mit continuirlicher Dichtigkeit zurückführen.

Ist also diese Art von Massen, auf welche die Untersuchungen von Gauss nicht überall anwendbar sein würden, ausgeschlossen, so besitzt $\Delta V$ in Nr. 1. die für $\Delta V_1$ geforderte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichenwechsel. Unter den Functionen $W$ in Nr. 2. giebt es offenbar unendlich viele von solcher Beschaffenheit, dass $V + W$ dieselbe Eigenschaft besitzt. Stellt nun $V_1$ *nicht das Minimum unter allen Fortsetzungen,* sondern nur unter denen vor, welche die erwähnte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichen besitzen, und deren es unendlich viele giebt, *so ist für dieses* $V_1$ *demnach der Schluss, dass* $\Delta V_1$ *im Allgemeinen Null sei, berechtigt.*

---

## Anhang.

(S. S. 628.)

---

Es mögen $n$ Flächen vorliegen, die nicht untereinander zusammenhängen, oder, genauer ausgedrückt, es sollen alle Punkte einer jeden von den Punkten der übrigen um mehr als eine angebbare feste, wenn auch noch so kleine Grösse entfernt sein.

*Die Aufgabe,* eine Function $W$ zu bilden, welche auf jeder von diesen Flächen gegebene Werthe annimmt, *lässt sich auf n einfachere reduciren.* Man hat nur nöthig, $n$ Functionen zu bilden, von denen die $\nu^{\text{te}}$ — wenn $\nu$ successive die Zahlen 1, 2, etc., $n$, vorstellt — auf der $\nu^{\text{ten}}$ Fläche die gegebenen Werthe annimmt, auf den übrigen $n-1$ Flächen sich aber in Null verwandelt. Die Summe solcher $n$ Functionen giebt eine Function $W$ von der verlangten Beschaffenheit.

Ist nun $v$ irgend eine Function, die an $n-1$ gegebenen Flächen gegebene Werthe annimmt, so werde ich aus derselben *eine Function V bilden, welche mit v an den n* — 1 *Flächen übereinstimmt, an einer*

*gegebenen $n^{ten}$ Fläche aber überall verschwindet.* Genügt $v$ den Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit, so wird auch dieses $V$ ihnen genügen.

*Zunächst sei die $n^{te}$ Fläche die Oberfläche einer Kugel* mit dem Radius $\alpha$ und dem Mittelpunkte $A$; im Inneren der Kugel möge kein Theil von einer der anderen Flächen liegen. Man beschreibe um $A$ eine zweite Kugel mit einem Radius $\beta$, der grösser als $\alpha$, aber noch so klein ist, dass auch diese Kugel kein Stück von einer der übrigen $n-1$ Flächen einschliesst. Ist $r$ die Entfernung eines beliebigen Punktes $P$ von $A$, so setze ich $V$ in den Punkten $P$, die

ausserhalb oder auf der Kugel mit dem Radius $\beta$ liegen, gleich $v$;

auf und in der von den beiden Kugelflächen begrenzten Schale gleich

$$v\left[1-\left(\frac{\beta^2-r^2}{\beta^2-\alpha^2}\right)^3\right]^3;$$

drittens, innerhalb der Kugel mit dem Radius $\alpha$ gleich Null.

Diese Function $V$ genügt den Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit, vorausgesetzt, dass $v$ ihnen genügt, erhält an den $n-1$ Flächen dieselben Werthe wie $v$, und verwandelt sich sogar innerhalb der ganzen Kugel mit dem Radius $\alpha$ in Null.

*Der Fall, in welchem die $n^{te}$ Fläche beliebig ist, lässt sich auf den vorigen speciellen zurückführen.* Kann man die $n^{te}$ Fläche nicht in eine einzige Kugel einschliessen, die kein Stück einer von den $n-1$ anderen Flächen enthält, so erfolgt die Einschliessung durch eine grössere aber endliche Zahl $s$ von Kugeln, die nach ihren Mittelpunkten $A_1$, $A_2$, etc., $A_s$ heissen mögen. Man lege diese Kugeln so, dass jede ein Stück der $n^{ten}$ Oberfläche, aber keines von den übrigen $n-1$ Flächen enthält; die Möglichkeit, auf diese Art durch eine *endliche* Anzahl von Kugeln alle Theile der $n^{ten}$ Fläche einzuschliessen, ist klar, da ein und dasselbe Stück in mehreren Kugel vorkommen darf.

Nach diesen Vorbereitungen bilde man aus $v$, nach der im speciellen Falle angewandten Methode, eine Function, wie die oben $V$ genannte, die nun $v_1$ heisse, welche nicht nur an der Oberfläche der Kugel $A_1$, sondern auch im Inneren derselben Null ist und an den übrigen $n-1$ Flächen mit $v$ übereinstimmt. Bildet man aus $v_1$ nach derselben Methode eine Function $v_2$, die auch in der Kugel $A_2$ verschwindet etc., endlich aus $v_{s-1}$ eine Function $v_s$, die noch in $A_s$ verschwindet, so wird $v_s$ an den gegebenen $n-1$ Flächen dieselben Werthe wie $v$ besitzen, und an der $n^{ten}$, wie verlangt wurde, verschwinden; also wird $v_s$ die Aufgabe lösen.

Indem man $n$ successive die Werthe 2, 3, etc. bis zu einer beliebigen ganzen Zahl beilegt, erhält man hieraus den Satz:

*Kann eine Function, die auf einer einzigen Fläche gegebene Werthe besitzt, nach den Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit in den Raum fortgesetzt werden, so lässt sie sich auch so fortsetzen, dass sie noch ausserdem die Bedingung erfüllt, auf einer beliebigen Anzahl gegebener Flächen, welche mit der ersten nicht zusammenhängen, zu verschwinden.*

Halle, September 1871.

# Note sur la théorie de surfaces réciproques.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

Dans mes deux mémoires au commencement de ce volume des „Annalen“ j'ai attribué aux surfaces dont je m'occupe certaines singularités que j'ai énumérées dans l'introduction du premier de ces mémoires. J'ai supposé qu'aucune autre singularité ne s'y ajoutât, ou bien que les singularités se présentassent de la manière la plus générale. Or, comme cette manière la plus générale est différente suivant qu'on regarde la surface comme lieu de points ou comme enveloppe de plans, il faut diviser les singularités en *singularités de définition ponctuelle* et en *singularités de définition tangentielle.* Les singularités de définition ponctuelle sont celles qui satisferont de la manière la plus générale à leur définition si l'on regarde la surface comme lieu de points, et les singularités de définition tangentielle sont celles qui y satisferont de la manière la plus générale si l'on regarde la surface comme enveloppe de plans.

Nous n'avons pas dit expressément quelles définitions de singularités sont ponctuelles et quelles tangentielles, sans quoi les définitions ne sont pas complètes. Nous supléerons ici à cette manque en montrant que la division que nous avons suivie, sans le dire, est la plus naturelle. Comme une surface regardée comme lieu de points n'a pas, en général, des courbes doubles et cuspidales, mais bien des séries de plans tangents doubles et stationnaires, les définitions des singularités ordinaires des plans tangents doubles et stationnaires ($b', k', t', \gamma', q', \varrho', c', h', \beta', r', \sigma'$) doivent être ponctuelles, et celles des singularités ordinaires de la courbe double et de la courbe cuspidale ($b, k, t, \gamma, q, \varrho, c, h, \beta, r, \sigma$) doivent être tangentielles.*) Une

*) Alors on sait que les $\beta$ points cuspidaux de la courbe cuspidale se trouvent sur la courbe double, et que les $\gamma$ points cuspidaux de la courbe double se trouvent sur la courbe cuspidale, et ces points sont donc les mêmes que ceux dont MM. Salmon et Cayley désignent les nombres de la même manière. M. Cayley m'a fait observer que les deux courbes peuvent avoir d'autres points cuspidaux. Ces nouveaux points singuliers demanderaient une nouvelle étude. — J'aurais dû dire expressément que ma définition de $k$ (nombre Plückerien des génératrices doubles d'un cône projetant la courbe double) est un peu différente de celle des MM. Salmon et Cayley, ce qui explique une discordance apparente entre leurs formules et les miennes. J'écris $k - f - 3t - \Sigma(\cdots)$ où M. Cayley écrit seulement $k$.

courbe double, une fois attribuée à une surface regardée comme lieu de points, sera en général douée de points-pinces, pendant que la courbe double d'une surface regardée comme enveloppe de plans n'en a pas généralement. Pour cette raison on doit donner à ces $j$ singularités une définition ponctuelle, et aux $j'$ plans-pinces une définition tangentielle. De même les $\chi$ points-clos sont de définition ponctuelle, et les $\chi'$ plans-clos de définition tangentielle. Nous avons donné expressément aux points coniques et aux singularités qui y appartiennent une définition ponctuelle, et aux plans qui sont tangents le long d'une courbe et aux singularités qui y appartiennent une définition tangentielle. C'est en regardant les définitions de $f$ et de $i$ comme ponctuelles, et celles de $f'$ et de $i'$ comme tangentielles, qu'on a les équations $f = f'$ et $i = i'$.

Nous faisons encore une autre distinction: les propriétés ponctuelles d'une singularité sont celles qui ont rapport aux points de la surface, et les propriétés tangentielles celles qui ont rapport à ses plans tangents. $t'$ indique, par exemple, le nombre des plans qui ont la propriété ponctuelle de rencontrer la surface en une courbe douée de trois points doubles, et la propriété tangentielle d'être plans tangents triples, soit de la surface elle-même, soit de l'enveloppe des plans tangents doubles. Les propriétés ponctuelles des singularités de définition ponctuelle, ainsi que les propriétés tangentielles des singularités de définition tangentielle, sont indiquées dans les définitions elles-mêmes: mais il est souvent très-difficile de trouver les propriétés ponctuelles des singularités de définition tangentielle, et les propriétés tangentielles des singularités de définition ponctuelle, et ces propriétés peuvent être assez compliquées. Pour connaître suffisamment les propriétés tangentielles d'un point-pince, par exemple, il faut avoir étudié la singularité de l'enveloppe des plans tangents stationnaires causée par le point-pince. Pour la trouver on a besoin d'étudier les singularités que l'Hessienne et sa courbe d'intersection avec la surface donnée ont à ce même point.

Si l'on regarde, dans une recherche, une surface comme lieu de ses points on doit connaître les propriétés ponctuelles des singularités qu'on lui attribue, et si l'on regarde une surface comme enveloppe de ses plans tangents on doit connaître les propriétés tangentielles de ses singularités. Dans une théorie des surfaces *réciproques* on a besoin de connaître, à la fois, les propriétés ponctuelles et les propriétés tangentielles des singularités qu'on attribue aux surfaces. N'ayant fait une étude assez profonde ni des propriétés tangentielles des singularités $j$, $\chi$, $\eta$ et $\zeta$, dont la définition est ponctuelle, ni des propriétés ponctuelles des singularités $j'$, $\chi'$, $\eta'$ et $\zeta'$, dont la définition est tangentielle, je dois prier les lecteurs de mes mémoires *d'ajouter au*

*mémoire „Sur deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un"*, où les surfaces sont regardées comme lieux de points, *la restriction suivante:*

*„Les surfaces* $[F_1]$ *et* $[F_2]$ *sont dénuées des singularités* $j'$, $\chi'$, $\eta'$ *et* $\zeta'$",

et à *l'introduction* du mémoire „Sur les droites multiples des surfaces" la restriction suivante:

*„Les équations à la page 4 sont justes si la surface est dénuée des singularites* $j'$, $\chi'$, $\eta'$ *et* $\zeta'$, *et les équations réciproques si elle est dénuée des singularités* $j$, $\chi$, $\eta$ *et* $\zeta$. *Elles seront donc applicables à la fois à une surface dénuée de toutes ces singularités.*

Ni à l'un ni à l'autre de ces endroits les restrictions n'altèreront les exposés des résultats; mais il est possible que les singularités dont je parle, si les surfaces en avaient, introduiraient de nouveaux termes dans les équations. Quant aux recherches qui font l'objet principal de mon premier mémoire, je n'ai pas besoin d'y ajouter aussi une restriction; car les singularités $j$ et $j'$ ne s'y présentent que d'une manière spéciale.

Je ne dis pas que les formules à la page 4 cessent d'être vraies au delà des limites indiquées ici, mais seulement que *ma déduction* de ces formules (que je n'ai pas exposée mais où je fais usage, soit des procédés de M. Salmon, soit du principe de correspondance) est alors insuffisante. Pour les singularités $j$ et $j'$, $\chi$ et $\chi'$ je ne fais que reproduire les formules de M. Cayley (On reciprocal Surfaces. Phil. Trans. 1869, p. 202), et quant aux singularités $\eta$ et $\eta'$ mes résultats sont d'accord avec ceux que ce savant a trouvé par rapport aux „binodes" et aux „biplans"; mais je ne sais pas si M. Cayley veut donner à ses définitions les mêmes degrés de généralité que j'ai indiqués ici, ou s'il se borne aux cas où les singularités de définition tangentielle n'ont pas d'autres propriétés ponctuelles que celles qui appartiennent déjà aux singularités ponctuelles qu'il attribue aux surfaces, et réciproquement. Cela a lieu pour les surfaces cubiques qui font un objet principal de ses recherches; mais déjà à l'étude d'une surface de 4$^{me}$ ordre douée d'une conique double et à laquelle on donne une définition ponctuelle on rencontre des points-pinces qui ont des propriétés tangentielles plus compliquées. Les nombres des singularités de cette surface, tirées des équations dont je viens de parler (Cayley p. 202, Zeuthen p. 4), ne satisfont pas à l'équation que donne M. Cayley à la page 228. Nous montrerons dans ce qui suit un autre fait qui sera en discordance avec cette dernière équation (les autres supposées justes) si l'on attribue à la surface des points-clos définis comme je l'ai fait ici.

---

En bornant l'étude des surfaces réciproques aux surfaces dénuées des singularités $j$, $j'$, $\chi$, $\chi'$, $\eta$, $\eta'$, $\zeta$, $\zeta'$ il sera moins difficile de déterminer tous les coefficients de la 26[me] équation *) qui, à côté des 3 équations (I), des 11 équations (II)—(IV) et (VIII)—(IX) et des 11 équations réciproques, ont lieu entre les singularités d'une surface. En effet, cette 26[me] équation sera l'équation (13) [ou (14)] à la page 46 de mon deuxième mémoire.

Je donnerai ici une autre déduction de la même équation où je ne ferai pas usage de la théorie de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un, mais seulement du principe de correspondance. Nous appliquerons ce principe à trouver le *nombre des plans qui sont à la fois tangents à la surface et osculateurs à la courbe cuspidale à un même point de celle-ci.* Nous prenons alors pour les points correspondants ($x$ et $u$) dont on cherche les coïncidences les points où le plan tangent et le plan osculateur à un même point de la courbe cuspidale rencontrent une droite fixe. A un point $x$ correspondent $\sigma$ points $u$, et, si l'on désigne par $m$ la classe de la développable (d'ordre $r$) enveloppe des plans osculateurs de la courbe cuspidale, à un point $u$ correspondent $m$ points $x$. Il y a donc $\sigma + m$ coïncidences d'un point $x$ avec un point correspondant $u$. Ces coïncidences ont lieu 1° aux $r$ points où la droite fixe rencontre des tangentes de la courbe cuspidale, et 2° aux points où elle rencontre les plans cherchés. Le nombre de ces plans est donc $\sigma + m - r$.

Une partie des plans trouvés, disons préalablement $\Sigma'$, coïncident avec les plans qui sont tangents le long d'une courbe; les points de contact des autres auront la propriété réciproque à celle des plans: celle d'être à la fois points de contact de plans tangents stationnaires avec la surface et points de contact des mêmes plans avec l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires. En déterminant le nombre de ces points d'une manière analogue on trouve l'équation suivante

$$\sigma + m - r - \Sigma' = \sigma' + m' - r' - \Sigma,$$

où $m'$ est l'ordre de l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents stationnaires, $\Sigma$ le nombre des points qui ont la propriété indiquée et qui se trouvent aux points coniques de la surface. Or on a d'après les relations de Plücker

$$m = \beta + 3r - 3c \quad , \quad m' = \beta' + 3r' - 3c',$$

et $\Sigma$ sera égal à la somme des nombres respectifs des droites qui ont

*) Après avoir exposé les autres 25 équations aux pages 3 et 4 je parle à la page 4 (et à la page 46) de *deux* nouvelles équations (servant à déterminer $\beta$ et $\beta'$); mais ces équations se réduisent, au moyen des 25 autres, à une seule. (Voir le mémoire de M. Cayley p. 228.)

aux points coniques ($\mu$-tuples) un contact $(\mu + 2)$-ponctuel avec la surface (voir à la page 39), ou bien à

$$\Sigma\,[\mu\,(\mu + 1) - 2\,y - 3\,z] = \Sigma\,[2\,\mu + \nu]\,.$$

On aura de même à substituer à $\Sigma'$ le nombre $\Sigma'\,[2\,\mu' + \nu']$. On trouve ainsi

$$\sigma + 2r - 3c + \Sigma\,(2\,\mu + \nu) = \sigma' + 2r' - 3c' + \Sigma'\,(2\,\mu' + \nu')\,,$$

qui est une forme de l'équation cherchée. On peut au moyen des équations à la page 4 la réduire à l'équation (13) à la page 46.

On pourrait appliquer le même procédé à une surface douée des singularités $j$, $j'$ etc.; mais ne connaissant pas suffisamment les propriétés de ces singularités, comme je l'ai dit, je ne pourrais alors déterminer les coefficients. Toutefois cette recherche peut servir à confirmer que l'introduction de ces singularités dans la théorie des surfaces *réciproques* a été prématurée. Supposons par exemple que la surface soit douée de $\chi$ points-clos et de $\chi'$ plans-clos. Alors on doit remplacer la formule trouvée par la suivante:

$$\begin{aligned} &\sigma + 2r - 3c + \Sigma\,(2\mu + \nu) + A\,.\,\chi \\ &= \sigma' + 2r' - 3c' + \Sigma'(2\mu' + \nu') + A\,.\,\chi', \end{aligned}$$

où $A$ est un coefficient inconnu mais *entier*; mais l'équation de M. Cayley à la page 228, combinée avec ses autres formules (à la page 202, mes formules de la page 4) donnerait à $\chi$ et $\chi'$ le coefficient $\frac{25}{3}$.*)

*) Je saisis l'occasion pour répondre à une remarque de M. Nöther (Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1871, p. 277): Dans les remarques que j'ai faites à la page 324 du 3$^{me}$ vol. des „Mathematische Annalen" sur la représentation d'une surface sur un plan double je fais, sans le dire je l'avoue, la même supposition que je fais expressément dans mon mémoire sur „deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un", celle qu'aucun des points fondamentaux ne soit doué d'une direction fondamentale.

# Verbesserungen.

S. 251, Z. 1 v. o. l.: „durch welche mindestens“.
S. 251, Z. 21 v. o. l.: „desselben“.
S. 254, Z. 14 v. o. l.: $\mathfrak{F}_3^5$ statt $F_3^5$.
S. 254, Z. 5 v. u. l.: $\omega$ statt $w$.
S. 257, Z. 14 v. u. l.: $d$ statt $\partial$.
Z. 258, Z. 14 v. u. l.: „Axe“.
Z. 260: Der Strich ist zu tilgen und hinter Nr. 15 zu setzen.
S. 264, Z. 18 v. u. l.: „zweimal“ statt „gar nicht“.
S. 274, Z. 20 v. o. l.: „Grundcurven“.
S. 276, Z. 14 v. u. l.: „Berührungspunkte“.
S. 277, Z. 9 v. o. l. einmal: „keinem“ statt „einem“.
S. 277, Z. 19 v. o. l.: (112) statt (122).
S. 279, Z. 16 v. o. l.: „Ergänzungscurve“.
S. 281, Z. 21 v. o. l.: „auch nicht ebene Curven 3. Ordnung“. Dass es doppelt gekrümmte giebt, hat Herr Nöther in Bd. 3. S. 182 nachgewiesen.
S. 283, Z. 8 v. o. l.: 4 statt 6.
S. 422, Z. 14 v. o. ist statt „entsprechende Punkte“ zu setzen: „entsprechenden Punkten wieder zwei entsprechende“.